да длиной $l = 2$ м, обладающего сопротивлением $R = 4$ Ом, спаян квадрат. В стороны квадрата включены источники с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 8$ В согласно схеме, приведенной на рисунке 8. Цепь помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости квадрата, направленное за чертеж и возрастающее во времени по закону $B = kt$, где $k = 16$ Тл/с. Найдите силу тока в цепи. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

3 (МГУ, мехмат, 1988). Из куска однородной проволоки длиной l и сопротивлением R спаяна фигура в виде кольца с хордой, равной диаметру кольца. Кольцо помещают в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости кольца, а модуль этого вектора меняется со временем по закону $B = kt$. Найдите выделяемую в проволоке мощность.

4 (МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 1996). В магнитном поле с индукцией, равной $B = 1$ Тл и направленной вертикально вниз, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длиной $l = 0{,}4$ м со скоростью $v = 5$ м/с (рис. 9). Концы рельсов присоединены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом. Какое количество теплоты выделится в стержне за время $t = 10$ с, если его сопротивление $R = 10$ Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.

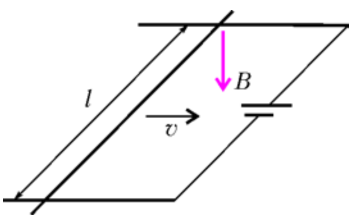

Рис. 9

5 (РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина). По П-образной рамке, наклоненной под углом 30° к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 2 мОм, индукция поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

6 (МИЭТ). Энергия магнитного поля катушки электромагнита с индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн равна $W = 5$ Дж. Определите величину ЭДС самоиндукции, возникающей к катушке при равномерном уменьшении силы тока за время $t = 0{,}1$ с.

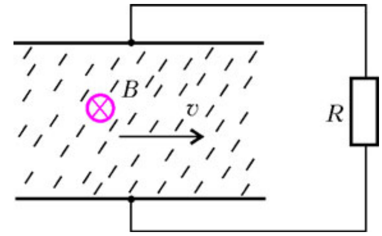

Рис. 10

7 (МФТИ, 1996). В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ, движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам (рис.10). Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией, равной B, направленной вдоль пластин и перпендикулярной скорости жидкости. Найдите полезную мощность, выделяющуюся в виде тепла на внешней нагрузке сопротивлением R.

8 (МФТИ, 2002). Металлический стержень AC одним концом (точка A) шарнирно закреплен на вертикальном диэлектрическом стержне AO (рис.11). Другой конец (точка C) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити OC длиной $l = 1$ м. Стержень AC вращается вокруг стрежня AO в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна $B = 10^{-2}$ Тл. Угловая скорость вращения стержня $\omega = 60\ \text{с}^{-1}$. Определите разность потенциалов (по модулю) между точками A и C.

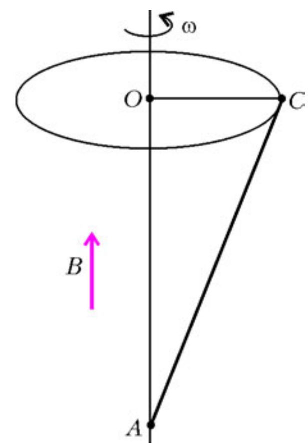

Рис. 11

Функциональные уравнения и неравенства

Г.ФАЛИН, А.ФАЛИН

Введение

В последние годы на вступительных экзаменах по математике в МГУ им. М.В.Ломоносова регулярно предлагаются задачи на решение уравнений, неравенств и систем, неизвестными в которых являются не числа, а функции. Задачи эти необычны как по внешней форме, так и по методам решения. Поэтому в настоящей статье мы решили на примерах реальных экзаменационных задач показать основные виды таких уравнений и основные методы их решения.

Некоторые задачи вступительных экзаменов формально не предполагают решения функциональных уравнений, но «простые» решения, которые публикуются после экзаменов в «официальных» сборниках, часто выглядят искусственно, в то время как более общий взгляд на задачу и использование относительно несложных понятий и методов теории функциональных уравнений позволяют дать очень естественное решение, показать взаимосвязь различных задач, повысить математическую культуру абитуриента.

Задачи на решение функциональных уравнений и неравенств полезно разобрать и при изучении общих свойств функций в классах с углубленным изучением математики.

Параметризуемые уравнения

Самыми простыми являются функциональные уравнения, в которых неизвестная функция однозначно описывается одним или несколькими числовыми параметрами (простейший и наиболее распространенный пример функции такого рода – это многочлен). В этом случае задача нахождения функции сводится к определению значений этих числовых параметров, т.е. к обычной школьной задаче (как правило, на решение систем уравнений). Рассмотрим в качестве примера следующую задачу, которая предлагалась в 2001 году на устном экзамене по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК).

Задача 1 (ВМК, устный экзамен, 2001). *Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая при всех x*

соотношению

$$2f(x+2)+f(4-x)=2x+7\ ? \qquad (1)$$

По определению, линейная функция – это функция, которая представима в виде $f(x)=kx+b$. Числовые параметры k и b однозначно характеризуют линейную функцию, так как равенство $k_1x+b_1=k_2x+b_2$ при всех значениях переменной x равносильно равенствам $k_1=k_2$, $b_1=b_2$. Этот факт является частным случаем следующего важного утверждения, которое мы будем неоднократно использовать:

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной (в частности, совпадают и степени многочленов).

Поэтому нашу задачу можно переформулировать следующим образом:

Существуют ли числа k и b такие, что при всех x верно равенство

$$2\left(k(x+2)+b\right)+\left(k(4-x)+b\right)=2x+7\ ? \qquad (2)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы приведем уравнение (2) к виду

$$kx+8k+3b=2x+7 \text{ при всех } x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, преобразуем задачу:

Существуют ли числа k и b такие, что верны равенства

$$\begin{cases} k=2, \\ 8k+3b=7\ ? \end{cases} \qquad (3)$$

В этом виде задача просто сводится к вопросу о совместности системы (3). Легко видеть, что эта система имеет и притом единственное решение $k=2$, $b=-3$. Итак, существует и притом единственная линейная функция $f(x)=2x-3$, удовлетворяющая исходному функциональному уравнению.

Хотя все проделанные преобразования равносильны и проверка не нужна, мы рекомендуем читателю непосредственной проверкой убедиться, что найденная функция действительно удовлетворяет уравнению (1). Это замечание относится и к последующим задачам.

Как и для обычных уравнений, когда неизвестная величина является числом, возможны случаи, когда функциональное уравнение вообще не имеет решений или имеет бесконечное множество решений. Проиллюстрируем эти ситуации на двух примерах.

Задача 2 (ВМК, устный экзамен, 1997/2001/2005). *Существует ли линейная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению*

$$f(x+3)-f(2-x)=3x+1\ ? \qquad (4)$$

Как и при решении задачи 1, исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

Существуют ли числа k и b такие, что верны равенства

$$\begin{cases} 2k=3, \\ k=1\ ? \end{cases}$$

Эта система, очевидно, несовместна. Соответственно, исходное функциональное уравнение не имеет решений в классе линейных функций.

Задача 3 (ВМК, устный экзамен, 1997). *Найдите квадратичную функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую при всех x уравнению*

$$f(1-x)-f(2-x)=-2x+7\ . \qquad (5)$$

По определению, квадратичная функция – это функция, которая представима в виде $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

Поэтому нашу задачу можно переформулировать следующим образом:

Найдите числа $a\neq 0$, b и c такие, что при всех x верно равенство

$$\left(a(1-x)^2+b(1-x)+c\right)-\left(a(2-x)^2+b(2-x)+c\right)=-2x+7$$

$$\Updownarrow$$

$$2ax-(3a+b)=-2x+7.$$

Поскольку два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной, задача примет такой вид:

Найдите числа $a\neq 0$, b и c такие, что верны равенства

$$\begin{cases} 2a=-2, \\ -3a-b=7. \end{cases} \qquad (6)$$

Иначе говоря, нужно решить систему (6).

Если эту систему рассматривать как систему с двумя неизвестными a и b, то она имеет единственное решение $a=-1$, $b=-4$. Однако эта система неявно включает еще одну неизвестную – c. Поскольку никаких ограничений на c не накладывается, эта неизвестная может принимать произвольное действительное значение. Таким образом, система (6) имеет бесконечно много решений вида $(a;b;c)=(-1;-4;c)$, где $c\in\boldsymbol{R}$ – произвольно. Соответственно, исходное функциональное уравнение имеет бесконечно много решений в классе квадратичных функций. Все эти решения могут быть описаны равенством $f(x)=-x^2-4x+c$, где c – произвольная константа.

В следующей задаче также требуется решить функциональное уравнение в определенном классе функций (многочленов степени n), но само уравнение гораздо сложнее тех, которые обсуждались раньше.

Задача 4 (ВМК, устный экзамен, 2002/олимпиада Румынии, 1980). *Найдите все многочлены*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

степени n, т.е. с коэффициентом $a_n\neq 0$, удовлетворяющие тождеству

$$P\left(x^2\right)\equiv\left(P(x)\right)^2, \quad x\in(-\infty;+\infty). \qquad (7)$$

Чтобы решить эту задачу, представим $P(x)$ в виде $Q(x)+a_nx^n$, где

$$Q(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\ .$$

Степень многочлена $Q(x)$ нам не известна, так как нельзя исключить, что некоторые (или даже все) из его коэффициентов равны 0. Но совершенно точно можно утверждать, что степень многочлена $Q(x)$ не превосходит $n-1$. Обозначим эту степень через k; при этом предположим, что хотя бы один из коэффициентов многочлена $Q(x)$ не равен 0. Тогда тождество (7) примет вид

$$Q\left(x^2\right)+a_nx^{2n}=\left(Q(x)\right)^2+2a_nx^nQ(x)+a_n^2x^{2n}\ ,$$

$$x\in(-\infty;+\infty). \qquad (8)$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной (в частности, совпадают и степени многочленов). Степень многочлена $Q\left(x^2\right)$ равна $2k$, степень многочлена $\left(Q(x)\right)^2$ равна $2k$, степень многочлена $2a_nx^nQ(x)$ равна $n+k$. Следовательно, членами степени $2n$ в уравнении (8) будут только a_nx^{2n} (в левой части) и $a_n^2x^{2n}$ (в правой части), и поэтому $a_n=a_n^2$. Поскольку $a_n\neq 0$, отсюда следует, что

$a_n = 1$. Это позволяет представить тождество (8) так:

$$Q\left(x^2\right) = \left(Q(x)\right)^2 + 2x^n Q(x),\ \ x \in (-\infty;\ +\infty).$$

Как мы уже отмечали, степень многочлена $Q\left(x^2\right)$ равна $2k$, степень многочлена $\left(Q(x)\right)^2$ равна $2k$, степень многочлена $2a_n x^n Q(x)$ равна $n + k$. Поскольку $k < n$, степень многочлена в правой части больше степени многочлена в левой части и равенство невозможно.

Но эти рассуждения базировались на предположении, что хотя бы один из коэффициентов многочлена $Q(x)$ не равен 0. Если же все коэффициенты многочлена $Q(x)$ равны 0, то $Q(x) \equiv 0$. Тогда тождество (8) примет вид

$$a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n},\ \ x \in (-\infty;\ +\infty),$$

что равносильно равенству $a_n = 1$.

Итак, единственное решение функционального уравнения (7) в классе многочленов степени n – это $P(x) = x^n$.

Общие функциональные уравнения

По поводу задачи 1, решенной в предыдущем разделе, возникает естественный вопрос, существуют ли другие функции $f(x)$ (не обязательно линейные), удовлетворяющие исходному функциональному уравнению (1) в общем виде. Для ответа на этот вопрос решим функциональное уравнение (1) в общем виде.

Для этого прежде всего заменим x на $x - 2$ (с тем, чтобы в уравнении фигурировало выражение $f(x)$). Тогда уравнение (1) примет вид

$$2f(x) + f(6 - x) = 2x + 3 \ \text{ при всех } x. \qquad (9)$$

Это равенство можно рассматривать как обычное уравнение относительно двух неизвестных $A = f(x)$ и $B = f(6 - x)$, переменная x в этом случае будет играть роль параметра:

$$2A + B = 2x + 3.$$

Поскольку у нас две неизвестные величины, хотелось бы получить еще одно уравнение относительно A и B. С этой целью заменим в равенстве (9) x на $6 - x$ (ведь оно верно при всех значениях x, поэтому вместо x можно ставить любое число или выражение):

$$2f(6 - x) + f(x) = -2x + 15 \ \text{ при всех } x.$$

В терминах переменных $A = f(x)$ и $B = f(6 - x)$ это равенство означает, что

$$2B + A = -2x + 15.$$

Итак, справедлива система

$$\begin{cases} 2A + B = 2x + 3, \\ 2B + A = -2x + 15. \end{cases}$$

Исключая из этих равенств $B = f(6 - x)$, получим

$$A \equiv f(x) = 2x - 3.$$

Изложенный метод решения функционального уравнения (9) имеет более глубокие корни – он связан с тем, что набор из двух функций $\varphi_0(x) = x$, $\varphi_1(x) = 6 - x$ замкнут относительно операции композиции функций, т.е. композиция любых двух функций из этого набора дает функцию из этого набора. Действительно, нетрудно проверить, что

$$\varphi_0\left(\varphi_0(x)\right) = \varphi_0(x),$$

$$\varphi_0\left(\varphi_1(x)\right) = \varphi_1(x),$$

$$\varphi_1\left(\varphi_0(x)\right) = \varphi_1(x),$$

$$\varphi_1\left(\varphi_1(x)\right) = \varphi_0(x).$$

Используя язык современной алгебры, можно сказать, что функции $\varphi_0(x) = x$ и $\varphi_1(x) = 6 - x$ образуют *группу*. Понятие группы является одним из важнейших в современной математике и широко используется в самых разнообразных приложениях.

Аналогичные рассуждения показывают, что уравнение (4) вообще не имеет решений в классе функций, определенных на всей числовой прямой. Более того, эти рассуждения можно модифицировать, чтобы получить более сильный результат:

Ни одна функция $f(x)$ не может удовлетворять уравнению (4) одновременно для двух различных чисел x_1 и x_2, симметричных относительно точки $-\frac{1}{2}$.

Действительно, это утверждение означает несовместность системы

$$\begin{cases} f(x_1 + 3) - f(2 - x_1) = 3x_1 + 1, \\ f(x_2 + 3) - f(2 - x_2) = 3x_2 + 1. \end{cases}$$

Поскольку симметричность x_1 и x_2 относительно точки $-\frac{1}{2}$ означает, что $x_1 + x_2 = -1$, эта система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} f(x_1 + 3) - f(2 - x_1) = 3x_1 + 1, \\ f(2 - x_1) - f(x_1 + 3) = -3x_1 - 2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, мы получим, что $0 = -1$.

Более сложной и интересной является задача решения уравнения (5) без условия, что $f(x)$ – квадратичная функция. Ее решение использует новые идеи, полезные при решении и других функциональных уравнений, и поэтому мы подробно изложим его. Как и при решении функционального уравнения (1) в общем виде, прежде всего заменим $1 - x$ на x (с тем чтобы в уравнении фигурировало выражение $f(x)$). Тогда уравнение (5) примет вид

$$f(x) - f(x + 1) = 2x + 5 \ \text{ при всех } \ x \in \boldsymbol{R}. \qquad (10)$$

Функциональное уравнение (10) является неоднородным («лишним» является член $2x + 5$ в правой части). В соответствии с общей идеологией решения уравнений превратим его в однородное. Для этого найдем частное решение уравнения. Фактически это уже сделано, так как мы решили уравнение в классе квадратичных функций, так что, например, $f_0(x) = -x^2 - 4x$ является решением.

Теперь введем новую неизвестную функцию $g(x) = f(x) - f_0(x)$ и запишем для нее функциональное уравнение (10):

$$g(x) = g(x + 1) \ \text{ при всех } \ x \in \boldsymbol{R}.$$

Это соотношение совпадает с определением периодической функции, определенной на всей числовой прямой, с периодом $T = 1$. Поэтому ему удовлетворяют все такие функции и только они. Соответственно, общее решение уравнения (5) дается формулой $f(x) = -x^2 - 4x + g(x)$, где $g(x)$ – произвольная периодическая функция с периодом $T = 1$, определенная на всей числовой прямой.

Более общий вариант задачи 4 (решить функциональное уравнение (7) без требования, что $P(x)$ – многочлен) вообще не имеет ответа в сколько-нибудь простых терминах: этому уравнению удовлетворяют такие разнородные функции, как $|x|$, $\sqrt[3]{x}$, $y = f(x)$ – знак числа (напомним, что $f(x) = 1, 0$ или -1 в зависимости от того, x больше 0, равен 0 или меньше 0), и много других.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, применяются при решении функциональных уравнений, когда нет никакой информации о виде неизвестной функции. Хотя общая методика рассуждений не меняется, появляются важные специфические особенности. Мы рассмотрим их на примере такой задачи.

Задача 5 (экономический факультет, 2000, июль). *Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\frac{1}{6};6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе*

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 f(x)-\frac{1}{2}}-12\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{10}{x},\\ 0\le f(x)\le\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Решите неравенство $f(x)\le\frac{\pi}{8}$.

Для решения задачи прежде всего немного упростим уравнение системы. Для этого понизим степень выражения $\cos^2 f(x)$ за счет удвоения аргумента:

$$\frac{1}{\cos(2f(x))}-6\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{5}{x},\ x\in\left[\frac{1}{6};6\right].\qquad(11)$$

Если $x\in\left[\frac{1}{6};6\right]$, то $\frac{1}{x}$ также меняется на этом отрезке. Поэтому в уравнении (11) можно заменить x на $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}-6\cos(2f(x))=5x,\ x\in\left[\frac{1}{6};6\right].\qquad(12)$$

Соотношения (11), (12) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя числовыми неизвестными $A=\cos(2f(x))$ и $B=\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, переменная x в этом случае играет роль параметра:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{A}-6B=\dfrac{5}{x},\\ \dfrac{1}{B}-6A=5x.\end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения (с учетом условия $x\in\left[\frac{1}{6};6\right]$ все нижеследующие преобразования равносильны):

$$\begin{cases}B=\dfrac{x-5A}{6Ax},\\ \dfrac{1}{B}-6A=5x\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}B=\dfrac{x-5A}{6Ax},\\ \dfrac{6Ax}{x-5A}-6A=5x\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}B=\dfrac{x-5A}{6Ax},\\ 6A^2-5Ax-x^2=0.\end{cases}$$

Второе уравнение последней системы можно переписать в виде $(A+x)(6A-x)=0$. Следовательно, при каждом фиксированном $x\in\left[\frac{1}{6};6\right]$ переменная $A=A(x)$ может принимать только одно из двух значений: $-x$ или $\frac{x}{6}$. В силу условия $0\le f(x)\le\frac{\pi}{4}$ можно гарантировать, что $A=\cos(2f(x))\ge0$. Поэтому при $x\in\left[\frac{1}{6};6\right]$ выражение $A+$ $+x$ положительно и, следовательно, $A=A(x)=\frac{x}{6}$. Соответствующее значение $B=B(x)$ равно $\frac{1}{6x}$.

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}\cos(2f(x))=\dfrac{x}{6}\ \text{ при всех } x\in\left[\dfrac{1}{6};6\right],\\ 0\le 2f(x)\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

При $x\in\left[\frac{1}{6};6\right]$ величина $\frac{x}{6}$ принимает значения из отрезка $\left[\frac{1}{36};1\right]$, который является подмножеством отрезка $[-1;\ 1]$. Используя определение $\arccos a$, мы получим, что

$$f(x)=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{6}.$$

Теперь исходная задача сводится к решению обычного неравенства с обратной тригонометрической функцией:

$$\arccos\frac{x}{6}\le\frac{\pi}{4}$$

на множестве $\frac{1}{6}\le x\le6$. Это неравенство без труда решается, что дает окончательный ответ задачи: $3\sqrt{2}\le x\le6$.

Разобранная задача интересна еще и потому, что в ней требовалось решить «обычную» задачу (неравенство), в которой фигурирует функция, про которую известно лишь то, что она является решением некоторого функционального уравнения. В относительно простых случаях с помощью изложенных методов можно решить это функциональное уравнение и определить функцию в явном виде. После этого основная задача сводится к обычной задаче на решение уравнения (неравенства, системы).

Следующая задача также относится к этому типу, но решение соответствующего функционального уравнения будет немного сложнее, чем раньше.

Задача 6 (химический факультет, 2000, заочный тур). *Найдите значения x, при которых функция $f(x)$, удовлетворяющая при всех $x\ne0;1$ уравнению*

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x,\qquad(13)$$

имеет экстремумы. Найдите эту функцию.

Как и раньше, будем рассматривать функциональное уравнение (13) как обычное уравнение с двумя числовыми неизвестными $A=f(x)$ и $B=f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, переменная x в этом случае играет роль параметра:

$$A+B=x.$$

Чтобы получить еще одно уравнение, заменим в (13) x на $\frac{1}{1-x}$:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}\Leftrightarrow B+C=\frac{1}{1-x},$$

где $C = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Поскольку наряду с переменными A и B появилась третья величина, C, нужно иметь еще одно уравнение. С этой целью заменим в (13) x на $\frac{x-1}{x}$:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{x-1}{x} \Leftrightarrow C+A=\frac{x-1}{x}.$$

На этом шаге наш процесс замкнулся, и мы имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A+B=x, \\ B+C=\dfrac{1}{1-x}, \\ C+A=\dfrac{x-1}{x}. \end{cases}$$

Она легко решается. Поскольку нас интересует только $A=f(x)$, сложим все три уравнения, разделим сумму на 2 и вычтем из нее второе уравнение:

$$A \equiv f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}, \quad x \neq 0; 1. \qquad (14)$$

Относительно функций x, $\frac{1}{1-x}$ и $\frac{x-1}{x}$ уместен тот же комментарий, который мы дали к решению уравнения (9): эти функции образуют группу третьего порядка относительно операции суперпозиции функций.

Теперь можно заняться поиском точек экстремума функции (14). Ее производная дается формулой

$$f'(x)=\frac{x^4-2x^3+x^2-2x+1}{2x^2(x-1)^2}.$$

Многочлен в числителе является возвратным. Поэтому его можно разложить на множители с помощью новой переменной $t=x+\frac{1}{x}$:

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+1\right)\cdot\left(x^2-\left(1-\sqrt{2}\right)x+1\right)}{2x^2(x-1)^2}.$$

Квадратный трехчлен $x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+1$ имеет два действительных корня $x_1=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \in (0; 1)$ и $x_2=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \in (1; +\infty)$. Дискриминант трехчлена $x^2-\left(1-\sqrt{2}\right)x+1$ отрицателен, так что этот трехчлен положителен при всех x и не влияет на знак производной. Теперь методом интервалов мы можем определить знаки производной и, соответственно, поведение функции $f(x)$:

на промежутке $(-\infty; 0]$ функция возрастает;

на промежутке $[0; x_1]$ функция возрастает;

на промежутке $[x_1; 1]$ функция убывает;

на промежутке $[1; x_2]$ функция убывает;

на промежутке $[x_2; +\infty)$ функция возрастает.

Таким образом, функция $f(x)$ имеет две точки экстремума:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \in (0; 1)$$

(в ней достигается локальный максимум) и

$$x_2=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \in (1; +\infty)$$

(в ней достигается локальный минимум).

Использование более сложных понятий и результатов математического анализа

Задача 7 (мехмат, 2001, олимпиада, 10 класс). *Числовая функция $f(x)$ при каждом действительном x удовлетворяет равенству*

$$x+f(x)=f(f(x)). \qquad (15)$$

Решите уравнение $f(f(x))=0$.

Для решения этой задачи введем понятие *инъективной функции*:

Определение: функция $f(x)$ называется инъективной, если для любых двух чисел x_1, x_2 из ее области определения равенство $f(x_1)=f(x_2)$ влечет, что $x_1=x_2$.

Нетрудно видеть, что если функция строго возрастает (убывает) на всей области определения, то она инъективна. Более того, во многих задачах (например, при решении уравнений), где используется монотонность той или иной функции, часто на самом деле нужна именно инъективность.

Аналогичное определение можно дать для произвольного отображения; в этом случае говорят об *инъективном отображении.*

Наряду с термином *инъективная функция* используются термины *инъекция* и (несколько старомодный) *взаимно однозначное соответствие.*

Соотношение

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

равносильно соотношению

$x_1 \neq x_2$ (x_1, x_2 входят в область определения функции) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Поэтому инъекцию можно было бы определить как отображение, которое «не склеивает» элементы.

Вернемся теперь к нашей задаче и докажем, что функция, о которой идет речь в задаче, является инъекцией. Действительно, если $f(x_1)=f(x_2)$, то, переписывая уравнение для $f(x)$ в виде $x=f(f(x))-f(x)$, мы имеем

$$x_1=f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)=x_2.$$

Займемся теперь уравнением $f(f(x))=0$. Прежде всего выясним, сколько оно может иметь корней. Если x_1, x_2 – корни уравнения $f(f(x))=0$, то $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, а тогда из доказанной инъективности функции $f(x)$ следует, что $f(x_1)=f(x_2)$. Применяя свойство инъективности еще раз, мы получим $x_1=x_2$. Таким образом, уравнение $f(f(x))=0$ не может иметь больше одного корня.

Теперь подставим в исходное функциональное уравнение вместо x число 0. Это даст следующее равенство: $f(0)=f(f(0))$. В силу доказанной инъективности функции $f(x)$ отсюда следует, что $0=f(0)$, а тогда $f(f(0))=f(0)=$ $=0$, т.е. число 0 является корнем уравнения $f(f(x))=0$.

Ответ: $x=0$.

Хотя из текста задачи 7 следует, что существуют функции, удовлетворяющие функциональному уравнению (15), было бы интересно найти хотя бы одну такую функцию. В общем виде решить это уравнение не удается, но, используя методы, описанные выше, можно, например, доказать, что в классе многочленов уравнение (15) имеет ровно два решения: $f_1(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$, $f_2(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$.

Действительно, если $f(x)$ – многочлен степени $n\ge 1$, то в левой части уравнения (15) стоит многочлен степени n, а в правой – степени n^2. Это возможно лишь в случае $n=1$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением линейных функций: $f(x)=kx+b$. Для них уравнение (15) примет вид

$$x+(kx+b)=k(kx+b)+b \text{ при всех } x,$$

или, что то же самое,

$$(k+1)x+b=k^2x+(kb+b) \text{ при всех } x.$$

Это соотношение равносильно системе

$$\begin{cases} k+1=k^2, \\ b=kb+b, \end{cases}$$

которая имеет два решения: $(k;b)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$, $(k;b)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$. Им соответствуют следующие две линейные функции, удовлетворяющие функциональному уравнению (15):

$$f_1(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x,\quad f_2(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x. \tag{16}$$

Этими двумя функциями не исчерпывается множество решений уравнения (15). Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}x, \text{ если } x=a+b\sqrt{5} \\ \text{для некоторых рациональных } a, b, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}x \text{ в противном случае} \end{cases} \tag{17}$$

также удовлетворяет этому уравнению.

Разобранная задача интересна тем, что хотя решить функциональное уравнение и тем самым определить явный вид функции $f(x)$ нельзя, основная задача (решение уравнения $f(f(x))=0$) вполне может быть решена.

На понятии инъективной функции базируется и решение следующей задачи, которая предлагалась в 2005 году на олимпиаде «Покори Воробьевы горы», проводимой МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец».

Задача 8 (МК-МГУ, 2005, I тур). *Существуют ли функции f и g, определенные на всей числовой прямой и при каждом x удовлетворяющие равенствам*

$$f(g(x))=x^2,\quad g(f(x))=x^3? \tag{18}$$

Предположим, что такие функции существуют. Как и при решении задачи 7, прежде всего докажем, что функция $f(x)$ – инъекция.

Допустим, что для некоторых чисел x_1 и x_2 верно равенство $f(x_1)=f(x_2)$. Поскольку любая функция однозначна, отсюда следует, что $g(f(x_1))=g(f(x_2))$. В силу второго из уравнений (18) это означает, что $x_1^3=x_2^3$. Извлекая корень кубический из обеих частей этого равенства, мы получим, что $x_1=x_2$ (на самом деле здесь мы пользуемся инъективностью функции $y=x^3$).

Рассмотрим теперь выражение $f(g(f(x)))$. Поскольку $g(f(x))=x^3$, оно равно $f(x^3)$. С другой стороны, его можно рассматривать как $f(g(t))$, где $t=f(x)$. Поэтому в силу первого из уравнений (18) оно равно $(f(x))^2$. Итак, можно гарантировать справедливость равенства

$$f(x^3)=(f(x))^2 \text{ при всех } x\in\boldsymbol{R}.$$

Заменяя здесь переменную x числами 0, 1, −1, мы получим, что для чисел $a=f(0)$, $b=f(1)$, $c=f(-1)$ справедливы равенства $a=a^2$, $b=b^2$, $c=c^2$. Иначе говоря, эти числа удовлетворяют квадратному уравнению $t^2=t$, т.е. являются его корнями.

Поскольку f – инъекция, числа $a=f(0)$, $b=f(1)$, $c=f(-1)$ различны, т.е. квадратное уравнение $t^2=t$ имеет три корня, чего быть не может. Значит, исходное допущение, что существуют функции f и g, определенные на всей числовой прямой и при каждом x удовлетворяющие равенствам (18), неверно. Следовательно, функции f и g, определенные на всей числовой прямой и при каждом x удовлетворяющие равенствам (18), не существуют.

При решении функциональных уравнений полезны и другие общие понятия и результаты математического анализа, изучаемые в курсе средней школы, например понятия предела и производной.

Задача 9 (мехмат, 2003, заочный тест). *Найдите все функции f(x), определенные на всей числовой прямой, для которых неравенство*

$$f(y)\cdot\cos(x-y)\le f(x) \tag{19}$$

выполнено при любых x и y.

Начнем решение с того, что подставим в (19) вместо y выражение $x-\frac{\pi}{2}$:

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{2}\le f(x)\Leftrightarrow f(x)\ge 0.$$

Теперь подставим в (19) вместо y выражение $x+t$:

$$f(x+t)\cdot\cos t\le f(x).$$

Поскольку $\cos t\ge 1-\frac{t^2}{2}$ (конечно, это надо доказать!), а функция f неотрицательна, тем более верно неравенство

$$f(x+t)\cdot\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\le f(x). \tag{20}$$

Ограничим возможные значения переменной t интервалом $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. Тогда $1-\frac{t^2}{2}>0$, и неравенство (20) можно почленно разделить на $1-\frac{t^2}{2}$:

$$f(x+t)\le\frac{f(x)}{1-\frac{t^2}{2}}. \tag{21}$$

По аналогии с предыдущим шагом, подставим в (20) вместо x выражение $x-t$, а затем вместо t выражение $-t$:

$$f(x)\cdot\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\le f(x+t). \tag{22}$$

Вычитая из обеих частей неравенств (21) и (22) выражение $f(x)$, мы получим, что

$$-\frac{t^2}{2} f(x) \le f(x+t) - f(x) \le f(x) \frac{t^2}{2-t^2}, \quad t \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right).$$

Тем более верно неравенство

$$\left|f(x+t) - f(x)\right| \le f(x) \frac{t^2}{2-t^2}, \quad t \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right).$$

Если дополнительно предположить, что $t \ne 0$, то это неравенство влечет, что

$$\left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| \le f(x) \frac{|t|}{2-t^2}, \quad t \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), t \ne 0. \quad (23)$$

Теперь зафиксируем x и устремим переменную t к нулю. Поскольку предел при $t \to 0$ функции в правой части неравенства (23) равен нулю, в силу теоремы о зажатой переменной можно утверждать, что существует

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

и он равен 0. Но, по определению производной, этот предел – это $f'(x)$. Итак, мы доказали, что производная искомой функции $f(x)$ равна 0 при всех x. Известно, что тогда $f(x)$ является константой, причем, как следует из неравенства $f(x) \ge 0$, доказанного в самом начале нашего решения, эта константа должна быть неотрицательной:

$$f(x) \equiv c, \quad c \ge 0. \quad (24)$$

Для завершения решения необходимо проверить, что функция вида (24) действительно удовлетворяет соотношению (19). Для этого нужно просто умножить неравенство $\cos(x-y) \le 1$ на (неотрицательное) число c.

(Продолжение следует)

ИНФОРМАЦИЯ

Летние физико-математические школы в Поволжье

Вот уже 19 лет Институт прикладной физики (ИПФ) Российской академии наук (РАН) ежегодно – в августе, а с 2001 года и в июне – проводит Летние физико-математические школы (ЛФМШ) для одаренных детей Поволжья. Эти школы являются важной составляющей многоуровневой системы непрерывной подготовки научных кадров (от лицея до аспирантуры), для координации которой в составе ИПФ создан Научно-образовательный центр (НОЦ). В августе дети съезжаются в детский лагерь им. Талалушкина недалеко от Нижнего Новгорода, а в июне – на базу санатория-профилактория ИПФ «Варнавино» на берегу реки Ветлуги.

В этом году ЛФМШ «Варнавино» проводилась с 18 июня по 4 июля. Из числа участников – около 60 человек – было сформировано 2 отряда, один из которых представлял сборную Поволжья (Варнавино–Дзержинск–Автозавод–Саратов), а второй состоял из школьников лицея 40 Нижнего Новгорода. За последние 10 лет этот лицей был неоднократно отмечен: признан «школой года» России, награжден грантами Сороса и президента РФ за работу с одаренными детьми, а его лицеисты завоевали 9 золотых, 3 серебряных и 4 бронзовых медалей на международных олимпиадах и награждались стипендиями президента РФ. Занятия в физических классах лицея проводятся по специальным программам НОЦ, среди педагогов – доктора и кандидаты наук, учителя высшей категории.

Во время летних школ преподаватели получают бесценный опыт использования такой формы учебной работы, как самостоятельные исследовательские работы, которые развивают творческие способности подростка и дают уверенность в собственных силах. Эти работы выполняются за две недели лагерной смены, без использования «домашних заготовок», в группах по 2–3 человека.

Вот некоторые из тем Научно-исследовательского института изучения всего (НИИИВсего) 2006 года: кинематика баскетбольного броска (под каким углом следует бросать мяч, чтобы обеспечить максимальную точность броска); исследование дыхания растений, окружающих лагерь; среднестатистический портрет слушателя ЛФМШ; параметрические колебания (почему и как следует вести себя на качелях, чтобы раскачаться без посторонней помощи); распределение скорости течения в реке Ветлуге; двухракурсная оптическая голография; цифровая голография; исследование и сравнение характеристик полупроводникового лазера и светодиода; исследование скорости реакции в зависимости от состояния человека.

Кроме того, учебные мероприятия в ЛФМШ включают в себя лекции по физике и математике, читаемые как приезжающими лекторами, так и постоянно присутствующими в лагере преподавателями; олимпиады по физике, математике, информатике, астрономии (и даже по филологии!); занятия в компьютерном классе; семинары, проводимые школьниками с целью развития умения выступать перед аудиторией, слушать докладчика, формулировать свои мысли, задавать вопросы, отвечать на них и вести дискуссию.

Перечислим некоторые темы семинаров ЛФМШ 2006 года: российские Нобелевские лауреаты в области физики; Мишель де Нострадам; первая Государственная дума; тайна Тунгусского метеорита; бронза, художественное литье, патина; Битлз и их роль в развитии молодежной музыкальной культуры; Спилберг; квазары; дружба (социальная психология); жиромер; полярные сияния; экологические проблемы, связанные с переработкой нефти; осадные машины Средневековья; математика в экономике; обряд жертвоприношения древних славян; загадки и парадоксы в нашей жизни; криптография; бестселлер всех времен и народов, или кому была выгодна Библия; массаж.

В течение всей смены проводится экономическая игра, суть которой заключается в том, что каждый школьник имеет счет в игровой валюте в банке ЛФМШ. Этот счет можно пополнять и расходовать. При этом все общественно-полезное оплачивается, все общественно-вредное штрафуется.

Хочется пожелать преподавателям ЛФМШ, его директору А.О.Перминову и завучу А.М.Рейману, а также сотрудникам НОЦ ИПФ удачи в их поисках и воспитании талантливых детей. Все вы блестящие учителя, и у вас прекрасные ученики!

К.Богданов