

Резонанс против резонанса

В. МАЙЕР

ИЗУЧЕНИЕ РЕЗОНАНСА ВСЕГДА СОПРОВОЖДАЕТСЯ ЯРКИМИ историческими примерами, показывающими, насколько опасно это явление. Почему-то чаще всего вспоминают мосты и марширующих по ним солдат: «Обычно даже небольшой отряд солдат, подходя к мосту, прекращает маршировку и идет не в ногу. Если ритм солдатских шагов совпадает с собственной частотой моста, то возможно даже его разрушение. Такой случай в действительности имел место в 1831 г. в Манчестере, когда 60 человек разрушили Браутонский подвесной мост через реку Ирвель. Аналогичный случай имел место также в 1868 г., когда в Чатаме рухнул мост на опорах при прохождении отряда Британской морской пехоты. Но наиболее трагическая катастрофа произошла в 1850 г., когда Анжерский подвесной мост был разрушен батальоном французской пехоты численностью 500 человек. Разрушенный мост увлек людей за собой в ущелье, и погибло 226 человек» (из книги Р.Бишоп «Колебания»). Кроме того, на уроках физики нередко показывают эффектные демонстрационные опыты по резонансному возбуждению колебаний. Поэтому каждый из вас хорошо знает, что такое резонанс, и твердо помнит, что при совпадении частоты внешней силы с частотой собственных колебаний системы амплитуда вынужденных колебаний возрастает настолько, что это может привести к катастрофическим последствиям. А вот мысль о том, что эффективным средством борьбы с нежелательным резонансом является само явление резонанса, многим представляется неожиданной и в значительной мере парадоксальной.

Попробуем разобраться с теорией и поставить простые опыты по резонансной борьбе с резонансом.

Резонансное демпфирование колебаний. Пусть на пружине жесткостью K подвешено тело 1 массой M , а к нему на пружине жесткостью k подвешено тело 2 меньшей массы m (рис.1). Параллельно пружинам введем координатную ось x , на которой точками O и O' обозначим положения равновесия этих тел. Допустим, что на более массивное тело действует гармоническая вынуждающая сила \vec{f} , проекция

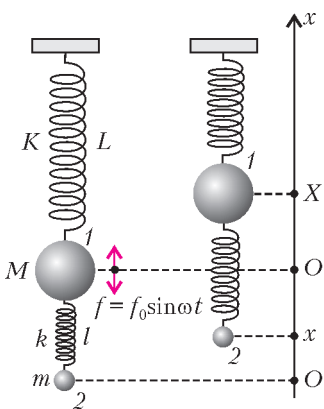


Рис. 1

которой на ось x изменяется по закону $f = f_0 \sin \omega t$. Тогда оба тела совершают вынужденные колебания.

Если в некоторый момент первое тело сместилось из положения равновесия на величину X , то второе тело сместится на величину x так, что длина l пружины между телами изменится на $X - x$. При этом по закону Гука на второе тело со стороны первого действует сила \vec{f}_{21} , проекция которой на ось x равна

$f_{21} = k(X - x)$. На первое тело со стороны верхней пружины действует сила \vec{f}_1 , а со стороны нижней – направленная в ту же сторону сила \vec{f}_{12} , причем проекции этих сил равны $f_1 = -KX$ и $f_{12} = -k(X - x)$ соответственно. В результате второй закон Ньютона для первого и второго тел в проекциях на ось x можно записать следующим образом:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = -KX - k(X - x) + f_0 \sin \omega t,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(X - x).$$

Так как оба тела совершают вынужденные колебания, т.е. колеблются с частотой вынуждающей силы ω , решение этой системы уравнений будем искать в виде

$$X = A \sin \omega t \quad \text{и} \quad x = a \sin \omega t.$$

Подставляя вторые производные этих выражений по времени

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t \quad \text{и} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 a \sin \omega t$$

в уравнения движения, после сокращения на $\sin \omega t$ получаем

$$-M\omega^2 A + KA + k(A - a) - f_0 = 0,$$

$$-m\omega^2 a - k(A - a) = 0.$$

Из второго уравнения следует, что амплитуда колебаний первого тела $A = (1 - m\omega^2/k)a$ обращается в ноль, когда частота ω вынужденных колебаний равна частоте собственных колебаний второго тела, т.е. $\omega = \sqrt{k/m} = \omega_0$. Из первого уравнения получаем, что в случае $A = 0$ амплитуда колебаний второго тела равна $a = -f_0/k$, причем колебания этого тела происходят по гармоническому закону

$$x = -\frac{f_0}{k} \sin \omega t = \frac{f_0}{k} \sin(\omega t + \pi).$$

Таким образом, при $A = 0$, т.е. при $X = A \sin \omega t = 0$, действующая со стороны второго тела на первое сила

$$f_{12} = -k(X - x) = kx = -f_0 \sin \omega t = f_0 \sin(\omega t + \pi)$$

равна по величине и противоположна по фазе вынуждающей силе f , поэтому первое тело вообще не колеблется!

Прибор для экспериментальной проверки теории. Начнем с конструкции прибора. Оказывается, в нем вовсе не обязательно использовать обычные цилиндрические пружины. Гораздо проще построить прибор на основе плоских пружин – пружинящих полосок, работающих на изгиб. Далее, для возбуждения вынужденных колебаний предлагается воспользоваться электродвигателем с дисбалансом, подключенным к регулируемому источнику тока. Это позволит плавно менять скорость вращения вала и, следовательно, частоту вынуждающей силы, создаваемой несбалансированной нагрузкой на валу.

Внешний вид рекомендуемого прибора схематически изображен на рисунке 2. Один из концов упругой полоски 1 зажат в лапке штатива, а на другом конце расположен микроэлектродвигатель 2. На валу двигателя находится шкив 3, который соединен пассиком 4 со шкивом 5. На шкиве 5 на некотором расстоянии от оси вращения закреплен дисбаланс 6. В направляющих полоски с возможностью перемещения расположен пружинный маятник 7, на конце которого закреплен легкий груз 8.

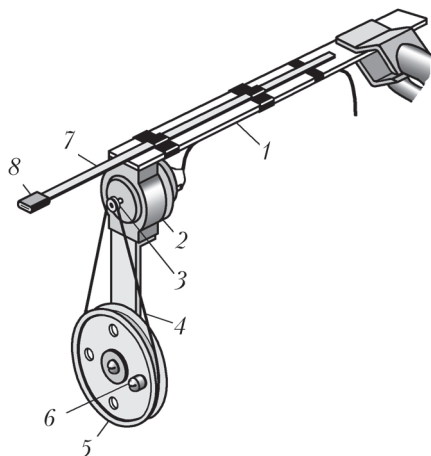


Рис. 2

Упругую полоску размером $4 \times 20 \times 300$ мм лучше всего изготовить из винипласта. Микроэлектродвигатель можно взять любого типа, лишь бы напряжение питания его было 4,5 В или 9 В. К упругой полоске микродвигатель прикрепите жестяным хомутиком или изолянтной. Шкив, расположенный на валу двигателя, должен иметь диаметр порядка 10 мм. Второй шкив диаметром 50 мм закрепите на дюралевой стойке так, чтобы расстояние между осями вращения шкивов составляло примерно 75 мм. На этом шкиве на расстоянии 15 мм от его оси расположите дисбаланс, в качестве которого можно использовать винт подходящей длины с гайкой и контргайкой. Пружинный маятник размером $0,28 \times 5 \times 380$ мм, выполняющий роль резонансного демпфера, нетрудно изготовить из стальной пружины от механического будильника. На конце пружины расплющите отрезок дюралевой трубки так, чтобы получился грузик размером $2 \times 6 \times 6$ мм. Пружину маятника пропустите через две дюралевые направляющие, которые выполнены в форме обжимок и расположены на упругой полоске. Для питания электродвигателя можно использовать имеющийся в любом школьном кабинете физики регулируемый по напряжению источник постоянного тока.

Экспериментальное исследование. Упругую полоску с микроэлектродвигателем закрепите в лапке штатива так, чтобы длина ее рабочей части составляла примерно 210 мм. Длину демпфера сделайте минимальной. Двигатель подключите к регулируемому по напряжению источнику.

Постепенно увеличивайте напряжение питания. Обратите внимание на то, что плохо сбалансированный двигатель начинает заметно колебаться. Продолжая повышать напряжение питания, добейтесь резонанса. При этом амплитуда колебаний двигателя на упругом основании резко возрастает так, что размах колебаний составляет около 40 мм (рис.3,а).

Затем плавно выдвигайте демпфер до длины 150–160 мм.

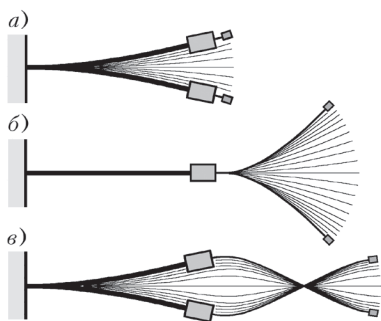


Рис. 3

Вы увидите, что колебания двигателя практически прекращаются, а размах колебаний демпфера достигает 100–120 мм (рис.3,б).

Дальнейшее выдвигание демпфера до длины 210–220 мм приводит к возобновлению колебаний двигателя, причем их размах составляет 20–30 мм, а размах ко-

лебаний демпфера уменьшается примерно до 40 мм (рис.3,в).

Приведенные здесь экспериментальные результаты даны для указанных выше параметров колебательной системы. Сделано это для того, чтобы вам легче было продумать конструкцию собственного прибора и сопоставить получаемые результаты с условиями эксперимента.

Обсуждение результатов. Главным элементом исследуемой колебательной системы является упругая винипластовая полоска. Параметры ее отнюдь не критичны: мы изготовили до десятка приборов, подобных описанному, и хотя в каждом из них использовались разные двигатели и разные упругие элементы, все они прекрасно работали. Поэтому в отсутствие винипласта в качестве пружинного маятника вы можете использовать, например, пластмассовую учебную линейку, если она обладает достаточной гибкостью и упругостью, закрепив ее изолянтной на подставке из деревянных брусков.

Сделав рекомендованный прибор, детально исследуйте наблюдаемые явления. В небольшой статье невозможно дать подробное описание всего интересного. Укажем только, что помимо изгибных колебаний упругой полоски двигатель с дисбалансом легко возбуждает еще и крутильные колебания, которые, кстати, также можно демпфировать. Для этого нужно демпфирующий маятник закрепить с возможностью изменения его длины перпендикулярно упругой полоске возле ее конца. При достижении резонанса крутильных колебаний брусок с двигателем весьма интенсивно прыгает по столу, а при достаточно хорошем демпфировании их — останавливается и стоит как вкопанный.

И последнее. Можно ли *заранее* подобрать легкий маятник так, чтобы он демпфировал колебания массивного? Для ответа на этот вопрос будем рассуждать так.

Пусть на конце закрепленной горизонтально упругой полоски висит груз массой m , при этом максимальный изгиб полоски равен h (рис.4).

Тогда действующая на груз сила тяжести по модулю равна силе упругости, которую в первом приближении можно считать пропорциональной изгибу полоски: $mg = kh$,

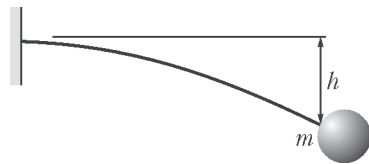


Рис. 4

где k — жесткость плоской пружины. Частота собственных колебаний обсуждаемой системы задается известной формулой $\omega = \sqrt{k/m}$. Подставляя сюда значение жесткости k из предыдущего равенства, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Таким образом, частота собственных колебаний груза, висящего на конце расположенной горизонтально плоской пружины, обратно пропорциональна корню квадратному из величины максимального изгиба пружины.

Теперь понятно, как подобрать требуемый по параметрам демпфер. Для этого нужно измерить, на сколько изгибается широкая плоская пружина под действием силы тяжести электродвигателя. Затем сделать узкую тонкую пружинку произвольной длины — хотя бы из бронзовой или латунной фольги. Наконец, закрепить на конце демпфирующей пружинки такой груз, чтобы она изгибалась ровно настолько, насколько изогнута основная пружина, колебания которой нужно демпфировать.

Красиво, изящно и... неожиданно.