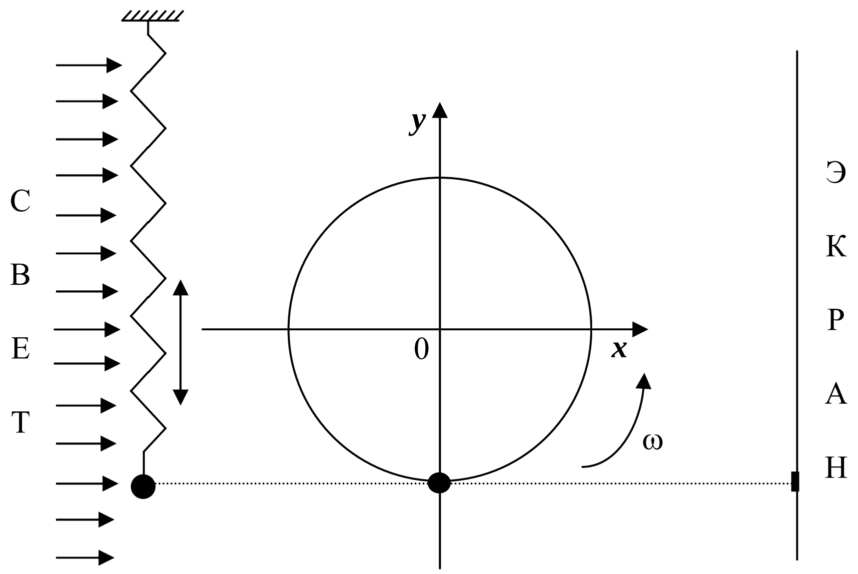
§14. Координата колеблющейся точки

Рассмотрим пружинный маятник и найдем закон движения шарика на пружине, т.е. зависимость координаты от времени. Для этого воспользуемся тем, что при определенных условиях колебания шарика и движение тени от движущегося по окружности шарика совпадают в каждый момент времени.

Покажите на рисунке несколько положений вращающегося шарика и соответствующие им положения колеблющегося шарика, а также создаваемые ими тени. Что необходимо для полной синхронизации движений двух теней? Что можно сказать о периоде обращения этих двух тел? Покажите, в каких пределах должны происходить колебания.



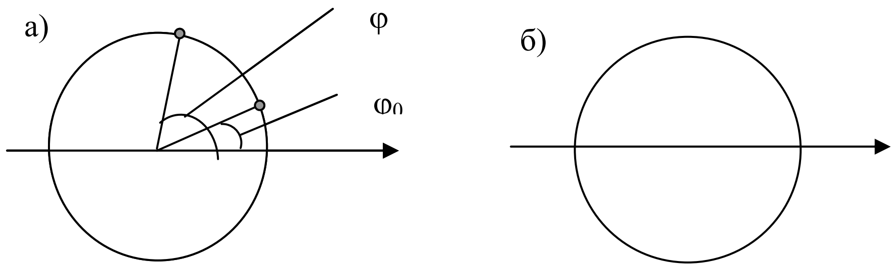
<u>Задача</u>. Пусть точка вращается синхронно с колебаниями шарика на пружине. Период обращения точки $T = 1{,}2$ с, радиус окружности $R = 10$ см. Найти зависимость координаты колеблющегося шарика от времени: а) графически; б) аналитически.

<u>Решение</u>:

Движение по окружности мы уже научились описывать, поэтому начнем с него. Сначала вспомним, как находить угол поворота: $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Или: $\varphi - \varphi_0 = \omega(t - t_0)$. Эту формулу можно упростить. Пусть начальный момент времени равен нулю: $t_0 = 0$. Иными словами, секундомер включают в момент начала наблюдений. Этот случай показан на рис. а).

Запишите, как в этом случае будет выглядеть формула для угла поворота φ в некоторый момент времени t. Покажите на рис. а угол $\Delta\varphi$.

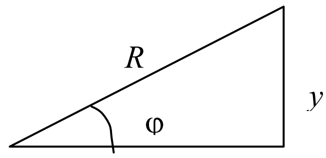
Изобразите начальное положение точки на рис. б) так, чтобы оказалось справедливым уравнение: $\varphi = \omega t$. Покажите угол φ через четверть периода.



Поскольку в условии задачи ничего не говорится о начальных условиях, мы можем выбрать наиболее удобный для нас случай. Пусть в момент включения секундомера шарик проходит крайнюю правую точку: $\varphi_0 = 0$ при $t_0 = 0$, угол поворота прямо пропорционален времени: $\varphi = \omega t$. Зная, что за период точка делает полный оборот, т.е. поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$ рад, можно найти угловую скорость ω.

Найдите ω и запишите уравнение зависимости φ(t).

Для графического решения задачи удобно заполнить таблицу, причем можно ограничиться значениями t от 0 до 1,2 с, т.к. движение периодическое с $T = 1{,}2$ с. Время удобно выражать не только в секундах, но и в долях периода (см. последнюю строчку таблицы). Ординату точки можно найти по формуле $y = R \cdot \sin\varphi$ (см. рис.).

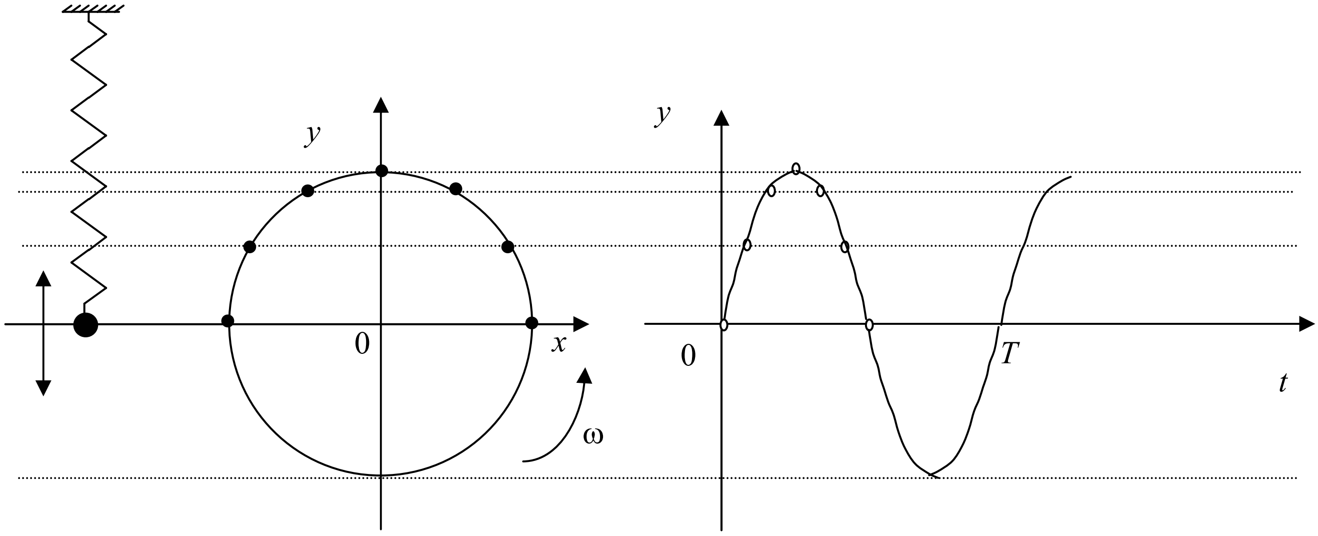


6-00

Дополните таблицу, используя справочный материал.

t, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$\varphi = (\pi/0{,}6) \cdot t$, рад	0	π/6			2π/3		π			3π/2			2π
$y = R \cdot \sin\varphi$, см	0	5		10									0
t, с	0	T/12	T/6										T

Используя заполненную таблицу, проверьте построение графика на рисунке. На рисунке и на графике пронумеруйте числами от 0 до 12 последовательные положения точки в выделенные моменты времени. Достройте график на промежутке времени $T < t < 2T$.



Координата шарика на пружине в каждый момент времени совпадает с тенью равномерно вращающегося шарика. Таким образом, уравнение $y = R \cdot sin\omega t$ может описывать оба эти движения. Правда, в случае колебаний непонятно, как интерпретировать различные величины. Что такое R в отношении колебания? Ясно, что никакого радиуса окружности в процессе колебаний пружинного маятника нет. Теперь это расстояние от самого верхнего или самого нижнего положения до положения равновесия. Оно называется амплитудой колебаний и обозначается A или y_m:

$$\boxed{y = A \cdot sin\omega t \text{ или } y = y_m \cdot sin\omega t}$$

?! *Воспользуйтесь доступным источником информации и заполните таблицу соответствия колебаний и движения по окружности (запишите определения, обозначения и единицы измерения в СИ).*

Гармоническое колебание	Равномерное движение по окружности
Период –	
Частота –	
	Угловая скорость –
Амплитуда –	
	Угол поворота –