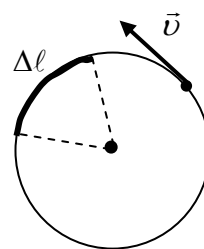


§13. Координата и скорость движущейся по окружности точки

Рассмотрим разные способы определения положения точки, равномерно движущейся по окружности.



Способ 1 «Естественный»

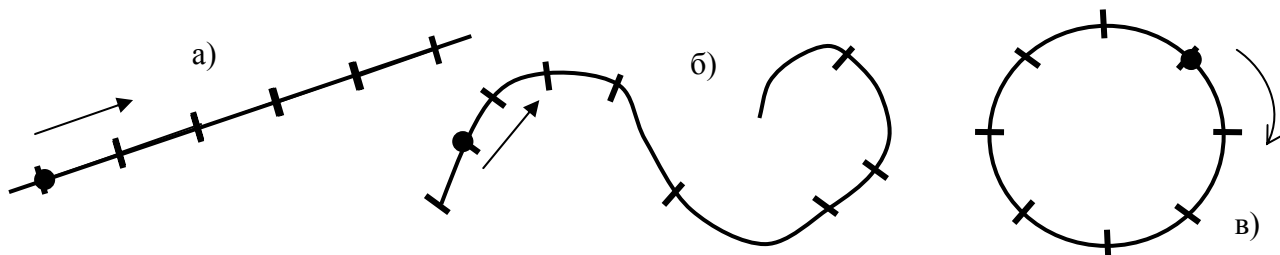
Самый простой способ (его иногда называют естественным или траекторным) – заметить начальное положение точки и отмерять пройденный ею путь (длину дуги). Можно представить себе тонкую ниточку, привязанную к движущемуся шариком, которая тянется за ним и наматывается на диск.



Почему нитка должна быть тонкой?

Сказочный клубок ниток катится с постоянной скоростью v по петляющей в лесу дорожке. Напишите формулу, позволяющую по траектории определить положение клубка в любой момент времени: а) в общем виде; б) при скорости клубка 50 см/с. Для случая б) изобразите график зависимости пути и модуля перемещения клубка от времени.

На рисунке изображены различные траектории движения точки, ее начальное положение и направление движения; штрихами отмечались положения точки ежесекундно. Покажите вектор перемещения точки за 5 с.



Три ученика дали по-разному определение равномерного движения.

Анна: Тело в равные промежутки времени проходит равные пути.

Борис: За равные промежутки времени тело совершает равные перемещения.

Вера: Тело проходит одинаковые отрезки пути за любые одинаковые временные промежутки.



Как, исходя из своих определений, ученики охарактеризуют движение точки по рисункам? Предложите свои определения равномерного и равноускоренного движений.

	а)	б)	в)
Анна			
Борис			
Вера			

Если нам известны траектория, по которой движется тело, а также закон его движения (зависимость пройденного пути от времени), мы сможем определять положение тела в произвольный момент времени. Закон движения тела может быть задан с помощью таблицы, формулы или графика.



Задайте законы движения двух марафонцев с помощью таблицы, графика и формулы. Оба марафонца бегут с практически постоянной скоростью 2 м/с, однако один задержался на старте на 8 секунд, а через 14 секунд после старта упал другой. Какой способ задания закона движения удобнее? В какой момент времени марафонцы

окажутся в одной точке?

Особый интерес представляют так называемые периодические движения. В частности, точка, движущаяся равномерно по окружности, через равные промежутки времени возвращается в начальное положение. В этом случае для определения положения точки удобно отбросить целое число длин окружности.



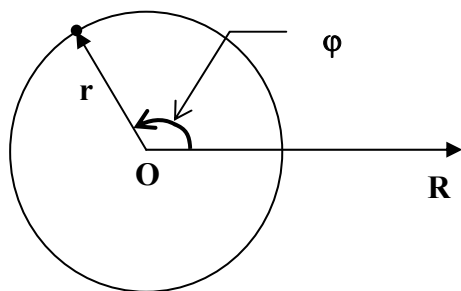
Решите задачи.

1. Игрушечный поезд движется по замкнутой трассе длиной 10 м со скоростью 70 см/с. Где будет находиться поезд через 20 минут непрерывного движения?
2. Длина часовой стрелки 6 см, минутной – 9 см, секундной – 12 см. Сколько времени показывают настенные часы, если после того, как часы пробили полночь, конец часовой стрелки прошел путь 45 см, минутной – 828 см, секундной – 66 240 см.

Указание: использовать приближительную формулу для длины окружности радиусом R :
 $L \approx 6R$.

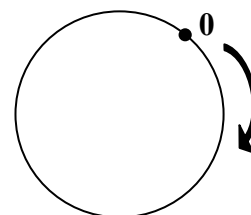
Способ 2 «Координатный»

На уроках географии вы могли познакомиться с различными системами координат. Так, для определения положения точки на поверхности Земли используются такие координаты, как долгота и широта. Для ориентации на местности необходимо задавать направление с помощью азимута и находить расстояние до объекта – полярная система координат. Для описания движения по окружности также удобно использовать полярные координаты.



Полярная система координат:
 OR – полярная ось;
 O – полюс;
 r – радиус-вектор;
 φ – полярный угол (отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки).

Задача. Точка движется равномерно по окружности радиуса $R = 10$ см с угловой скоростью $\omega = 30$ °/с. Найти и показать положение точки, если после прохождения нулевой отметки прошло: а) 12 мин; б) 12 мин 6 с; в) 2 с. Какой путь пройдет точка за это время?



Дополните решение:

- а) $\Delta\alpha = 30 \cdot 12 \cdot 60 = 21600$ (°). Разделим этот угол на 360 °, получим 60. Что означает это число? Точка сделала ровно 60 оборотов и вернулась в начало отсчета. Пройденный путь $\Delta S = 60 \cdot 2\pi R \approx \dots$ (м);
- б) еще за 6 секунд точка пройдет угол 180 °. Пройденный путь увеличится на πR ;
- в) через 2 с: $\Delta\alpha = 30 \cdot 2 = 60$ °. Какой же путь она пройдет? 60 ° - это $1/6$ длины окружности, следовательно: $\Delta S = \dots \approx 0,1$ м.

Попробуем решить задачу в общем виде. Пусть точка вращалась Δt секунд, в результате она повернулась на угол $\omega \Delta t$. Как мы уже знаем, для определения положения точки надо откинуть целое число оборотов, допустим $360^\circ \cdot n$. Оставшийся угол (обозначим его $\Delta\alpha$) будет меньше 360° , и с помощью транспортира можно будет найти положение точки.



Путь, пройденный точкой: $\Delta S = 2\pi R \cdot n + \Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – длина дуги, на которую опирается угол $\Delta\alpha$. *Обоснуйте формулу, связывающую длину дуги $\Delta\ell$ и угол $\Delta\alpha^\circ$, на который она опирается:*

$$\Delta\ell = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \Delta\alpha^\circ$$

В математике предлагается способ существенного упрощения этой формулы. Для этого надо лишь перейти к другим единицам измерения углов и убрать постоянный коэффициент $\frac{2\pi}{360^\circ}$: $\Delta\ell = R\Delta\varphi$, где $\varphi = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$.

Новая мера угла получила название «радиан» (от лат. *radius* – луч, радиус). 1 радиан – это такой угол, который опирается на дугу длиной R . $1 \text{ рад} \approx 57^\circ$.

6-00

Изучите таблицу перевода градусной меры в радианную.



Воспользуйтесь «естественным» способом и дайте определение линейной скорости точки, движущейся равномерно по окружности:

$$v = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} \text{ (м/с)}$$

Воспользуйтесь «координатным» способом и дайте определение угловой скорости точки, движущейся равномерно по окружности:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ (рад/с)}$$

Выведите формулу связи угловой и линейной скорости:

$$v = \omega R$$

Получите две формулы для нахождения периода обращения (времени полного оборота) T , используя: а) линейную скорость; б) угловую скорость.



Решите задачу.

Пуля, вылетевшая из ствола автомата Калашникова, обладает скоростью 715 м/с и вращается вокруг оси, совпадающей с направлением движения, с частотой 3000 об/с.

Считая скорость постоянной, определите число оборотов, совершенных пулей на пути 5 м.



Предложите определение частоты обращения (ν), получите формулы, связывающие: а) частоту и период обращения, б) угловую скорость с частотой обращения; в) линейную скорость с частотой обращения.

В классе был поставлен вопрос: действует ли сила на частицу, движущуюся равномерно по окружности. Мнения разделились. Одни полагали, что при равномерном движении сила не действует (в соответствии с законом инерции). Другие им возражали и приводили в пример движение Луны вокруг Земли: если бы на Луну не действовала сила гравитационного притяжения, она бы улетела.



В соответствии со вторым законом Ньютона в ИСО материальная точка, не испытывающая воздействия со стороны других тел, движется равномерно и прямолинейно или покоится.

На точку, движущуюся равномерно по окружности, должна действовать сила, которая, не меняя скорость по величине, изменяет ее по направлению, искривляет траекторию точки. Работа этой силы равна изменению кинетической энергии точки: $A = \Delta W_{\text{кин}}$. Однако $\Delta W_{\text{кин}} = 0$, т.к. точка движется равномерно.

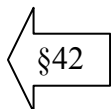


Нет ли здесь противоречия: сила действует, перемещение точки есть, а работа силы равна нулю? Встречались ли мы раньше с подобными ситуациями?

Вспомним определение работы постоянной силы:

$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha$$

В рассматриваемом нами случае сила направлена всегда к центру, поэтому $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ рад и работа ее равна нулю. Нельзя сказать, впрочем, что сила «ничего не делает»: она поворачивает частицу, меняет направление ее скорости. Эту силу по понятным причинам назвали центростремительной.



Познакомьтесь с силой Лоренца, которая заставляет заряженную частицу двигаться по окружности в магнитном поле.

Итак, на точку, которая равномерно движется по окружности, действует центростремительная сила $\vec{F}_{\text{цс}} = m\vec{a}_{\text{цс}}$. Можно показать, что центростремительное ускорение можно рассчитать по формулам:

