совпадают, перпендикулярно этим полям. Найдите напряженность электрического поля, если индукция магнитного поля равна 0,1 Тл, а начальное ускорение протона, вызванное действием этих полей, составляет 10^{12} м/с^2.

4. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 40$ В, влетает в плоский слой однородного магнитного поля толщиной $h = 10$ см. Скорость электрона перпендикулярна как линиям магнитной индукции поля $\vec{B}$, так и плоской границе слоя. При каком минимальном значении индукции $B_{\min}$ электрон не пролетит сквозь слой? Отношение модуля заряда электрона к его массе $\gamma = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

5. Электрон движется по окружности радиусом $R = 10$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряженностью $E = 100$ В/м. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет вдвое?

6. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно его силовым линиям. Определите величину и направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$, которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона $W = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести пренебречь.

Инвариантность и задачи с параметрами

Г.ФАЛИН, А.ФАЛИН

В современной математике важную роль играет понятие *инвариантности*, т.е. неизменности математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) относительно некоторых преобразований.

В настоящей статье мы покажем, как свойства инвариантности позволяют решать определенный класс задач с параметрами.

Уравнения

Задача 1 (МГУ, мехмат, 1990). *Найдите все значения параметра a, при которых уравнение*

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение.

Решение. Неизвестная x входит в уравнение (1) через две четные функции: $y = x^2$ и $y = \cos x$. Поэтому это уравнение инвариантно при замене x на $-x$. Значит, если какое-то число x_0 является корнем уравнения (1), то и число $(-x_0)$ также будет корнем. Отсюда следует, что уравнение (1) имеет единственный корень только в случае, когда среди корней присутствует число $x_0 = 0$. При этом не исключено наличие и других корней. Важно лишь то, что если среди корней нет числа 0, то множество M_a его корней не может быть одноэлементным (оно либо пусто, либо содержит по меньшей мере два корня вида x_1, $-x_1$).

Простая подстановка числа 0 на место неизвестной дает, что число 0 является корнем уравнения (1) для $a_1 = 0$ и $a_2 = 2\sin 1$.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет уравнение (1) для двух «подозрительных» значений параметра $a_1 = 0$ и $a_2 = 2\sin 1$.

1. Если $a = 0$, то уравнение (1) примет вид $x^2 = 0$, т.е. имеет единственный корень $x_0 = 0$. Поэтому значение $a = 0$ нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a = 2\sin 1$, то уравнение (1) примет вид

$$x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x). \qquad (2)$$

Левая часть этого уравнения больше или равна $4\sin^2 1$, причем эта нижняя граница является точной – она достигается при $x = 0$. Оценить правую часть немного сложнее. Прежде всего отметим, что при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ выражение $\cos x$ меняется от -1 до $+1$. На отрезке $-1 \le t \le 1$ функция $\sin t$ монотонно возрастает от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Поэтому выражение $\sin(\cos x)$ меняется от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Соответственно, правая часть уравнения (2) меняется от $-4\sin^2 1$ до $4\sin^2 1$, причем значения правой части уравнения полностью заполняют этот отрезок. Следовательно, уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin^2 1, \\ 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4\sin^2 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x_0 = 0$, который удовлетворяет и второму уравнению системы. Значит, система, а вместе с ней и уравнение (2), имеет единственное решение $x = 0$. Поэтому проверяемое значение параметра $a = 2\sin 1$ нужно включить в ответ задачи.

Ответ: $a_1 = 0$, $a_2 = 2\sin 1$.

Задача 2 (химический ф-т, 1999). *Найдите все значения параметра a, при которых уравнение*

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

Решение. В этой задаче уравнение также инвариантно при замене x на $-x$ (хотя заметить это довольно тяжело). Поэтому если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет его корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0 = 0$. В противном случае множество корней либо пусто, либо бесконечно, либо конечно и содержит четное число корней.

Подставляя в исходное уравнение вместо неизвестной x число 0, мы получим простое уравнение относительно a: $|2a| = a^2 + 1$, которое имеет два корня: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

Если $a = 1$, то исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = 0, \quad \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} = -4.$$

Первое уравнение, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$. Второе уравнение можно привести к виду $2^x = \dfrac{x - 4}{x + 4}$, после чего с помощью графиков легко показать, что оно не имеет корней.

Итак, в случае $a = 1$ исходное уравнение имеет ровно 1 корень.

Если $a = -1$, то исходное уравнение также распадается на два уравнения:

$$\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}=0\,,\quad \frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}=4\,.$$

Первое уравнение такое же, как и первое уравнение в случае $a=1$; оно имеет единственный корень $x=0$. Второе уравнение можно привести к виду $2^x=\frac{x+4}{x-4}$, после чего с помощью графиков легко показать, что оно имеет два корня. Точные значения этих корней нам совершенно не важны; впрочем, графики позволяют их локализовать: $-5<x_1<-4$, $4<x_2<5$ ($x_1=-x_2$).

Итак, в случае $a = -1$ исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

Хотя мы точно определили число корней в каждом из двух «подозрительных» случаев, для завершения решения задачи достаточно было просто выяснить, конечно или нет число корней исходного уравнения. Тогда множество корней имеет вид $\{0;x_1;-x_1;\ldots;x_n;-x_n\}$, т.е. содержит нечетное число корней.

Ответ: $a_1=1$, $a_2=-1$.

В следующей задаче появится инвариантность необычного для школьной математики вида.

Задача 3 (ВМК, 1998). *Найдите все значения параметра a, при которых уравнение*

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}}+a\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)+a^2-\frac{5}{4}=0 \qquad (3)$$

имеет единственное решение.

Решение. Нетрудно проверить, что уравнение (3) не изменится при замене x на $\frac{1}{x}$. Поэтому если x_0 – решение уравнения (3), то $\frac{1}{x_0}$ – тоже решение. Следовательно, если x_0 – единственное решение, то $x_0=\frac{1}{x_0}$, т.е. x_0 может быть только 1 или –1.

Подставляя значение $x = 1$ в уравнение (3), получаем уравнение относительно параметра: $a^2+a+\frac{3}{4}=0$. Дискриминант этого квадратного уравнения отрицателен, так что ни при одном значении параметра a число $x=1$ не будет корнем уравнения (3).

Подставляя теперь в уравнение (3) $x = -1$, получаем необходимое (но недостаточное (!)) условие для искомых значений параметра: $a^2+a-\frac{3}{4}=0$, которое имеет два корня $a=\frac{1}{2}$ и $a=-\frac{3}{2}$.

Найдем теперь количество решений уравнения (3) для двух «подозрительных» значений параметра $a=\frac{1}{2}$ и $a=-\frac{3}{2}$. Наличие в этом уравнении разнородных членов (показательного и тригонометрического), конечно, потребует применения графического метода или метода оценок. Чтобы упростить дальнейший анализ, применим тригонометрическую подстановку $x=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $t\in(\pi;0)\cup(0;\pi)$. Тогда (3) превратится в следующее уравнение:

$$2^{\sin t}+a\cos(2\operatorname{ctg}t)+a^2-\frac{5}{4}=0\,. \qquad (4)$$

1. Если $a=\frac{1}{2}$, то уравнение (4) примет вид

$$\cos(2\operatorname{ctg}t)=2-2^{1+\sin t}\,. \qquad (5)$$

Функцию $y_1(t)=\cos(2\operatorname{ctg}t)$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u)=\cos u$ и $u(t)=2\operatorname{ctg}t$. При изменении t от $-\pi$ до 0 функция $u(t)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Соответственно, функция $y_1(t)$ совершает бесконечное число колебаний от –1 до +1; при этом $y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$. Для $t\in(0;\pi)$ в силу четности функции $y_1(t)$ ситуация аналогична.

Функцию $y_2(t)=2-2^{1+\sin t}$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u)=2-2^{1+u}$ и $u(t)=\sin t$. График функции $y(u)$ получается из графика стандартной показательной функции 2^u переносом на 1 влево, осевой симметрией относительно оси Ox, переносом на 2 вверх. Поэтому при изменении переменной t от $-\pi$ до π функция $y_2(t)$ сначала возрастает от $y_2(-\pi)=0$ до $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$, затем убывает от $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$ до $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$, а потом опять возрастает от $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$ до $y_2(\pi)=0$.

Таким образом, уравнение (5) имеет бесконечно много корней на множестве $(-\pi;0)\cup(0;\pi)$, так что проверяемое значение параметра не включается в ответ.

2. Если $a=-\frac{3}{2}$, то уравнение (4) примет вид

$$\cos(2\operatorname{ctg}t)=\frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right). \qquad (6)$$

При $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$ функция $y=\cos(2\operatorname{ctg}t)$ принимает значения из отрезка $[-1;1]$, а функция $y=\frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right)$ – из множества $[1;2]\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$. Поэтому уравнение (6) равносильно системе

$$\begin{cases}\cos(2\operatorname{ctg}t)=1,\\ \frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right)=1.\end{cases}$$

Второе уравнение этой системы имеет единственный корень, удовлетворяющий условию $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$: $t=-\frac{\pi}{2}$. Этот корень является и корнем первого уравнения системы, так что проверяемое значение параметра включается в ответ.

Ответ: $a=-\frac{3}{2}$.

Системы

Как и для уравнений, для систем самым распространенным случаем является инвариантность относительно изменения знака у одной или нескольких неизвестных.

Задача 4 (экономический ф-т, 1987). *Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a,\\ x^2+y^2=1\end{cases} \qquad (7)$$

имеет единственное решение.

Решение. Наша система инварианта при замене x на $(-x)$. Поэтому если $(x;y)$ – решение системы (7), то и $(-x;y)$ тоже будет решением. Вследствие этого, если система (7) имеет единственное решение, то это решение имеет вид $(0;y)$.

Подставляя вместо неизвестной x число 0, мы получим, что пара $(0;y)$ является решением системы (7) только для $a=\frac{4}{3}$ или $a=\frac{10}{3}$. В первом случае этим единственным решением может быть только пара $(x;y)=(0;1)$, во втором – пара $(x;y)=(0;-1)$. Как обычно, нельзя исключить, что кроме отмеченного решения система имеет и другие решения.

Для завершения решения задачи нужно выяснить, сколько решений имеет исходная система (7) для двух подозрительных значений параметра $a=\frac{4}{3}$ и $a=\frac{10}{3}$.

Используя графические соображения и метод оценок, легко показать, что для $a=\frac{4}{3}$ пара $(x;y)=(0;1)$ является единственным решением системы (7), а в случае $a=\frac{10}{3}$ система (7) имеет по меньшей мере три решения $(0;-1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$.

Ответ: $a=\frac{4}{3}$.

Задача 5 (мехмат, 1966). *Найдите все значения a и b, при которых система*

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \qquad (8)$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z – действительные числа).

Решение. Исходная система не меняется при *одновременной* перемене знаков у неизвестных x и y. Иначе говоря, она инвариантна относительно преобразования $(x;y;z)\mapsto(-x;-y;z)$. Поэтому если тройка чисел $(x_0;y_0;z_0)$ является решением системы (8), то и тройка $(-x_0;-y_0;z_0)$ будет решением. Отсюда следует, что если $(x_0;y_0;z_0)$ – единственное решение системы, то $(x_0;y_0;z_0)=(-x_0;-y_0;z_0)$, откуда $x_0=0$, $y_0=0$.

Прямая подстановка в (8) вместо x и y числа 0 показывает, что тройка $(0;0;z)$ – решение системы (8) только в двух случаях:

1. В случае $a=b=2$ единственным решением может только тройка $(x;y;z)=(0;0;2)$.
2. В случае $a=b=-2$ единственным решением может быть только тройка $(x;y;z)=(0;0;-2)$.

Решая систему (8) для указанных конкретных значений параметров, мы получим, что для $a=b=2$ система (8) кроме решения $(0;0;2)$ имеет еще четыре решения: $\left(\frac{\sqrt5+1}{2};\frac{\sqrt5-1}{2};1\right)$, $\left(\frac{\sqrt5-1}{2};\frac{\sqrt5+1}{2};1\right)$, $\left(\frac{-\sqrt5-1}{2};\frac{-\sqrt5+1}{2};1\right)$, $\left(\frac{-\sqrt5+1}{2};\frac{-\sqrt5-1}{2};1\right)$, а для $a=b=-2$ тройка $(x;y;z)=(0;0;-2)$ является единственным решением.

Ответ: $a=b=-2$.

В следующей задаче, в отличие от предыдущей, работает не только инвариантность относительно изменения знака у двух неизвестных, но и симметричность системы относительно входящих в нее неизвестных (в наших терминах речь идет об инвариантности относительно преобразования $(x;y)\mapsto(y;x)$). Однако эта симметрия (следовательно, и соответствующая инвариантность) «спрятана» с помощью замены неизвестных.

Задача 6 (мехмат, 2006). *Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} 2xy-ax-2ay+a^2-2=0, \\ 4x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0 \end{cases} \qquad (9)$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Для новых переменных $u=x-a$, $v=y-\frac{a}{2}$ и $b=3a^2+5a$ система (9) примет вид

$$\begin{cases} uv=1, \\ u^2+v^2=b. \end{cases} \qquad (10)$$

Поскольку между парами $(x;y)$ и $(u;v)$ имеется взаимно однозначное соответствие, системы (9) и (10) имеют одно и то же число решений.

Система (10) не изменится, если одновременно изменить знаки у переменных u и v, а также если их поменять местами. Поэтому если $(u_0;v_0)$ – решение системы (10), то решениями будут и пары $(-u_0;-v_0)$, $(v_0;u_0)$, $(-v_0;-u_0)$. В силу первого уравнения, u_0 и v_0 отличны от 0, так что из четырех указанных пар пары $(u_0;v_0)$ и $(-u_0;-v_0)$, а также пары $(v_0;u_0)$ и $(-v_0;-u_0)$ различны. Поэтому система (10) может иметь два решения только в случае $u_0=v_0$.

Прямая подстановка в исходную систему дает, что пара $(u;u)$ будет решением тогда и только тогда, когда $b=2$. Если $b=2$, то система (10) легко решается и действительно имеет два решения: $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Для основной переменной a условие $b=2$ дает уравнение $3a^2+5a=2$, откуда немедленно следует ответ.

Ответ: $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=-2$.

Упражнения

1 (ф-т почвоведения, 2001). При каких значениях параметра b уравнение $\operatorname{tg}|b|=\log_2(\cos x-|x|)$ имеет ровно один корень?

2 (геологический ф-т, 2003). При каких значениях a уравнение $2\pi^2(x-1)^2+4a\cos(2\pi x)-9a^3=0$ имеет единственное решение?

3 (экономический ф-т, 2003). Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$b^2\sin\left(\frac{\pi+2}{2}-x\right)+\sin^2\left(\frac{2x}{b+1}-\frac{2}{b+1}\right)-$$
$$-\,b\sqrt{4x^2+8-8x}=3+\arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

4 (мехмат, 1966). Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a, \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

имеет только одно решение.

5 (МШЭ, 2005). Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2+1\right)b=y+\cos 2x, \\ 2^{|\sin x|}+|y|=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6 (ВМК, 1997). При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4+y^4=a, \\ \cos(x-y)+xy\le 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

7 (химический ф-т, 1986). Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|}, \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.