Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2056» или «Ф2063». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2056, М2057, М2059, М2063, М2064 предлагались на IV этапе, а задачи М2060 – М2062, М2065 – на V этапе XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2056 – М2065, Ф2063 – Ф2072

М2056. В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N\text{ единиц}}$. Найдите наименьшее возможное значение N.

Н.Агаханов

М2057. 25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.

С.Волчёнков

М2058. В выпуклом четырехугольнике пять из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.

Н.Агаханов, В.Сендеров

М2059. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.

И.Богданов, В.Сендеров

М2060. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке Q. Прямая l параллельна BC и проходит через A. Прямые A_1C_1 и A_1B_1 пересекают l в точках P и R соответственно. Докажите, что $\angle PQR = \angle B_1QC_1$.

А.Полянский

М2061. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке – от 1 до 10 слева направо, во второй – от 11 до 20 слева направо и т.д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?

А.Бадзян

М2062. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

А.Акопян, И.Богданов

М2063. Назовем многогранник *хорошим*, если его объем (измеренный в $м^3$) численно равен площади его поверхности (измеренной в $м^2$). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?

М.Мурашкин

М2064. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Отрезки CD и BE пересекаются в точке O. Пусть M и N – центры окружностей, вписанных в треугольники ADE и ODE соответственно. Докажите, что середина меньшей дуги DE лежит на прямой MN.

М.Исаев

М2065. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 – рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

А.Голованов

Ф2063. Фигурку из металла взвешивают на очень точных весах, используя золотые гирьки, – измеренная масса составила 47,98 г. Когда воздух под колпаком весов откачали до 0,1 атмосферного давления, получилось практически точно 49 г. Определите по этим данным, из какого металла сделана фигурка.

Н.Простов

Ф2064. Длинная тонкая прозрачная трубка заполнена глицерином, посредине трубки находится маленький воздушный пузырек. Когда трубка вертикальна, пузырек всплывает практически с постоянной скоростью 1 см/с. Сделаем трубку горизонтальной, подождем достаточно долго – пока все успокоится, а пузырек перестанет двигаться. Теперь разгоним трубку вдоль ее оси до скорости 10 см/с и продолжим двигать ее с этой скоростью. Найдите смещение пузырька относительно его начального положения. Считать силу сопротивления пропорциональной скорости пузырька относительно жидкости.

А.Повторов

Ф2065. На гладком горизонтальном столе покоится клин массой M, его наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. Маленькая шайба массой m движется по столу со скоростью v_0 и «въезжает» на наклонную поверхность клина. Считая, что наклонная поверхность имеет плавное короткое сопряжение с горизонталью, найдите время подъема шайбы до верхнего своего положения. Найдите также смещение клина к этому моменту. Трения в системе нет.

Г.Панькевич

Ф2066. Тележки с массами $m = 1$ кг и $M = 2$ кг связаны легким упругим шнуром длиной $L = 0{,}3$ м. Вначале тележки неподвижны, а шнур почти натянут. Легкой тележке ударом сообщают скорость $v_0 = 2$ м/с в направлении вдоль соединяющего их шнура (рис.1). Через какое время произойдет удар тележек друг о друга? Жесткость шнура $k = 20$ Н/м.

Рис. 1

Р.Александров

Ф2067. Цикл тепловой машины, работающей с идеальным газом, состоит из двух изохорических участков и двух изотермических участков с отношением температур $T_1 : T_2 = 3$. Известно, что на участке изохорического нагревания газ получает столько же тепла, сколько и на участке изотермического расширения. Найдите КПД этого цикла.

С.Простов

Ф2068. Простой омметр состоит из последовательно соединенных миллиамперметра с током полного отклонения 1 мА, батарейки напряжением 1,5 В и переменного резистора (рис.2). Регулируя сопротивление этого резистора, мы производим «установку нуля» омметра – при замкнутых выводах омметра стрелку прибора устанавливаем в крайнее правое положение («нуль омметра»). При разомкнутых выводах ток нулевой – это соответствует «бесконечному» измеряемому сопротивлению. Можно ли при помощи этого прибора измерить сопротивления резисторов R_x порядка 1 Ом; 1кОм; 1 МОм? Какое сопротивление покажет этот омметр, если к его выводам подключить полупроводниковый диод, вольт-амперная характеристика которого приведена на рисунке 3?

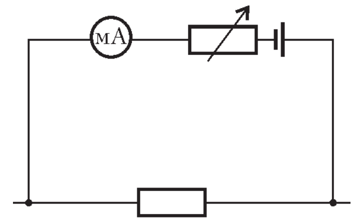


Рис. 2

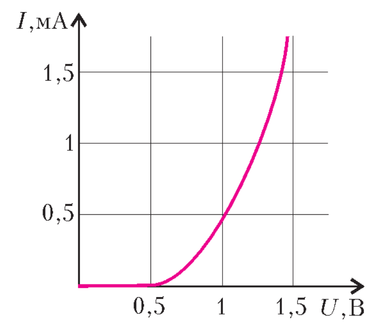


Рис. 3

А.Старов

Ф2069. В схеме на рисунке 4 «горизонтальная» батарейка имеет напряжение 1 В, три из четырех конденсаторов имеют одинаковые емкости, а последний – вдвое большую. Каким может быть напряжение второй, «вертикальной» батарейки, чтобы хотя бы один конденсатор в этой схеме остался незаряженным? До подключения батареек все конденсаторы заряжены не были.

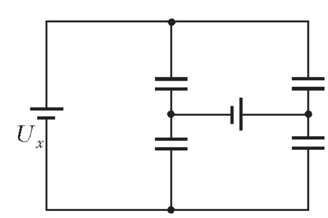


Рис. 4

З.Рафаилов

Ф2070. На одинаковые тороидальные сердечники, сделанные из материала с большой магнитной проницаемостью, намотаны тонким проводом катушки, одна из них содержит вдвое больше витков, чем другая. Катушка с меньшим числом витков имеет индуктивность 0,5 Гн. Катушки соединены параллельно, к выводам катушек присоединены конденсатор емкостью 10 мкФ и батарейка напряжением 6 В с внутренним сопротивлением 10 Ом (рис.5). Когда токи в цепи практически перестали изменяться, батарейку отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора. Какое количество теплоты выделится в каждой катушке после

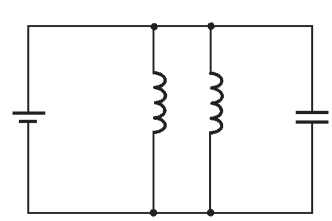


Рис. 5

отключения батарейки? Провод, которым намотаны катушки, имеет очень маленькое сопротивление.

А.Зильберман

Ф2071. На двух одинаковых легких пружинах жесткостью k, прикрепленных к потолку, висят одинаковые грузы массой M. На один из грузов аккуратно ставят грузик массой m, а после того, как колебания прекратятся, быстро переносят грузик на другой груз. Через какое время грузы поравняются? А через какое время скорости грузов впервые будут направлены в одну сторону?

А.Грузов

Ф2072. Корпус светоизлучающего диода отштампован из прозрачной пластмассы (рис.6). На одном его конце сформирована линза, излучающая область представляет кружок диаметром 2 мм. Оцените диаметр светлого пятна на экране, расположенном на оси излучения на расстоянии 20 см от диода. Отражениями света внутри пластмассового корпуса можно пренебречь.

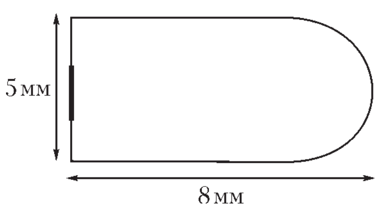


Рис. 6

А.Светов

Решения задач М2036 – М2040, Ф2048 – Ф2057

М2036. *Андрей, Боря и Саша поделили 20 монет так, что не все монеты достались одному из них. После этого каждую минуту один из ребят отдает по одной монете двум другим. Через некоторое время у Андрея, Бори и Саши оказалось a, b и c монет соответственно. Найдите количество возможных троек (a, b, c).*

Ответ: 76.

Пусть в какой-то момент тройка имела вид (x, y, z) (т.е. у Андрея, Бори и Саши было x, y и $z = 20 - x - y$ монет соответственно). Среди чисел x, y, z не более одного нуля, так как после каждой операции хотя бы у двух мальчиков есть монеты. Числа x, y и z не могут давать три различных остатка при делении на 3, иначе сумма $x + y + z$ делилась бы на 3. Значит, среди чисел x, y, z два числа дают равные остатки при делении на 3; пусть для определенности это первые два числа. Будем называть тройки, удовлетворяющие этому условию, *хорошими*. После выполнения операции хорошая тройка (x, y, z) переходит в одну из троек $(x - 2, y + 1, z + 1)$, $(x + 1, y - 2, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z - 2)$, каждая из которых является хорошей. Нетрудно посчитать количество хороших троек (x, y, z): при $x = 3k$ $y = 3l$, $0 < k + l \le 6$, – 27 вариантов, при $x = 3k + 1$ $y = 3l + 1$, $0 \le k + l \le 6$, – 28 вариантов, при $x = 3k + 2$ $y = 3l + 2$, $0 \le k + l \le 5$, – 21 вариант; всего 76 троек. Остается показать, что каждая из 76 хороших троек может быть получена из любой другой.

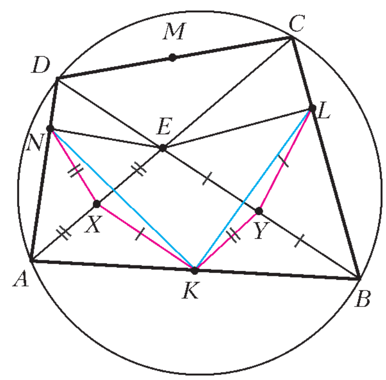
Если $x + y > 2$, то с хорошей тройкой (x, y, z) можно сделать одну из операций $(x, y, z) \to (x - 2, y + 1, z + 1)$ и $(x, y, z) \to (x + 1, y - 2, z + 1)$; при этом сумма $x + y$ уменьшается. Значит, за конечное число операций мы можем прийти к хорошей тройке (x', y', z'), в которой $x' + y' \le 2$, т.е. к тройке (1, 1, 18).

Но от тройки (1, 1, 18) мы можем прийти к произвольной хорошей тройке, так как операция «обратима». Действительно, переход от тройки $(x - 2, y + 1, z + 1)$ к тройке (x, y, z) можно произвести за две операции: $(x - 2, y + 1, z + 1) \to (x - 1, y - 1, z + 2) \to (x, y, z)$, если $y > 0$, или $(x - 2, y + 1, z + 1) \to (x - 1, y + 2, z - 1) \to (x, y, z)$, если $y = 0$.

Итак, из произвольной хорошей тройки мы можем прийти к тройке (1, 1, 18), а из нее – к любой другой хорошей тройке.

П.Кожевников

М2037. *Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E; точки K и M – середины сторон AB и CD; L и N – проекции точки E на стороны BC и AD. Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.*



Пусть X и Y – середины отрезков AE и BE (см. рисунок). Из прямоугольного треугольника AEN имеем $XN = AE/2$, отсюда $XN = YK$. Аналогично, $YL = XK$. Далее,

$$\angle KXN = \angle KXE + \angle EXN = \angle BEC + 2\angle CAD =$$
$$= \angle AED + 2\angle CBD = \angle KYE + \angle EYL = \angle KYL.$$

Получаем равенство треугольников KXN и KYL, откуда $KN = KL$.

Аналогично доказываем, что $MN = ML$.

Треугольники KML и KMN равны по трем сторонам, значит, точки L и N симметричны относительно прямой KM, откуда $KM \perp LN$.

П.Кожевников

М2038. *Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску; начинает Ерема. Точно так же они делят сыр со второй тарелки, только первым начинает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).*

Отметим вначале следующее утверждение для дележа на одной тарелке. Пусть на тарелке $2k$ или $2k - 1$ кусков сыра весом $x_{2k} \ge x_{2k-1} \ge \ldots \ge x_1$ (если кусков $2k - 1$, то полагаем $x_1 = 0$). Если двое делят сыр на ней, беря куски по очереди, то первый может обеспечить себе суммарный вес не менее $x_{2k} + x_{2k-2} + \ldots + x_2$, а второй – не менее $x_{2k-1} + x_{2k-3} + \ldots + x_1$.