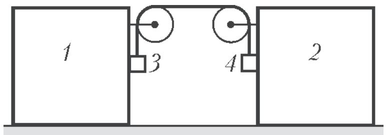

Рис. 14

11 класс

1. На конце невесомого проводящего стержня закреплен маленький металлический шарик, касающийся гладкой проводящей сферической поверхности радиусом $R = 0{,}8$ м (рис.15). Второй конец стержня закреплен в центре сферы при помощи проводящего шарнира так, что стержень может вращаться без трения вокруг него, сохраняя электрический контакт со сферой. Эта система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл и подключена к батарее. Если стержень закрутить вокруг вертикальной оси в определенном направлении с частотой $\omega = 5\ \text{с}^{-1}$ и под определенным углом к вертикали, то этот угол и частота вращения в дальнейшем не будут меняться. Определите этот угол и ЭДС батареи. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10\ \text{м/с}^2$.

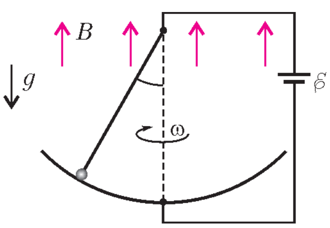

Рис. 15

Ю.Старокуров, М.Семенов

2. Звуковая волна от удаленного источника падает на стену, имеющую вогнутую цилиндрическую форму, под углом, близким к α, причем эта волна идет перпендикулярно оси цилиндра. Определите, в какую точку вблизи стены следует поместить чувствительный микрофон, чтобы он зарегистрировал максимально возможную интенсивность звука. Найдите расстояния от этой точки до стены и до оси цилиндра. Радиус цилиндра R много больше размеров стены, но много меньше расстояния до источника. Длина волны звука много меньше размеров стены.

О.Шведов

Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута

Геометрические олимпиады имени И.Ф.Шарыгина

В память о ярком человеке, талантливом математике и выдающемся педагоге Игоре Федоровиче Шарыгине (1937–2004) ряд российских научных организаций и учебных заведений решили ежегодно, начиная с 2005 года, проводить геометрическую олимпиаду школьников. В оргкомитет и жюри олимпиады вошли известные ученые, педагоги, энтузиасты математического просвещения из разных российских регионов. Олимпиада состоит из двух туров: заочного и финального. В заочном туре, задачи которого публикуются в газете «Математика» и на сайте Московского центра непрерывного математического образования (www.mccme.ru), могут принимать участие все желающие школьники. Победители заочного тура приглашаются на финал. Кроме того, к участию в финальном туре допускаются победители региональных геометрических олимпиад. Финальный тур проводится в устной форме.

Финальные туры двух первых олимпиад прошли в сентябре 2005 в Москве и в июле 2006 года в Дубне. Материалы этих олимпиад опубликованы в книге «Геометрические олимпиады им. И.Ф.Шарыгина» (М.: МЦНМО, 2007), посвященной 70-летию И.Ф.Шарыгина.

Среди победителей двух первых олимпиад хочется отметить Е.Авксентьева (Ростов), С.Сафина (Краснодар), М.Лысова, Н.Печёнкина, Р.Девятова, М.Илюхину (все – Москва), не только показавших высокие результаты, но и нашедших в ряде задач более красивые решения, чем были у жюри.

Ниже приводятся избранные задачи первых двух олимпиад (с решениями) и несколько задач заочного тура третьей олимпиады (для самостоятельного решения).

Задачи

1 (В.Протасов). *Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC – на меньшей. Чему может быть равен угол BOC?*

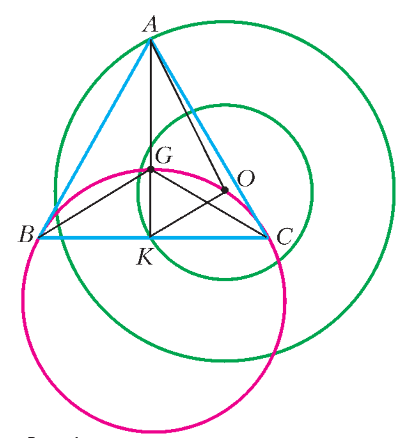

Рис. 1

Решение (М.Лысов). Это, пожалуй наиболее элегантное, решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии. Пусть имеется некоторый отрезок AB на плоскости и некоторое положительное число λ. Тогда геометрическое место точек X, таких что $\frac{AX}{BX} = \lambda$, есть некоторая окружность. Если P и Q – точки, которые делят отрезок в отношении λ (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке PQ как на диаметре. Она называется окружностью Аполлония.

Из условия нашей задачи сразу следует, что $AG/KG = AB/KB = AC/KC = AO/KO = 2$ (рис.1), откуда вытекает, что точки B, G, O, C лежат на окружности Аполлония для отрезка AK и $\lambda = 2$. Понятно, что $\angle BOC = \angle BGC = 120^\circ$ (или $180^\circ - \angle BGC = 60^\circ$).

2 (В.Пайлс, Нидерланды). *На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2, причем $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1$. На отрезке A_1A_2 взята точка A_3, а на продолжении этого отрезка за точку A_2 – точка A_4, так что $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k$. Аналогично, на отрезке B_1B_2 берется точка B_3, а на продолжении этого*

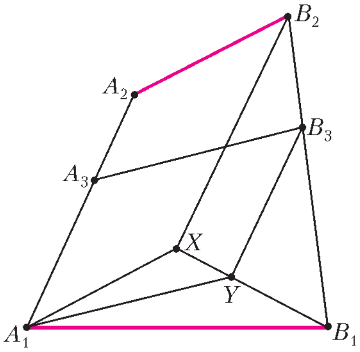

Рис. 2

отрезка за точку B_2 – точка B_4, так что $\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k$. *Найдите угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4.*

Решение (С.Сафин). Построим параллелограмм $A_1A_2B_2X$ и проведем биссектрису A_1Y треугольника A_1XB_1 (рис.2). Так как $\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k$, получим $B_3Y \parallel B_2X$ и $B_3Y = kB_2X = A_1A_3$. Следовательно, $A_1A_3B_3Y$ – параллелограмм, т.е. $A_3B_3 \parallel A_1Y$. Аналогично, прямая A_4B_4 параллельна внешней биссектрисе угла XA_1B_1, и, значит, прямые A_3B_3 и A_4B_4 перпендикулярны.

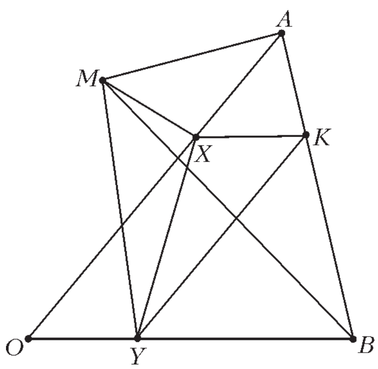

Рис. 3

3 (В.Протасов). *На плоскости дан угол и точка K внутри него. Докажите, что найдется точка M, обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через K, пересекает стороны угла в точках A и B, то MK является биссектрисой угла AMB.*

Решение (Р.Девятов). Пусть O – вершина угла (рис.3). Построим параллелограмм $KXOY$, две стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть M – точка, симметричная K относительно XY. Докажем, что M – искомая.

Пусть прямая, проходящая через K, пересекает прямые OX и OY в точках A и B. Заметим, что $MX = KX$, $MY = KY$, $\Delta MXY = \Delta KXY = \Delta OYX$, поэтому $MOYX$ – равнобокая трапеция и $\angle MXO = \angle MYO$. Значит, $\angle MXA = 180° - \angle MYO = \angle BYM$. Далее, треугольники AXK и KYB подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому $KX/XA = BY/YK$. Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$

Из этого равенства и из равенства углов MXA и BYM находим, что треугольники MXA и BYM подобны.

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что MK – биссектриса треугольника AMB.

4 (Б.Френкин). Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные равносторонние. Найдите углы исходного треугольника.

(*Ответ*: 90°, 60°, 30°.)

5 (Б.Френкин). а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т.е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (Укажите все возможные значения.)

б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т.е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями?

(*Ответ*: а) 0, 1, 2 или 4; б) 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 9.)

6 (А.Заславский). Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т.е. на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).

(*Ответ*: окружность, проходящая через вершины равнобедренных треугольников с основаниями AB, BC, CA и углами 120°, построенных внутрь треугольника ABC.)

7 (Д.Шноль). Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м. Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае? (Найдите ответ с точностью до 0,1; радиус Земли считайте равным 6000 км.)

(*Ответ*: в $\sqrt{2}$ раз.)

8 (Л.Емельянов). Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей?

(*Ответ*: все, кроме равнобедренных неостроугольных.)

9 (Б.Френкин). Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности.

(*Указание*: расстояние от вершины A треугольника ABC до его ортоцентра равно удвоенному расстоянию от центра описанной окружности до стороны BC.)

Публикацию подготовил А.Заславский

Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба «Глюон». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальным наукам и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые.

Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами (по 5 человек в каждой) в два тура – заочный и очный.