Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

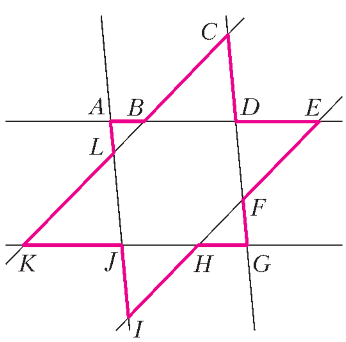
Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Взявшись за руки, 64 танцора водят 4 круговых хоровода с общим центром. В одном хороводе участвуют 16 человек – 8 мальчиков и столько же девочек. Хороводы вращаются равномерно, так что в каждый из 16 одинаковых секторов круга в такт танца попадают 4 танцора – по одному из каждого хоровода. Можно ли распределить мальчиков и девочек таким образом, что в каком бы направлении хороводы ни кружили, в любой такт танца нашелся сектор, содержащий 4 мальчика?

К.Каибханов

7. Может ли сумма квадратов трех последовательных целых чисел быть кубом целого числа?

В.Сендеров



8. Назовем полосой ширины a часть плоскости между двумя параллельными прямыми с расстоянием a между ними. Три полосы одинаковой ширины в пересечении образуют звездчатый шестиугольник $ABCDEFGHIJKL$. Докажите, что в одной точке пересекаются следующие отрезки:

а) AG, CI и EK;
б) AG, BH и FL;
в) CI, BH и DJ;
г) EK, DJ и FL.

И.Акулич

9. Первые 100 натуральных чисел написаны так, что из каждой пары чисел с суммой 101 одно число написано красными чернилами, а другое – синими, при этом сумма всех красных чисел равна сумме всех синих. Весом числа любого цвета назовем количество чисел другого цвета, которые меньше этого числа. Докажите, что сумма квадратов весов красных чисел равна сумме квадратов весов синих чисел.

В.Произволов

10. В каждую клетку квадратной таблицы $n \times n$ записывают некоторое действительное число, при этом сумма всех чисел в любом квадрате 3×3 отрицательная, а в любом квадрате 5×5 – положительная. Существует ли такая таблица для

а) $n = 6$;
б) $n = 7$?

Д.Левин, П.Самовол

Три орешка путешествующего математика

Н.ШИЛОВ

Чем занимаются математики во время научных командировок? Чаще всего они знакомятся с новыми научными результатами и – что еще важнее! – с новыми методами получения новых научных результатов.

Ну, а чем занимаются математики, пока они собираются в командировку, летят в самолетах или едут в поездах? Я, например, придумываю задачи и очень надеюсь, что кому-нибудь будет интересно их решить. Из последней поездки из Новосибирска во Франкфурт я вернулся с тремя новыми «орешками»-задачками. Попробуйте их раскусить!

Во всех задачах мы будем считать, что наша родная планета Земля – шар.

Первый орешек

На плоскости кратчайшее расстояние между двумя точками — это отрезок прямой, соединяющей эти точки, а на сфере (поверхности шара) — это отрезок дуги большого круга, соединяющей эти точки. Однако пассажирские самолеты от пункта вылета до пункта назначения летят не по дуге большого круга, а по некоторой ломаной линии. В первом приближении можно считать, что эта линия состоит из дуг окружностей, соединяющих соседние наземные диспетчерские пункты. Такие пункты находятся в крупных аэропортах. А крупные аэропорты «привязаны» к большим городам. Ну, а большие города расположены на Земле вовсе не в строгом геометрическом порядке.

Предположим, что на идеально круглой Земле диспетчерские пункты расположены очень равномерно. Например, так. Выберем 24 меридиана через 15° друг от друга. Вдоль каждого меридиана поставим диспетчерские пункты через 15° от экватора до каждого из полюсов.

Вопрос 1. Сколько диспетчерских пунктов окажется на Земле? Сколько получится участков, соединяющих соседние диспетчерские пункты вдоль параллелей и меридианов?

Второй орешек

Как только математик справится с этим заданием, он задумается над планами дальнейших путешествий. Пусть в таком идеальном мире пассажирские самолеты летают от пункта вылета до пункта назначения не «напрямик» по дуге большого круга, а только по ломаной линии, состоящей из участков (дуг окружностей), соединяющих два соседних диспетчерских пункта вдоль одной параллели или одного меридиана. Другими словами, самолет может менять направление только над диспетчерскими пунктами.

Вопрос 2. Можно ли облететь всю Землю, т.е. пролететь над всеми диспетчерскими пунктами, так, чтобы пролететь по каждому участку и только один раз? Если такое путешествие осуществимо, то имеет ли значение, откуда его начинать?

Вопрос 3. Можно ли облететь всю Землю так, чтобы пролететь над каждым диспетчерским пунктом и только один раз? Если такое путешествие осуществимо, то имеет ли значение, откуда его начинать?

Третий орешек

Пожалуй, этот орешек самый трудный, но он дает представление о тех проблемах, с которыми имеет дело современная прикладная математика.

Вопрос 4. Пусть заданы два произвольных диспетчерских пункта своими координатами, например пункт А (30° северной широты, 60° восточной долготы) и пункт Б (75° северной широты, 75° западной долготы). Как найти маршрут перелета из первого пункта во второй наименьшей длины, и какой она будет? (Считайте, что радиус Земли равен 6400 км.)

Как расщелкать первый орешек

Вдоль каждого меридиана располагается 13 диспетчерских пунктов: 2 на полюсах и еще 11 на других широтах. Но если просто умножим это число 13 на число меридианов 24, то диспетчерские пункты на полюсах будут посчитаны 24 раза вместо одного. Поэтому надо умножить количество 11 диспетчерских пунктов на других широтах на число меридианов 24 и к результату добавить 2 диспетчерских пункта на полюсах: $11 \times 24 + 2 = 266$ диспетчерских пунктов.

Число участков, соединяющих соседние диспетчерские пункты вдоль параллелей или меридианов, можно подсчитать разными способами. Например, так. Вдоль каждого меридиана располагается 12 участков. Поэтому число участков вдоль всех меридианов равно $12 \times 24 = 288$. Вдоль каждой из параллелей располагается 24 участка. Так как таких параллелей 11, то число участков вдоль параллелей равно $11 \times 24 = 264$. Поэтому общее число участков между соседними диспетчерскими пунктами равно $288 + 264 = 552$.

Но есть и другой способ подсчитать число участков. Назовем *степенью* диспетчерского пункта число участков, которые «начинаются» в этом пункте. Тогда все 264 пункта, кроме двух полярных, имеют степень 4, а два полярных пункта имеют степень 24 каждый. Так как каждый участок между соседними пунктами вносит «вклад» по единице в степень двух пунктов, расположенных по концам участка, то можно заметить, что сумма степеней вообще всех пунктов равна удвоенному числу всех участков. Но сумму степеней всех пунктов найти легко: она равна $4 \times 264 + 24 \times 2 = 1056 + 48 = 1104$. Поэтому число участков равно $1104/2 = 552$, что совпадает с результатом непосредственного подсчета.

Как расщелкать второй орешек

Ответ на вопрос 2. Такое путешествие осуществимо, и начать его можно из любого пункта.

Но сначала разберемся с возможным маршрутом такого путешествия, начинающегося и заканчивающегося на Северном полюсе.

Если начинать путешествие на Северном полюсе, то, можно, например, «спуститься» до Южного полюса по первому меридиану, потом — «подняться» от Южного полюса к Северному полюсу по второму меридиану. Затем повторить эти спуски и подъемы на следующих меридианах вплоть до двадцать второго. Осталось пролететь только те участки, которые расположены вдоль двух последних меридианов, и все участки вдоль параллелей. Это можно сделать так, как схематично показано на рисунке 1. Таким образом на Северном полюсе будет завершен облет Земли, который прошел по всем участкам ровно один раз.

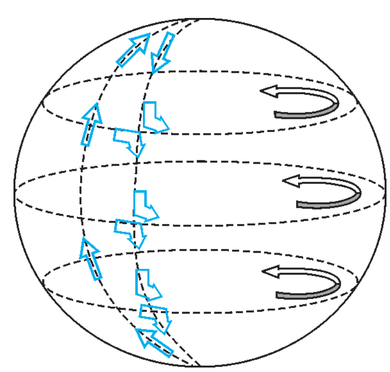


Рис. 1

Описанный маршрут называется *циклом*, так

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 30)

как его начало и конец совпадают. Неважно, из какого пункта маршрута «стартовать», лишь бы после старта двигаться в точности по этому маршруту: в силу цикличности маршрута, пройдешь именно этот маршрут и вернешься в пункт, откуда стартовал.

Ответ на вопрос 3. И такое путешествие осуществимо, и начать его можно тоже из любого пункта.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно составить циклический маршрут такого путешествия, начинающийся и заканчивающийся на Северном полюсе.

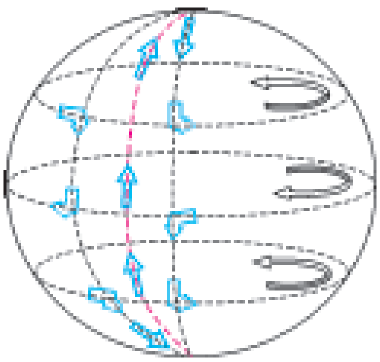


Рис. 2

Прежде чем начинать путешествие с Северного полюса, выберем (зарезервируем) меридиан, по которому вернемся на полюс. Пусть это будет первый меридиан (на рисунке 2 он выделен красным цветом.) С Северного полюса можно «спускаться» до Южного вперемежку по второму и двадцать четвертому меридианам, двигаясь от одного меридиана к другому по очередной параллели так, как это показано на рисунке 2. По достижении Южного полюса осталось вернуться на север по первому меридиану.

Как расщелкать третий орешек

Для любых двух диспетчерских пунктов А и Б существует множество вариантов перелета из одного в другой. Например, на рисунке 3 представлено три варианта перелета из пункта А (30° с.ш., 60° в.д.) в пункт Б (75° с.ш., 75° з.д.):

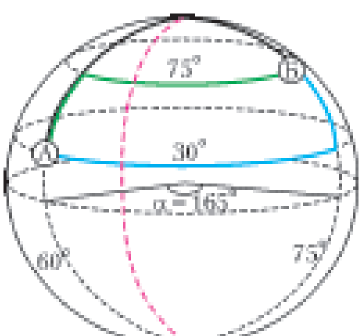


Рис. 3

«синий» – на восток, а затем на север;

«зеленый» – на север, а затем на восток;

«черный» – на север до Северного полюса, а затем на юг.

Пусть L – это длина (в километрах) дуги в 15° большого круга Земли. Если известен радиус Земли, то величину L найти нетрудно: $L = 2\pi \times 6400\,\text{км}/24 \approx$ ≈ 1676 км. Тогда длина дуги в γ градусов любого меридиана равна $L \times (\gamma/15°)$, а длина дуги параллели на широте β градусов с величиной дуги $\alpha = 165°$ равна $L \times (\alpha/15°) \times \cos\beta = 11 \times L \times \cos\beta$. В таком случае:

длина «синего» маршрута равна $11 \times L \times \cos 30° + L \times ((75° - 30°)/15°) \approx$ 15966 км + 5028 км $\approx$ 20994 км;

длина «зеленого» маршрута равна $L \times ((75° - 30°)/15°) + 11 \times L \times \cos 75° \approx$ 5028 км + 4771 км $\approx$ $\approx$ 9799км;

длина «черного» маршрута равна $L \times ((90° - 30°)/15°) + L \times ((90° - 75°)/15°) = 5 \times L$ = 8380 км.

В данном случае самый короткий из трех рассмотренных маршрутов – это «черный» маршрут через Северный полюс. Но является ли он вообще самым коротким маршрутом из пункта А(30° с.ш., 60° в.д.) в пункт Б(75° с.ш., 75° з.д.)?

От примера перейдем к общему случаю. Пусть заданы два произвольных диспетчерских пункта А и Б.

Выберем произвольный маршрут S из А в Б (жирная черная линия на рисунке 4). Таких различных маршрутов существует необозримое количество, и перебирать их в поисках оптимального варианта – проблема не из легких. Впрочем, в тотальном переборе нет необходимости, ведь некоторые маршруты заведомо не экономичные (например, маршруты с «петлями»). Сейчас мы предложим разумную (специалисты говорят – «жадную») схему перебора.

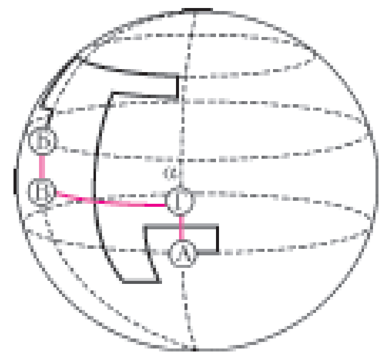


Рис. 4

Рассмотрим всевозможные маршруты по долготе между диспетчерскими пунктами на меридианах, на которых расположены А и Б. Пусть В–Г – самый короткий такой маршрут, расположенный в диапазоне от самой южной точки S до самой северной точки S (дуга параллели, выделенная красным цветом на рисунке 4). Тогда протяженность маршрута А–Г–В–Б не больше, чем длина маршрута S. Поэтому маршрут из А в Б наименьшей длины надо выбирать из 13 вариантов, каждый из которых соответствует выбору широтного участка В–Г от Южного до Северного полюса на одной из 13 возможных параллелей между меридианами пунктов А и Б. Длина каждого такого маршрута А–Г–В–Б равна

(длина меридионального участка А–Г) +

+ (длина меридионального участка Б–В) +

+ (длина широтного участка В–Г).

Можно вывести аналитическую формулу для вычисления минимального значения этого выражения. Однако проще поиск минимального среди 13 возможных значений поручить программе: для человека это уже многовато, а для компьютера – пустяковое дело (если есть программа).

Кстати, какова длина минимального маршрута между пунктами А(30° с.ш., 60° в.д.) и Б(75° с.ш., 75° з.д.)?