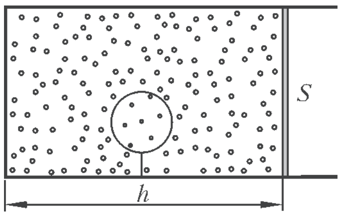


находится в комнате (см. рисунок). Площадь поршня $S = 400$ см^2, расстояние от края цилиндра до поршня $h = 50$ см. В сосуде ко дну на нити прикреплен шар объемом $V_ш = 1000$ см^3, сделанный из тонкого нерастяжимого и теплопроводящего материала и заполненный гелием. Масса шара с гелием $m = 1{,}2$ г. После того как протопили печь и воздух в комнате прогрелся, поршень переместился на расстояние $\Delta h = 3$ см. Найдите изменение силы натяжения нити, удерживающей шар.

Е.Простомолотова

Ф2091. Три одинаковые батарейки напряжением 1,5 В каждая вначале не соединены друг с другом. Затем между каждым выводом батарейки и каждым из пяти оставшихся выводов подключают резистор сопротивлением 1000 Ом. Сколько всего получится резисторов? Какой ток при этом будет течь через каждую из батареек?

А.Простов

Ф2092. Школьник исследует резонанс в последовательном колебательном контуре, используя генератор звуковой частоты и высокоомный вольтметр переменного напряжения. Конденсатор имеет емкость 0,5 мкФ, индуктивность катушки равна 0,1 Гн. Сопротивление провода, которым намотана катушка, составляет 50 Ом. Вольтметр подключают параллельно конденсатору и изменяют частоту генератора. На какой частоте показания вольтметра будут максимальными? На какой частоте вольтметр покажет максимум, если подключить его к выводам катушки?

А.Зильберман

Решения задач М2056–М2065, Ф2073–Ф2077

М2056. *В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что* $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N\text{ единиц}}$.

Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 9.

Как известно, любое число имеет тот же остаток от деления на 9, что и его сумма цифр. Поэтому числа, получаемые друг из друга перестановкой цифр, имеют одинаковый остаток от деления на 9, т.е. их разность делится на 9. Поэтому и сумма цифр разности, равная N, должна делиться на 9, откуда $N \geq 9$.

Значение $N = 9$ получается, например, так:

$$9012345678 - 8901234567 = 111111111.$$

Н.Агаханов

М2057. *25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.*

По условию имеется ровно 26 девочек, знакомых хотя бы с одним мальчиком из 25. Выберем произвольно мальчика M. Для оставшихся 24 мальчиков ровно 25 девочек знакомы хотя бы с одним из них. Тогда девочка D, не входящая в эти 25, знакома только с одним мальчиком M. Обозначим мальчиков $M_1, \ldots, M_{25}$; обозначим девочку, знакомую только с M_i, через D_i. Рассмотрим оставшуюся девочку (отличную от $D_1, \ldots, D_{25}$). Если она знакома менее чем с 16 мальчиками, то для группы из $k \geq 10$ мальчиков, не знакомых с ней, найдется ровно k девочек, знакомых хотя бы с одним из них, – противоречие.

С.Волчёнков

М2058. *В выпуклом четырехугольнике пять из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.*

Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, а E, I, F, K – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Равные отрезки из условия (их не меньше пяти) назовем *отмеченными*. Также будем называть *отмеченными* те из треугольников ABC, BCD, CDA, DAB, в которых две медианы отмеченные. Ясно, что отмеченный треугольник найдется; пусть это будет ABC. Из равенства медиан следует, что ABC равнобедренный: $AB = BC = a$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть отмеченным является треугольник CDA. Тогда ABC и CDA – равнобедренные треугольники с общим основанием и равными медианами к боковым сторонам. Значит, эти треугольники равны, откуда $CD = DA = a$. Отсюда легко вывести, что все 8 отрезков из условия задачи равны.

2. Пусть отмеченным является треугольник BCD (случай, когда отмечен ABD, аналогичен). Тогда $AB = BC = CD = a$. Без ограничения общности можно считать, что отмечен отрезок AF или BK (случаи, когда отмечен DE или CK, аналогичны). Если отмечен AF, то у треугольников ABC и CDA общая сторона AC, равные стороны BC и CD и равные медианы, проведенные к этим сторонам. Отсюда треугольники равны, и получаем $AB = BC = CD = DA = a$. Если отмечен BK, то у треугольников ABD и CBD общая сторона BD, равные стороны AB и BC и равные медианы, проведенные к третьим сторонам. Получим, что треугольники равны, и снова $AB = = BC = CD = DA = a$.

3. Пусть ни один из треугольников BCD, CDA, ADB не является отмеченным. Тогда в каждом из них отмечено ровно по одной медиане. В этом случае $AD \neq AB$, $CD \neq BC$, $AD \neq CD$. Разобьем теперь отрезки на пары (AF, CK), (BF, BK), (DE, DI). Ни в одной паре нет двух отмеченных отрезков. В самом деле, $AF \neq CK$, иначе $AD = CD$. Если $BF = BK$ или $DE = DI$, то треугольники ABD и CBD равны, и снова $AD = CD$ – противоречие. Значит, в каждой паре отмечен ровно один отрезок. Пусть в паре (DE, DI) отмечен DI, тогда в паре (BF, BK) отмечен BK. Если в паре (AF, CK) отмечен CK, то BKC и AID – равные треугольники

(равнобедренные с равными боковыми сторонами и общей медианой к основаниям), откуда $AD = a$, что невозможно. Значит, в паре (AF, CK) отмечен AF.

Итак, отмечены: AI, CE, AF, BK, DI. Пусть $AC = s$, $BD = t$, $AD = x$, $CD = y$. Тогда, приравняв длины медиан BK и DI в треугольниках ABD и BDC, а также длины медиан CE и AF в треугольниках ABC и CAD, получим: $2a^2 + 2t^2 - x^2 = 2y^2 + 2t^2 - a^2$, $2a^2 + 2s^2 - a^2 = 2x^2 + 2s^2 - y^2$, откуда $x^2 + 2y^2 = 3a^2$ и $2x^2 - y^2 = a^2$, и $x = y = a$ – противоречие.

Замечания

Из решения легко следует, что утверждение задачи верно в случае произвольной замкнутой четырехзвенной ломаной (не обязательно являющейся границей выпуклого четырехугольника).

Легко видеть, что имеются ровно две существенно различные ломаные, удовлетворяющие условию задачи, – квадрат $ABCD$ и ломаная $ABCD$, в которой совпадают точки A и С, а также B и D.

Частный случай задачи М2058, когда в выпуклом четырехугольнике, по условию, семь отрезков равны, предлагался на IV этапе XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Н.Агаханов, В.Сендеров

М2059. *Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.*

Лемма. Если для некоторого натурального n число n^3 является точным квадратом, то число n также является точным квадратом.

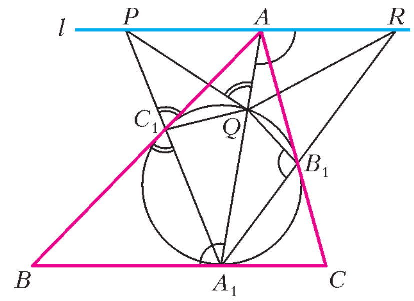
Доказательство. Пусть простое число p входит в разложение числа n на простые множители в степени t, тогда p входит в разложение числа n^3 в степени $3t$. По условию $3t$ четно, поэтому t четно. В силу произвольности p получаем, что n – точный квадрат. Лемма доказана.

Пусть в прогрессии с разностью $d > 0$ содержится куб натурального числа m. Если m^3 не является точным квадратом, то искомое число найдено. Иначе m^3 – точный квадрат и, согласно лемме, m – точный квадрат, $m = k^2$. Вместе с m^3 прогрессия содержит точный куб $A = \left(m + md^2\right)^3$, поскольку $A = m^3 + ld$, где l – натуральное. Докажем, что A не является точным квадратом. Пусть это не так, тогда по лемме $m + md^2 = k^2\left(1 + d^2\right)$ – точный квадрат. Отсюда $1 + d^2$ – точный квадрат, $1 + d^2 = x^2$ для натурального x. Получаем $1 = (x-d)(x+d)$, что невозможно.

И.Богданов, В.Сендеров

М2060. *Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке Q. Прямая ℓ параллельна BC и проходит через A. Прямые A_1C_1 и A_1B_1 пересекают ℓ в точках P и R соответственно. Докажите, что $\angle PQR = \angle B_1QC_1$.*

Так как BC – касательная к вписанной окружности (см. рисунок), то $\angle BA_1Q = \frac{1}{2}\overset{\smile}{A_1C_1Q} = \angle A_1B_1Q$; с другой стороны, $\angle BA_1A = \angle A_1AR$ как внутренние накрест лежащие. Поэтому $\angle QAR = \angle A_1B_1Q$, и четырехугольник ARB_1Q – вписанный. Аналогично, вписанным является и четырехугольник $PAQC_1$, поэтому



$$\angle PQR = \angle PQA + \angle RQA =$$
$$= \angle PC_1A + \angle RB_1A = \angle A_1C_1B + A_1B_1C.$$

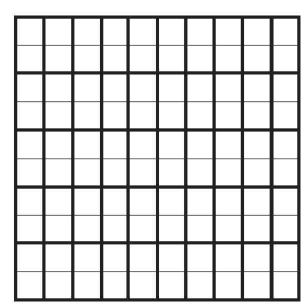
Поскольку оба слагаемых – углы между касательными и хордами, имеем

$$\angle PQR = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{A_1C_1} + \overset{\smile}{A_1B_1}\right) = \frac{1}{2}\overset{\smile}{B_1A_1C_1} = \angle B_1QC_1,$$

что и требовалось.

А.Полянский

М2061. *В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке – от 1 до 10 слева направо, во второй – от 11 до 20 слева направо и т.д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?*



Ответ: на 50 вертикальных прямоугольников (см. рисунок).

Пронумеруем прямоугольники разбиения. Пусть в i-м прямоугольнике лежат числа a_i и b_i. Заметим, что $a_ib_i = \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} - \frac{\left(a_i - b_i\right)^2}{2}$. Просуммировав эти равенства по всем прямоугольникам, получаем, что сумма всех 50 произведений равна

$$S = \frac{a_1^2 + \ldots + a_{50}^2 + b_1^2 + \ldots + b_{50}^2}{2} - \frac{\left(a_1 - b_1\right)^2 + \ldots + \left(a_{50} - b_{50}\right)^2}{2}.$$

Заметим, что первая дробь равна $\frac{1^2 + \ldots + 100^2}{2}$, т.е. не зависит от разбиения. В числителе же второй дроби каждый квадрат равен либо 1^2, либо 10^2 – в зависимости от того, горизонтален или вертикален i-й прямоугольник. Поэтому вторая дробь будет максимальна (а итоговая сумма – минимальна) тогда, когда все слагаемые в числителе будут равняться 100, т.е. когда все прямоугольники будут вертикальны.

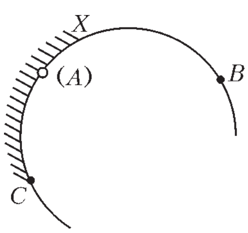
А.Бадзян

М2062. *Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?*

Приведем один из возможных вариантов договоренности.

Рассмотрим 2007 дуг, на которые разбили окружность отмеченные точки. Пусть $\overset{\smile}{AB}$ – наибольшая из них (если их несколько, то возьмем любую), и пусть эта дуга лежит по часовой стрелке от точки A (и против часовой – от точки B). Тогда помощник должен стереть точку A.

Покажем, что фокусник сможет указать полуокружность, на которой находилась стертая точка. Войдя в комнату, он увидит окружность, разбитую на 2006 дуг. Ясно, что стертая точка будет находиться на наибольшей из дуг (она уже единственна, так как наибольшая дуга после стирания ее конца увеличилась). Более того, если сейчас наибольшая дуга – $\overset{\smile}{CB}$ (и она находится по часовой стрелке от C), то $\overset{\smile}{AB} \geq \overset{\smile}{CA}$ (см. рисунок). Поэтому если X – середина $\overset{\smile}{CB}$, то A лежит на $\overset{\smile}{CX}$. Следовательно, фокусник может выделить полуокружность, находящуюся по часовой стрелке от C (она содержит $\overset{\smile}{CX}$).



А.Акопян, И.Богданов

М2063. *Назовем многогранник хорошим, если его объем (измеренный в $м^3$) численно равен площади его поверхности (измеренной в $м^2$). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?*

Ответ: нельзя.

Предположим, что хороший тетраэдр объема V с площадью поверхности S помещен внутри хорошего параллелепипеда объема V', площади граней которого равны S_1, S_2, S_3 ($S_1 \geq S_2 \geq S_3$), а соответствующие высоты равны h_1, h_2, h_3. По условию $V = S$ и $V' = 2(S_1 + S_2 + S_3)$.

Впишем в тетраэдр сферу ω радиуса r. Так как $V = \frac{1}{3}Sr$, то $r = 3$. Сфера ω лежит между парой параллельных плоскостей, содержащих грани параллелепипеда, поэтому $h_1 > 2r = 6$. Отсюда

$$V' = S_1 h_1 > 6S_1 \geq 2(S_1 + S_2 + S_3) = V'.$$

Противоречие.

М.Мурашкин

М2064. *Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O. Пусть M и N – центры окружностей, вписанных в треугольники ADE и ODE соответственно. Докажите, что середина меньшей дуги DE лежит на прямой MN.*

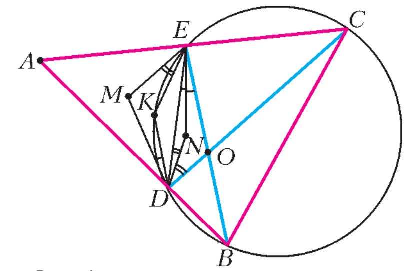


Рис. 1

Середину меньшей дуги DE обозначим через K (рис.1). Тогда

$$\angle MEK = \angle MED - \angle KED =$$
$$= \angle MED - \angle KCD = \frac{1}{2}\angle AED - \frac{1}{2}\angle ECD =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle AED - \angle ECD) = \frac{1}{2}\angle CDE = \angle EDN$$

(в частности, точка K лежит в $\angle MED$, так как $\angle MED - \angle KED > 0$). Аналогично, $\angle MDK = \angle DEN$.

Пусть прямые DK и EK пересекают описанную окружность треугольника DEM в точках P и Q соответственно (рис. 2). Так как $DK = EK$, то $\angle KED = \angle KDE = \angle PDE = \angle PQE$, откуда $PQ \parallel DE$. Далее, $\angle QPM = \angle QEM = \angle KEM = \angle EDN$ и, аналогично, $\angle PQM = \angle DEN$. Отсюда вытекает, что треугольники DEN и PQM гомотетичны, причем K является центром гомотетии (как точка пересечения прямых QE и PD). Следовательно, MN проходит через K.

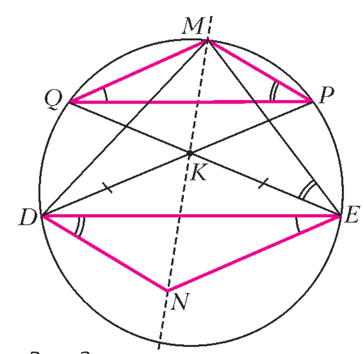


Рис. 2

М.Исаев

М2065. *В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.*

Назовем *особым* членом последовательности такой член x_n, для которого $[x_n] > [x_{n-1}]$. Очевидно, особых членов бесконечно много (так как если $[x_n] = k$, то $[x_{n+k}] > [x_n]$). Для каждого особого члена представим его дробную часть в виде несократимой дроби (если особый член – целое число, будем считать числитель его дробной части равным 0). Мы докажем, что числитель этой дроби у каждого следующего особого члена не больше, чем у предыдущего; кроме того, если этот числитель больше 0, то найдется особый член, у которого соответствующий числитель меньше.

Пусть x_k – особый член. Обозначим его целую часть через m (очевидно, $m \geq 2$), а дробную – через r. Поскольку $[x_{k-1}] = m-1$, то имеет место неравенство $r < \frac{1}{m-1} \leq \frac{2}{m}$. Если $r < \frac{1}{m}$, то следующие m членов последовательности будут равны $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{m}$, $x_{k+2} = x_k + \frac{2}{m}, \ldots, x_{k+m-1} = x_k + \frac{m-1}{m} = m + r + \frac{m-1}{m} < m+1$, $x_{k+m} = x_k + 1$. Как видно, x_{k+m} – очередной особый член, по сравнению с предыдущим его дробная часть не изменилась, а целая часть увеличилась на 1. Продолжая в том же духе, мы придем, наконец, к особому члену x_l, целая часть которого $p = [x_l]$ и дробная часть $s = \{x_l\}$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} \leq s < \frac{1}{p+1}$. Тогда следующие члены последовательности будут равны $x_{l+1} = x_l + \frac{1}{p}$, $x_{l+2} = x_l + \frac{2}{p}$, … …, $x_{l+p-2} = x_l + \frac{p-2}{p} = p + s + \frac{p-2}{p} < p + \frac{2}{p} + \frac{p-2}{p}p = p+1$, $x_{l+p-1} = x_l + \frac{p-1}{p} = (p-1) + \left(s - \frac{1}{p}\right)$. Новый особый член x_{l+p-1} имеет дробную часть $s - \frac{1}{p}$. Докажем, что числитель у нее меньше, чем у s. Действительно, если $s = \frac{a}{b}$, то $s - \frac{1}{p} = \frac{ap-b}{pb}$, и, поскольку $\frac{a}{b} < \frac{1}{p-1}$, выполняется неравенство $ap - a < b \Leftrightarrow ap - b < a$.

Итак, для каждого особого члена последовательности, дробная часть которого имеет ненулевой числитель, мы нашли особый член с меньшим числителем дробной части. Так как числитель – натуральное число, которое не может уменьшаться бесконечно много раз, в последовательности встретится член, дробная часть которого равна 0, что и требовалось доказать.

А.Голованов

Ф2073. *Тело движется вдоль координатной оси X, его скорость v пропорциональна корню квадратному из координаты x. В точке с координатой $x_1 = 100$ м скорость тела составляет $v_1 = 10$ м/с. Найдите ускорения в точках с координатами $x_2 = 20$ м и $x_3 = 300$ м.*

Запишем связь между координатой и скоростью тела в виде $v = k\sqrt{x}$, или $v^2 = k^2 x$. Возьмем производную по времени:

$$2vv' = k^2 x' = k^2 v.$$

Отсюда найдем ускорение тела:

$$a = v' = \frac{k^2}{2} = \text{const}.$$

Таким образом, движение тела оказывается равноускоренным. Учтем данные в условии: при $x_1 = 100$ м $v_1 = 10$ м/с, т.е. $k = 1$. Тогда для ускорения тела во всех точках получим

$$a = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

А.Простов

Ф2074. *На наклонной плоскости с углом α при основании удерживают клин массой M (рис.1). Угол при основании клина также равен α, а расположен клин «вверх ногами», так что его верхняя поверхность параллельна плоскости земли. На этой поверхности находится очень легкая тележка с четырьмя массивными колесами – масса каждого колеса m. Трение между поверхностью клина и колесами достаточно велико, поэтому колеса не проскальзывают. Клин отпускают. Найдите его ускорение при движении (пока тележка еще находится на клине). Масса каждого колеса сосредоточена в его ободе.*

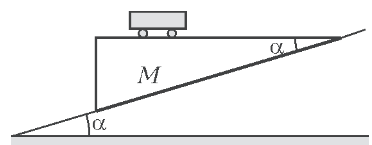


Рис. 1

Обозначим ускорение клина – ясно, что оно направлено вдоль наклонной плоскости – буквой a, тогда горизонтальная составляющая этого ускорения равна $a\cos\alpha$, а вертикальная составляет $a\sin\alpha$. При движении тележки без проскальзывания ее вертикальное ускорение такое же, как у клина, а ускорение нижней точки каждого из колес равно горизонтальному ускорению клина. При этом ускорение оси каждого колеса по горизонтали ровно вдвое меньше, чем ускорение нижней точки (это правильно только для случая, когда масса колеса распределена по его ободу и поэтому момент инерции колеса составляет mR^2, где R – радиус колеса). Напомним, что сила трения F в нашем случае вовсе не равна μN!

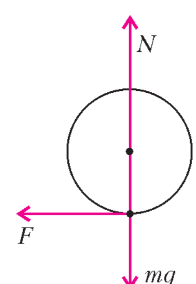


Рис. 2

Запишем уравнения динамики для тележки (рис.2) – по горизонтали и вертикали (напомним, что у тележки 4 колеса):

$$4F = 4m \cdot \frac{1}{2}(a\cos\alpha),$$

$$4mg - 4N = 4m(a\sin\alpha)$$

и для клина (рис.3) – в проекции на направление вдоль наклонной плоскости:

$$(Mg + 4N)\sin\alpha - 4F\cos\alpha = Ma.$$

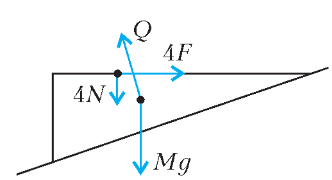


Рис. 3

Решая эти уравнения, найдем искомое ускорение клина:

$$a = g\frac{(M+4m)\sin\alpha}{M + 2m + 2m\sin^2\alpha}.$$

Т.Ележкин

Ф2075. *В компьютерной модели рассматривается кубический сосуд объемом 1 м^3, заполненный «газом»*

– в сосуде находятся 1000 частиц диаметром 1 мм каждая и 2 частицы диаметром 1 см. В начальный момент маленькие частицы неподвижны, большие имеют скорости по 100 м/с. Оцените число ударов больших частиц о стенки сосуда за большое время – за 10 лет. Оцените также число столкновений больших частиц с маленькими за то же время. Считайте, что частицы «сделаны» из одного и того же материала. Внешние силы в модели не предусмотрены, удары считаются упругими.

Обозначим массу малой частицы через m, тогда масса большой частицы в 1000 раз больше, т.е. 1000 m. Пусть $v_1 = \sqrt{\overline{v_1^2}}$ – среднеквадратичное значение скорости малой частицы, тогда среднеквадратичная скорость большой частицы $v_2 = \sqrt{\overline{v_2^2}} \approx \dfrac{v_1}{\sqrt{1000}}$. Будем считать, что энергия поровну распределена между всеми частицами. Таким образом, $v_1 \approx 140$ м/с, $v_2 \approx 3$ м/с. Оценим длину свободного пробега большой частицы:

$$\lambda \approx \frac{V}{\pi D^2 N} \approx \frac{1\ \text{м}^3}{3{,}14 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 \cdot 10^3} \approx 3\ \text{м}.$$

При расчете числа ударов больших частиц о стенки сосуда не будем учитывать соударения частиц друг с другом:

$$N_1 \approx \frac{\frac{v_2}{\sqrt{3}}\tau}{2\sqrt[3]{V}} \cdot 6 \cdot 2 \approx$$

$$\approx \frac{1{,}7\ \text{м/с} \cdot 10 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{с}}{2 \cdot 1\ \text{м}} \cdot 12 \approx 3 \cdot 10^9.$$

Большие частицы летают во много раз медленнее малых, поэтому число соударений больших частиц с малыми можно рассчитывать, как удары малых частиц о стенки:

$$N_2 = \frac{\frac{v_1}{\sqrt{3}}\tau}{2\sqrt[3]{V}} \cdot \frac{2 \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{S_{\text{стенки}}} \cdot N \approx$$

$$\approx \frac{\frac{140}{\sqrt{3}}\ \text{м/с} \cdot 10 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{с}}{2 \cdot 1\ \text{м}} \times$$

$$\times \frac{3{,}14 \cdot (0{,}01)^2\ \text{м}^2}{2 \cdot 1\ \text{м}^2} \cdot 1000 \approx 2 \cdot 10^9.$$

А.Старов

Ф2076. *В схеме неуравновешенного «мостика» (рис.1) два резистора имеют сопротивления по 10 Ом, два – по 30 Ом. В диагональ мостика включен амперметр, имеющий пренебрежимо малое сопротивление. Батарейка напряжением 3 В подключена к другой диагонали мостика. Вместо одного из резисторов подключают еще одну такую же батарейку. Найдите максимальное и минимальное возможные значения тока через амперметр в получившейся схеме.*

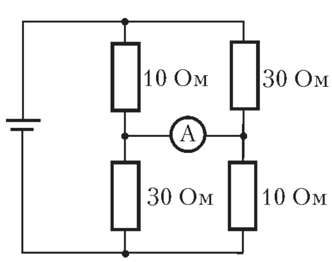


Рис. 1

Тут важно не пропустить возможных вариантов подключения батарейки. В силу явной симметрии схемы, достаточно рассмотреть подключение батарейки вместо резистора сопротивлением 10 Ом (любого из двух) и вместо резистора сопротивлением 30 Ом (тоже любого из двух), но в каждом из этих случаев нужно предусмотреть подключение в двух возможных полярностях (рис.2). В схеме 1 токи через верхние резисторы

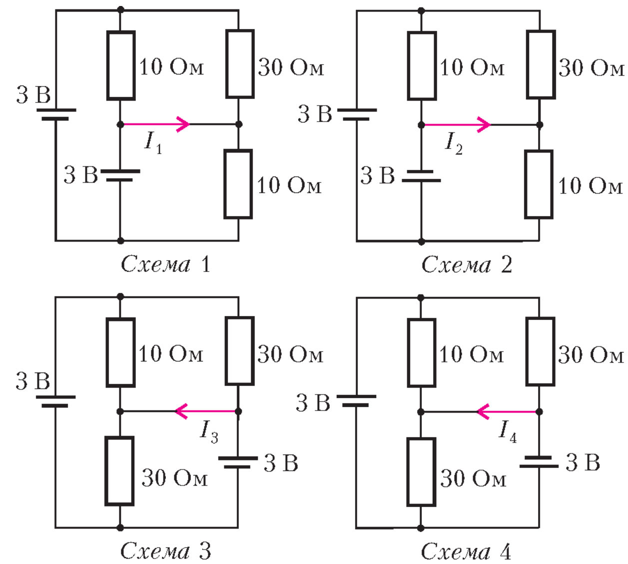


Рис. 2

отсутствуют, тогда через амперметр течет ток $I_1 = 0{,}3$ А. То же – для схемы 3: $I_3 = 0{,}1$ А. Для схем 2 и 4 напряжения, приложенные к верхним резисторам, равны 6 В. Для схемы 2 сразу можно найти ток через амперметр (рис.3):

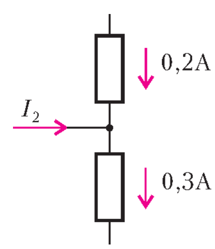


Рис. 3

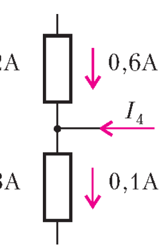


Рис. 4

$$I_2 + 0{,}2\ \text{А} = 0{,}3\ \text{А},\ \text{и}\ I_2 = 0{,}1\ \text{А}.$$

Для схемы 4 (рис.4):

$$0{,}6\ \text{А} + I_4 = 0{,}1\ \text{А},\ \text{и}\ I_4 = -0{,}5\ \text{А}.$$

Видно, что ток течет в противоположную сторону! Итак, наименьшее значение тока через амперметр равно 0,1 А, а наибольшее значение составляет 0,5 А. Заметим, что в схемах на рисунках 2–4 всюду вместо идеального амперметра нарисован кусок провода – для упрощения внешнего вида схем.

З.Рафаилов

Ф2077. *На тороидальный сердечник, сделанный из сплава с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны три одинаковые катушки индуктивностью L = 1 Гн каждая (рис.1). К выводам одной из катушек подключен резистор сопротивлением R = = 100 Ом, две другие катушки соединены последова-*

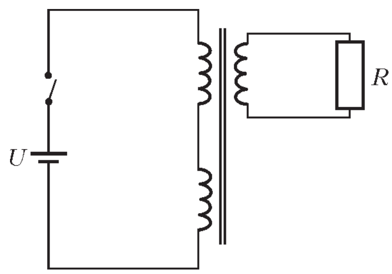


Рис. 1

тельно (начало одной – к концу другой). К свободным выводам получившейся «двойной» катушки подключают батарейку напряжением U = 3 В. Через время $\tau = 0,5$ с батарейку отключают. Какой ток течет через батарейку через время $0,5\tau$ после включения? Какое количество теплоты выделится в резисторе за время τ после включения и после отключения батарейки?

Сразу после включения батарейки токи через катушки будут изменяться так, что сумма ЭДС индукции первичных обмоток будет в любой момент равна напряжению батарейки U. Обмотки одинаковые, значит, ЭДС индукции вторичной обмотки равна $U/2$, и через резистор будет течь неизменный ток

$$I_2 = \frac{U/2}{R} = \frac{U}{2R} = 0{,}015 \text{ А}$$

все время, пока подключена батарейка. Магнитный поток через обмотки не может изменяться мгновенно, скачком, а ток через вторичную обмотку должен возникнуть сразу после подключения батарейки. Это значит, что ток через первичные обмотки тоже возникнет мгновенно. Величина этого тока будет равна

$$I_1 = \frac{1}{2} I_2$$

(не должен мгновенно измениться *суммарный* магнитный поток, создаваемый токами всех обмоток). Ток вторичной обмотки не меняется, при расчете ЭДС индукции его можно не учитывать:

$$2L\frac{\Delta I_{\text{бат}}}{\Delta t} = U,$$

откуда

$$I_{\text{бат}} = -\frac{1}{2} I_2 + \frac{U}{2L} t.$$

Для момента $t = \tau/2$ (рис.2) ток, текущий через батарейку, равен

$$I_1^* = -\frac{1}{2}\frac{U}{2R} + \frac{U\tau/2}{2L} = 0{,}3675 \text{ А}.$$

Рассчитаем теперь количество теплоты, выделяющееся в резисторе за время $\tau = 0,5$ с после включения батарейки:

$Q_1 =$

$= I_2^2 R\tau = 0{,}01125$ Дж.

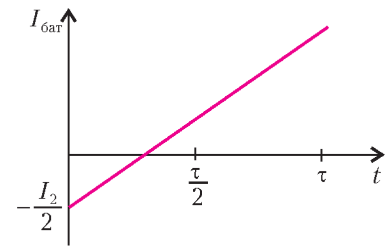


Рис. 2

После отключения батарейки ток вторичной обмотки увеличивается скачком (магнитный поток через нее мгновенно измениться не может):

$$I_2^* = I_2 + 2\frac{U\tau}{2L} = 1{,}515 \text{ А}.$$

За время $\tau = 0{,}5 \text{ с} \geq \frac{L}{R} = 0{,}01$ с после отключения батарейки практически вся энергия катушки перейдет в тепло:

$$Q_2 = \frac{LI_2^{*2}}{2} \approx 1{,}15 \text{ Дж}.$$

А.Зильберман

Две знаменитые формулы

(Начало см. на с. 11)

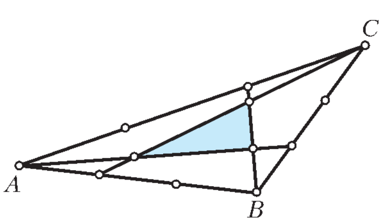


Рис. 16

15. Каждая сторона треугольника ABC разделена на три равные части и одна из точек деления соединена с вершиной так, как это показано на рисунке 16. Сравните площадь выделенного треугольника с площадью треугольника ABC.

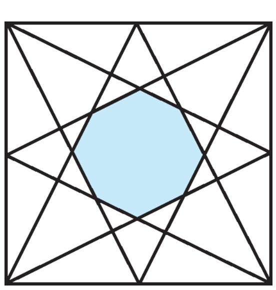


Рис. 17

16. Середины сторон квадрата соединены отрезками так, как это показано на рисунке 17. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.

17. Пусть

$$f(P) = aN_i(P) + bN_e(P) + c,$$

где a, b, c – некоторые числа. Пусть эта функция, заданная на всех простых многоугольниках, расположенных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$, такова, что $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, если P разбит некоторой ломаной с вершинами в узлах решетки на два простых многоугольника P_1 и P_2. Докажите, что $b = a/2$ и $c = -a$.

18. Докажите, что для любого простого многоугольника P на решетке $\mathbb{Z}^2$ имеет место равенство

$$2[P] = N(2P) - 2N(P) + 1,$$

где $N(P)$ обозначает полное число узлов решетки, расположенных как внутри, так и на границе многоугольника P, а $2P$ – многоугольник, полученный из P растяжением в два раза относительно начала координат.

19. Укажите на плоскости 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и такие, что расстояние между любыми двумя точками выражается иррациональным числом, а площадь любого треугольника, с вершинами в этих точках, выражается рациональным числом.