

Лабораторная работа «Алгоритм Евклида»

(Алгебра, 7 кл., глава 3)

Алгоритм Евклида – это правило нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел, описанное Евклидом в одной из книг его «Начал». Мы познакомимся с этим правилом и «научим» электронную таблицу Excel вычислять НОД двух чисел автоматически. Алгоритм Евклида использует деление с остатком, но мы сначала рассмотрим его более простой (хотя и более длинный) вариант, в котором деление заменено многократным вычитанием; из этого варианта будет понятно, почему этот алгоритм «работает».

Начнем с примера – найдем НОД(1485, 405).

Будем вычитать из большего числа меньшее, пока это возможно:

$(1485; 405) \rightarrow (1080=1485-405; 405) \rightarrow (675; 405) \rightarrow (270; 405) \rightarrow (270; 135) \rightarrow (135; 135)$;

заметим, что первые три раза мы уменьшали первое число пары, затем второе, и опять первое. В итоге получилась пара, в которой оба числа равны 135. Это и есть НОД исходных чисел.

Задание 1. Вычислите самостоятельно НОД(1125; 350) в тетради. Впишите числа 1125 и 350 в желтые клетки на листе «Алгоритм с вычитанием» и сравните результат со своим вычислением.

Чтобы научить Excel вычислять НОД автоматически, нам понадобится записать правило вычисления более формально. Как преобразуется пара чисел $(a; b)$ за один шаг? Первое число, a , заменяется разностью $a - b$, если $a > b$, и остается неизменным в противном случае.

Задание 2. Сформулируйте правило преобразования второго числа пары b .

Задания 3, 4 и 5 объясняют, как и почему это правило преобразования пары чисел $(a; b)$ вычисляет НОД.

Задание 3*. а) Докажите, что рано или поздно образуется пара из двух равных натуральных чисел.

б) Докажите, что любой общий делитель чисел a и b является делителем преобразованных чисел a' и b' , и наоборот, любой общий делитель a' и b' делит a и b . Выведите отсюда, что $\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a'; b')$.

в) Докажите, что если из исходной пары $(a; b)$ получилась пара $(m; m)$, то $m = \text{НОД}(a; b)$.

Теперь построим «евклидовский вычислитель НОД». Первые числа пар будем писать в столбце В рабочего листа, вторые – в столбце С. Пусть на некотором шаге получились числа a, b . Следующее значение первого числа равно разности $a - b$, если $a > b$, и остается равным a в противном случае, т.е. оно зависит от выполнения условия $a > b$.

Чтобы вычислить эту величину в Excel, используется так называемая «условная формула» ЕСЛИ. Она устроена так:

ЕСЛИ(условие; значение при выполнении условия; значение при невыполнении условия).

В нашем случае условие – это « $a > b$ », первое значение – « $a - b$ », второе – « a » и наша формула принимает такой вид: ЕСЛИ($a > b$; $a - b$; a) и ее значение a' находится по правилу: «если $a > b$, то $a' = a - b$, иначе $a' = a$ ». Занесем эту формулу на рабочий лист таблицы.

Задание 4. Запишите в (желтые) ячейки B2 и C2 на рабочем листе данные числа, например, 1485 и 405. Запишите в ячейку B3 условную формулу для нового значения a : =ЕСЛИ(B2>C2; B2-C2; B2). Убедитесь, что получилось 1080.

Задание 5. Заполните самостоятельно ячейку C3 для нового значения b . Убедитесь, что получилось 405.

Задание 6. Выделите ячейки B3 и C3 и растяните выделение вниз настолько, чтобы числа a и b стали равными (должна возникнуть и затем повторяться пара (135; 135)); проверьте результат по листу «Алгоритм с вычитанием».

Вычисление по составленному алгоритму может оказаться очень длинным даже для не слишком больших чисел. Но его можно существенно сократить. Посмотрим, как это сделать, в нашем первом примере, где первое число (1485) больше второго (405).

Мы вычитаем второе число из первого и повторяем вычитание еще два раза (пока разность не станет меньше вычитаемого). При этом второе число остается неизменным. Получается пара (270; 405). Теперь производится вычитание первого (меньшего) числа из второго, а первое не меняется; получается пара (270; 135) и числа опять нужно поменять ролями. Еще одно вычитание ($270 - 135 = 135$) – и мы получили два числа, равных искомому НОД. Весь процесс состоит из серий вычитаний: в первой серии второе число вычитается из первого, потом первое из второго и т.д.

Задание 7. Как, не производя вычитаний, узнать, сколько вычитаний будет в одной серии, и какая разность получится в итоге? Какие случаи нужно рассмотреть? (Указание: вспомните про деление.)

Общее правило можно сформулировать так: если число a не делится на b , то оно заменяется своим остатком от деления на b (в случае $a < b$ этот остаток равен a); если a делится на b , то заменяем его числом b . Точно такое же правило, с перестановкой a и b , действует и для b . Остаток от деления a на b записывается в Excel формулой ОСТАТ($a;b$); вместо a и b в нее можно подставить номера ячеек, где находятся эти числа. В частности, условие делимости нацело запишется в виде ОСТАТ($a;b$) = 0.

Задание 8. Пользуясь этими правилами, составьте вычислитель НОД по алгоритму Евклида на Рабочем листе. Найдите НОД чисел 1125 и 663, 1755 и 1176. Придумайте примеры сами и сравните свои ответы с вычислениями на листе «Алгоритм с делением».