ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2005 г.)

1. Этого сделать нельзя. Занумеруем грани кубика цифрами от 1 до 6 так: верхняя – 1, нижняя – 6, левая – 5, правая – 3, передняя – 2, задняя – 4. Тогда циклические перестановки четырех цифр окружности соответствуют поворотам кубика на 90°, но сколько ни вращай кубик – не получишь новый кубик, где грани 1 и 6 переставлены, а все остальные грани остались на своих прежних местах.

2. Заметим, что в силу первого уравнения условия каждое из неизвестных по модулю не превышает 1, поэтому $x+1 \ge 0$, $y+1 \ge 0$, $z+1 \ge 0$. Сложив первое и второе уравнения условия, получаем $x^2(x+1)+y^2(y+1)+z^2(z+1)=0$. Это возможно лишь в единственном случае, когда каждое неотрицательное слагаемое в левой части равно нулю. Следовательно, каждое неизвестное может принимать значения либо 0, либо −1. Из второго уравнения условия следует, что значение −1 может принимать только одно неизвестное. Отсюда получаем единственно возможный ответ: $x + y + z = -1$.

3. Ясно, что увеличение или уменьшение одного из чисел a, b, x, y на 7 не влияет на делимость выражения $ab - xy$ на 7. Поэтому можно заменить каждое из данных чисел неотрицательным остатком от деления его на 7. Таким образом, можно считать, что данные семь чисел принимают значения от 0 до 6 (среди них могут быть равные).

Если среди них есть два нуля, то выберем $a = 0$ и $x = 0$, тогда при любых b и y выражение $ab - xy$ делится на 7.

Допустим теперь, что двух нулей нет, а ненулевых чисел не менее шести. Если все они различные, то это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тогда имеем $2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$, что делится на 7. Пусть среди шести ненулевых чисел имеются равные числа. Если при этом имеется две пары равных чисел (или не менее четырех равных), то можно выбрать $a = x$ и $b = y$, и тогда $ab - xy$ делится на 7.

Осталось рассмотреть случай, когда имеется только одна группа равных чисел, и их в этой группе не более трех. Можно считать, что равные числа в группе – это единицы. В противном случае все семь чисел можно умножить на некоторое ненулевое число так, что равные числа станут единицами (ибо для любого ненулевого числа z существует число c такое, что zc имеет остаток 1 при делении на 7), причем сама эта процедура никак не повлияет на делимость или неделимость выражения $ab - xy$ на 7.

Рассмотрим набор 1, 1, a_1, a_2, a_3, a_4. Здесь последние четыре числа различные, и не исключено, что среди них может быть еще одна единица. Тогда произведения a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, также различны по модулю 7 (т.е. имеют различные остатки при делении на 7). Если a_2a_3 и a_1a_4 имеют равные остатки при делении на 7, то задача решена. Аналогичные слова можно сказать и о произведениях a_2a_4 и a_3a_4. Итак, либо среди произведений a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4 найдутся два, имеющих равные остатки при делении на 7(и тогда задача решена), либо все они дают разные остатки при делении на 7. В последнем случае, поскольку таких произведений шесть и они могут принимать (по модулю 7) только значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, среди них обязательно есть 1 (по модулю 7). Выберем два числа, которые дают такое произведение, в качестве a и b и положим $x = y = 1$. Тогда $ab - xy$ делится на 7, что и требовалось доказать.

4. Может. Отметим на плоскости узлы квадратной решетки 1×1, расположенные в форме квадрата со стороной $2k$. В квадратах 2×2 нарисуем одинаковые звезды, вершины которых лежат в отмеченных точках (рис.1). Очевидно, что таких звезд k^2.

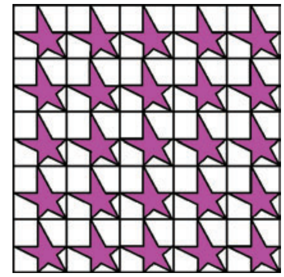

Рис. 1

Несложно подсчитать количество прямых, на которых лежат стороны всех этих звезд:

$$k + k + (2k - 1) + (3k - 2) + (3k - 2) = 10k - 5.$$

Заметим, что при $k \ge 10$ выполняется неравенство $k^2 \ge 10k - 5$, т.е. в приведенной конфигурации уже при $k = 10$ количество звезд больше числа прямых.

5. а) Верно. Для доказательства просто укажем способ, как разбить произвольное четнолюбивое число на сумму двух нечетнолюбивых чисел. Если оно – однозначное (и притом больше 1), то его, очевидно, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, каждое из которых (согласно условию) можно считать нечетнолюбивым. Пусть теперь исходное четнолюбивое число – не менее чем двузначное. Запишем его в виде $m_1M_1m_2M_2m_3M_3\ldots$, где все M_i – цифры, стоящие на четных местах, а m_i – цифры, стоящие на нечетных местах. Мы намеренно не пытаемся изобразить, как оканчивается это число, потому что оно может иметь как четное, так и нечетное количество цифр, а последняя его цифра может быть как M, так и m – нам это безразлично. Для нас важнее начало числа. Первая его цифра (т.е. m_1) – ненулевая (запись чисел с нуля не начинается), а так как число – четнолюбивое, то $M_1 \ge m_1$, т.е. вторая цифра – тоже ненулевая. А теперь из данного числа образуем два других следующим образом.

- Первое число получим из исходного заменой всех его цифр M_i нулями, т.е. оно таково: $m_10m_20m_30\ldots$. Ясно, что оно – нечетнолюбивое, поскольку на четных местах стоят одни нули, и потому цифры, стоящие на нечетных местах, не меньше своих соседей.
- Второе число получим из исходного отбрасыванием его первой цифры m_1 и заменой всех остальных цифр m_i нулями, т.е. оно таково: $M_10M_20M_3\ldots$. Ясно, что оно – тоже нечетнолюбивое, поскольку и здесь на четных местах стоят одни нули.

Кроме того, так как и M_1 и m_1 – ненулевые цифры, то нет оснований подозревать, что какое-то из этих чисел начинается с нуля.

б) Неверно. Для доказательства достаточно привести пример нечетнолюбивого числа, которое нельзя представить в виде суммы двух четнолюбивых. В качестве такового можно взять число 109. Убедиться, что оно не может быть представлено в указанном виде, можно даже и прямым перебором (он не очень-то велик), но можно и по-другому. А именно: если одно из слагаемых – однозначное (от 1 до 9), то второе, очевидно, лежит в пределах от 108 до 100, а такие числа не являются четнолюбивыми. Допустим теперь, что оба слагаемых – двузначны. Пусть одно из них имеет вид $\overline{pq}$, т.е. содержит p десятков и q единиц. Если оно – четнолюбивое, то $p \le q$. При вычитании его из числа 109, имеющего 10 десятков и 9 единиц, мы, очевидно, получим число, содержащее $(10 - p)$ десятков и $(9 - q)$ единиц. Но поскольку $p \le q$, то $10 - p > 9 - q$, и второе слагаемое никак не будет четнолюбивым. Так что число 109 представить в указанном виде нельзя.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. По дуге окружности.

2. Может, если точки A и B движутся по двум концентрическим окружностям с одинаковыми угловыми скоростями.

3. Один оборот.
4. Будет, поскольку орбитальное движение Земли приводит к кажущемуся обращению Солнца вокруг нее с периодом в один год.
5. В два раза.
6. У второй, так как у нее больше нормальное ускорение.
7. Скорости спиц нижней половины колеса относительно земли меньше, чем верхней.
8. В каждый данный момент все точки диска, отстоящие от самой нижней точки C на одно и то же расстояние, будут иметь одинаковые по модулю скорости (рис.2).

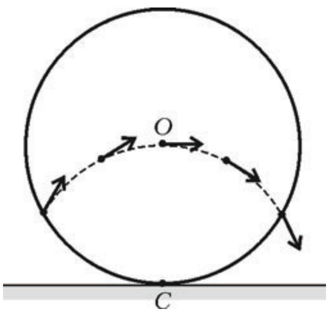

Рис. 2

9. Нет, не будет. Если бы катушка стала скатываться, то она начала бы вращаться вокруг точки C (см. рисунок к условию задачи). Но тогда точка B стала бы удаляться от точки A, т.е. нить AB стала бы растягиваться, что невозможно.
10. В инерциальной системе отсчета, которой была бы невращающаяся Земля, звезды оставались бы неподвижными на небесной сфере. Суточное же движение звезд с востока на запад указывает на вращение Земли в обратном направлении.
11. Нет, не будет – правый груз перетянет. Рисунок 3 поясняет ситуацию, как если бы нити были закреплены на гвоздях, откуда следует, что сила натяжения правой нити в действительности будет больше, чем левой.

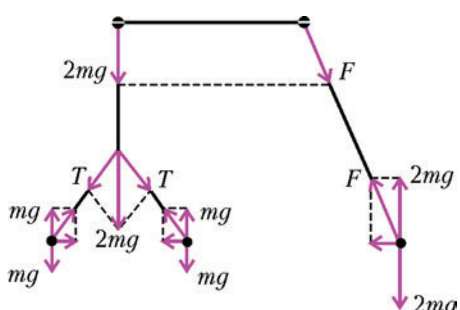

Рис. 3

12. а) В нижней точке; б) в двух крайних верхних точках.
13. Если лифт начнет падать в тот момент, когда грузик находится в одной из точек своего максимального отклонения от положения равновесия, то в дальнейшем грузик будет неподвижен относительно стенок лифта. Во всех других случаях грузик будет описывать круговую траекторию вокруг точки подвеса, причем наибольшая скорость вращения будет в том случае, если лифт начнет падать в момент, когда грузик проходит через нижнюю точку своей траектории.
14. На правые.
15. До соскальзывания на тело действует сила трения покоя, обеспечивающая нормальное и касательное ускорения и направленная под углом к радиусу описываемой телом окружности (рис.4).

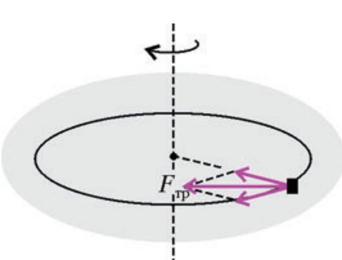

Рис. 4

16. На полюсах Земли этот период составляет одни сутки. По мере уменьшения широты места период будет расти. На экваторе Земли плоскость колебаний не будет изменять свое положение, и поэтому период можно считать бесконечно большим.
17. Отрицательный.
18. В зависимости от значения начального угла электрон станет двигаться по сжимающейся или растягивающейся спирали постоянного радиуса.

Микроопыт

Надо привести воду во вращение. Тогда ее поверхность приобретет вогнутую форму. Поплавок, опускаясь в углубление, сползет со спицы.

ЗАДАЧИ С ЖИДКОСТЯМИ

1. $\Delta h_2 = \dfrac{\rho_{в}}{\rho_{ст}} \Delta h_1$. **2.** $V = \dfrac{27}{77}\dfrac{Q}{p_0} \approx 0{,}1$ л.
3. $a = \dfrac{3}{4} g$. **4.** $p(5R) = p_0 + \rho g H + 12\rho\omega^2 R^2$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Математика

Вариант 1

1. 64. *Указание.* Данное выражение равно $(x+y)^3$.
2. $(0; \log_2 3)$. *Указание.* Выполните замену $t = 2^x$.
3. 25. *Указание.* Проведем через середину M стороны AD прямую, параллельную BC. Пусть E и F – точки ее пересечения с CD и AB соответственно. Площадь трапеции равна площади параллелограмма $EFBC$, а расстояние от M до BC – полусумме расстояний до BC от точек A и D.
4. $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
5. 11. *Указание.* Докажите, что AD – высота треугольника BAC, а $\angle FAE = 90°$. Далее воспользуйтесь тем, что $AD^2 = FD \cdot DE = BD \cdot DC$.
6. $\left[-4; \dfrac{2\sqrt{101}-25}{13}\right] \cup \{0\} \cup \left[\dfrac{23}{13}; 2\right]$. *Указание.* Рассмотрите три случая: $x = 0$, $x > 0$, $x < 0$.
7. $150\sqrt{3}$. *Указание.* Проекция вершины пирамиды одинаково удалена от прямых, на которых лежат стороны треугольника. Таких точек четыре – это центры вписанной и трех вневписанных окружностей. Поскольку $V = \dfrac{1}{3} Sh$, наибольший объем соответствует наибольшей высоте, а наибольшая высота равна $r \operatorname{ctg} \alpha$, где r – наибольший из радиусов упомянутых окружностей.
8. $-8 \le a \le 6$. *Указание.* Функция

$$f(x) = 9|x-1| - 4x + \big|3x - |x+a|\big|$$

убывает при $x \le 1$ и возрастает при $x \ge 1$, поскольку при снятии знаков модулей в первом случае коэффициент при x равен $-9 - 4 \pm 3 \pm 1 < 0$, а во втором $9 - 4 \pm 3 \pm 1 > 0$. Таким образом, уравнение $f(x) = 0$, а с ним и данное уравнение, имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда $f(1) \le 0$.
9. От A к B; 8 км/ч.
Пусть x и y – скорости лодки в направлении от A к B и от B к A соответственно. Тогда в первом направлении лодка прошла $(40+10)/2 = 25$(км), а в противоположном $(40-10)/2 = 15$(км), причем $\dfrac{25}{x} + \dfrac{15}{y} = \dfrac{8}{3}$ и $\dfrac{25}{x} \ge 1$, $\dfrac{15}{y} \ge 1$. Наибольшее значение $x_{max} = 25$ соответствует наименьшему значению $y_{min} = 9$, а наименьшее значение $x_{min} = 15$ – наибольшему значению $y_{max} = 15$. Поэтому $x > y$, т.е. река течет

от A к B, а максимальная скорость течения равна $\frac{x_{\max} - y_{\min}}{2} = 8(\text{км/ч})$.

10. 1. *Указание.* Докажите, что

$$\Phi = \left\{(x, y, z) \middle| |x| < 1, |y| < \frac{1}{8}, |z| < 1\right\}.$$

В самом деле, если $|x| < 1, |y| < \frac{1}{8}$ и $|z| < 1$, то для некоторого N при всех $n > N$ имеем $|x|^n < \frac{1}{9}$, $|8y|^n < \frac{1}{3}$, $|z|^n < \frac{1}{3}$, т.е. $3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1$. И, наоборот, если $3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1$, то и $|x| < 1$, $|y| < \frac{1}{8}$, $|z| < 1$.

Вариант 2

1. 28 мин. *Указание.* На пути от B до A скорость автобуса отличалась от исходной множителем $\frac{19}{20} < 1$, так что в пункт A он прибыл с 10-минутным опережением. Пусть x – время в пути от A до B по расписанию, а t – продолжительность остановки. Тогда $x = \frac{20}{19}x - 10$, т.е. $x = 190$, а $t = \frac{x}{5} - 10 = 28$.

2. -1. *Указание.* Пусть $a = x - 2$, $b = \log_2 x$. Тогда

$$|ab| + \big||a| - |b|\big| \le ab.$$

Но это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} ab \ge 0, \\ |a| = |b|. \end{cases}$$

3. $[1; 2) \cup (2; \sqrt{5}]$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{(3-x)^2 - (5-x^2)}{\dfrac{2x-7}{4} - \dfrac{x-5}{4}} \ge 0, \\ |x| \le \sqrt{5}. \end{cases}$$

4. 18; $r_1/r_2 \in (1/3; 1) \cup (1; 5/3)$. *Указание.* AB – касательная к первой окружности (это следует из того, что $\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AC}$ – докажите это!). Но тогда $BE \cdot BC = AB^2$ и $BC = 18$. Поскольку при этом $BC - AB < AC < AB + BC$, то $\frac{r_1}{r_2} = \frac{AC}{BC} \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$, причем $r_1 \ne r_2$.

5. 0; $4 + 2\sqrt{3}$. *Указание.* Приведите первое уравнение к виду

$$\cos(x - \varphi) = \cos\varphi_1,$$

где $\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{a-1}{\sqrt{3}}$, $\varphi_1 = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3 + (a-1)^2}}$, а второе – к виду

$$\sin y\left(\cos(y + \psi) - \cos\psi_1\right) = 0,$$

где $\psi = \operatorname{arctg}\frac{a}{2}$, $\psi_1 = \arccos\left(-\frac{3}{2\sqrt{a^2+4}}\right)$. Далее получим, что

$x = 2\varphi + 2\pi n$, $y = \pi - 2\psi + 2\pi m$.

Вычислите теперь $\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}$ и найдите a из полученного уравнения.

6. $4\sqrt{6}$. *Указание.* Проведите через AC плоскость π, параллельную BD. Докажите, что $AB \perp \pi$, а $V_{ABCD} = V_{ACFD}$, где F – проекция точки D на плоскость π.

Вариант 3

1. $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right) \cup [1; +\infty)$. *Указание.* Перейдите к логарифмам по основанию 2.

2. $\left(x_n; \frac{\pi}{4} + \pi n - x_n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \ne -2, -1, 0, 1$, где

$$x_n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 - 36}$$

3. $(0; -1)$. *Указание.* Рассмотрите уравнение как квадратное относительно x. Условие неотрицательности его дискриминанта дает два целых значения: $y = -1$ и $y = 0$.

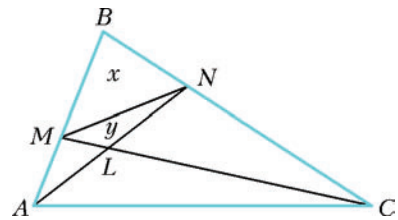

Рис. 5

4. $\frac{15}{2}$. *Указание.* Пусть $S_{MBN} = x$, $S_{MLN} = y$ (рис.5). Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{S_{NML}}{S_{NLC}} = \frac{S_{AML}}{S_{ALC}} \quad \text{и} \quad \frac{S_{BNM}}{S_{AMN}} = \frac{S_{BCM}}{S_{ACM}}.$$

5. $\frac{2\sqrt{42}}{3}$. *Указание.* Пусть $SH = h$ и $AB = a$ (рис.6), а R – искомый радиус. Тогда $BH = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $h\sqrt{2} = a\sqrt{3}$. Из подобия прямоугольных треугольников SHF и SEH следует равенство отношений $SH : HE = SF : HF$, значит,

$$\frac{h}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{a}.$$

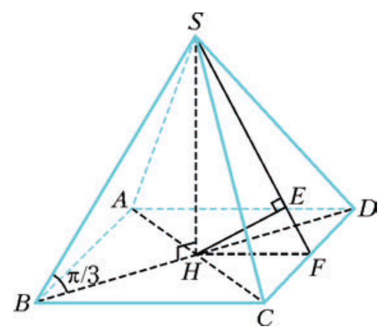

Рис. 6

Следовательно, $h = \sqrt{42}$ и $a = 2\sqrt{7}$. Осталось найти радиус сферы, совпадающий с радиусом окружности, описанной около треугольника BSD.

6. $\pm\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

После замены $t = |\sin x|$, где $0 \le t \le 1$, исходное уравнение преобразуем в систему

$$\begin{cases} 4u^2 - 8tu - 4t - 1 = 0, \\ u = \sqrt{6t^2 + t}. \end{cases}$$

Первое уравнение, квадратное относительно u, дает два уравнения: $u = 2t + \frac{1}{2}$, $u = -\frac{1}{2}$ (что невозможно, так как из второго уравнения системы $u \ge 0$), так что $\sqrt{6t^2 + t} = 2t + \frac{1}{2}$, откуда следует, что $|\sin x| = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Вариант 4

1. $\left(0; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$. **2.** $\pi + \operatorname{arcctg} 2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $S_{100} = 15\,050$; $b_{40} = 81$. *Указание.* Обозначим первые члены и разности арифметических прогрессий $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ через a_1, d_1 и b_1, d_2 соответственно. Члены с четными номерами последовательности $\{c_n\}$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_2 + b_2$ и разностью $2d = 2(d_1 + d_2)$, а члены с нечетными номерами этой последовательности –

арифметическую прогрессию с первым членом $\left(-\left(a_1+b_1\right)\right)$ и разностью $(-2d)$. Поэтому сумма первых 40 членов последовательности $\{c_n\}$ равна

$$\left(c_1+c_3+\ldots+c_{39}\right)+\left(c_2+c_4+\ldots+c_{40}\right)=20d,$$

откуда $d=5$.

Сумма первых 23 членов последовательности $\{c_n\}$ равна

$$\left(c_1+c_3+\ldots+c_{23}\right)+\left(c_2+c_4+\ldots+c_{22}\right)=-\left(a_1+b_1\right)-11d=-60,$$

откуда $a_1+b_1=5$. Дальнейшее ясно.

4. $4\sqrt{10}-2\sqrt{15}$. *Указание.* Пусть h_A и h_C – расстояния от точки A до прямой CD и от точки C до прямой AD соответственно (рис.7). Тогда

$$h_A\cdot CD=h_C\cdot AD \Leftrightarrow \frac{AD}{CD}=\frac{h_A}{h_C}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

поэтому

$$AD=CD\sqrt{\frac{2}{3}}=20\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

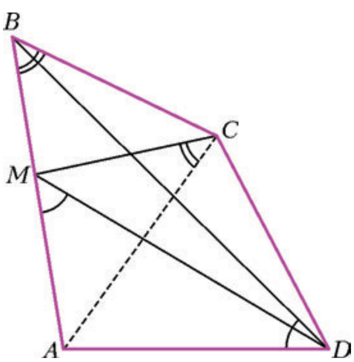

Рис. 7

Далее, из подобий $\Delta AMD \sim \Delta ADB$ и $\Delta ABC \sim \Delta ACM$ следует, что $AD^2=AM\cdot AB$, $AC^2=AM\cdot AB$, так что треугольник ACD – равнобедренный, $AC=AD=$ $=20\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $CD=20$. Находим его площадь, полупериметр, а затем и радиус вписанной окружности по формуле

$$r=\frac{S}{p}.$$

5. $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}-3\right]\cup\left(\frac{5\pi}{2}-6;\frac{7\pi}{2}-9\right]$. *Указание.* Возможны 3 случая:

1) $1\le x<2$; тогда $3x+a=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Из того, что $0\le a\le\pi$ и $1\le x<2$, следует, что $n=0$. Итак, $x=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{3}$.

2) $2\le x<3$; тогда аналогично получим $x=\frac{5\pi}{6}-\frac{a}{3}$.

3) $3\le x\le\pi$; получим $x=\frac{7\pi}{6}-\frac{a}{3}$.

Остается выписать значения a из указанного в условии задачи промежутка, для которых данное уравнение имеет нечетное число решений $x\in[1;\pi]$. Упростить этот отбор позволяет зависимость решений от параметра, изображенная на рисунке 8. Легко видеть, что при $a\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}-3\right]$ существуют три решения уравнения, а при $a\in\left(\frac{5\pi}{2}-6;\frac{7\pi}{2}-9\right]$ – одно решение.

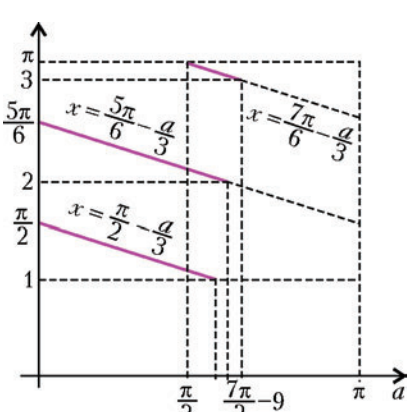

Рис. 8

6. 32.

Параллельные прямые AD и KN (рис.9), очевидно, лежат в одной плоскости. Пусть эта плоскость пересекает прямую BC в точке A_1. Поскольку K лежит на грани ABC, то A_1 принадлежит отрезку BC. Обозначим $x=\frac{KN}{AD}$. Тогда из подобия треугольников KA_1N и AA_1D, а также из сравнения площадей треугольников с общим основанием BC следует, что

$$x=\frac{KN}{AD}=\frac{KA_1}{AA_1}=\frac{S_{\Delta KBC}}{S_{\Delta ABC}}.$$

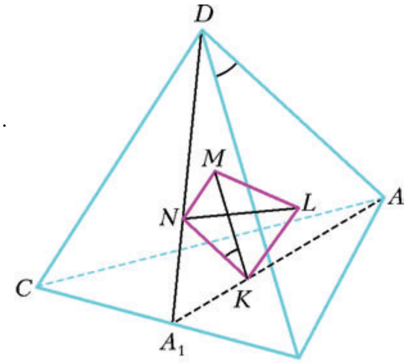

Рис. 9

Аналогично, если $y=\frac{KM}{BD}$ и $z=\frac{KL}{CD}$, то

$$y=\frac{S_{\Delta KAC}}{S_{\Delta ABC}} \text{ и } z=\frac{S_{\Delta KAB}}{S_{\Delta ABC}}.$$

Поскольку точка K принадлежит грани ABC, получаем равенство

$$x+y+z=\frac{1}{S_{\Delta ABC}}\left(S_{\Delta KBC}+S_{\Delta KAC}+S_{\Delta KAB}\right)=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}=1.$$

Преобразуем равенство из условия задачи:

$$2\left(AD\cdot KM+BD\cdot KN\right)=AD\cdot BD \Leftrightarrow \frac{KM}{BD}+\frac{KN}{AD}=\frac{1}{2},$$

т.е. $x+y=\frac{1}{2}$. Значит, $z=\frac{1}{2}$. Из параллельности сторон следуют равенства пар углов

$$\angle MKN=\angle ADB,\ \angle LKN=\angle ADC,\ \angle LKM=\angle BDC.$$

Тогда равны трехгранные углы $DABC$ и $KNML$ (по трем плоским углам).

Известно, что отношение объемов двух тетраэдров с равными трехгранными углами при вершине равно отношению произведений длин ребер, выходящих из этой вершины. Таким образом, используя условия задачи, находим

$$\frac{V_{DABC}}{V_{KNML}}=\frac{DA\cdot DB\cdot DC}{KN\cdot KM\cdot KL}=\frac{1}{xyz}=64,$$

а с учетом равенства $z=\frac{1}{2}$ получаем и отношение площадей:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta KMN}}=\frac{1}{xy}=32.$$

Вариант 5

1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{2\pi n}{9}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

2. $[-1;0)$.

3. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\log_{\frac{5}{3}}3$; $\frac{1}{\sqrt{3}}\log_{\frac{5}{3}}4\sqrt{3}$.

4. $\frac{qs-t^2}{t}$.

5. $\left(\frac{5}{3};-\frac{7}{3}\right)$. *Указание.* В первом уравнении выполните замену $t=\sqrt{x-y}$ и решите полученное уравнение.

6. 8. *Указание.* Пусть AB – диаметр, на котором лежит точка H, а $HO=x$ (рис.10). По свойству отрезков хорд, $LH\cdot HN=(R-x)(R+x)$. Но $MH^2=LH\cdot HN$, откуда $MH^2=MK^2-x^2=R^2-x^2$, т.е. $MK=R=8$.

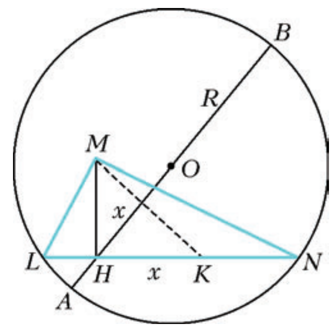

Рис. 10

7. $\left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$ при $a \in \left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$,

$\left(0; \frac{1}{a}\right)$ при $a \in \left(\sqrt{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$,

$\varnothing$ при остальных a.

Указание. Неравенство равносильно такому:

$$\frac{\log_2 \frac{a}{2}}{\log_2 ax} \frac{\log_2 (a-1)}{\log_2 \left(a^2-2\right)} < 0 .$$

Далее, пользуясь тем, что в области определения функции $w = \log_v u$ знак ее совпадает со знаком выражения $(u-1)(v-1)$, приводим неравенство к виду

$$\frac{\frac{a}{2}-1}{ax-1} \frac{(a-1)-1}{\left(a^2-2\right)-1} < 0 .$$

8. $5\sqrt{6}/3$.

Центр O сферы, проходящей через вершины прямоугольного треугольника MNL, находится на перпендикуляре к плоскости треугольника MNL, проходящем через центр окружности, описанной около треугольника MNL, т.е. через середину гипотенузы ML (рис.11).

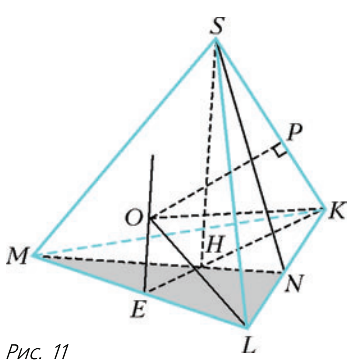

Рис. 11

Пусть $OL = OP = R$ – радиус этой сферы (P – точка ее касания с ребром SK), $ML = a$, $SH = h$, $SN = k$. Тогда по цепочке прямоугольных треугольников имеем: $OL^2 - EL^2 + KE^2 - OP^2 = PK^2$, т.е. $R^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - R^2 = PK^2 \Rightarrow PK = \frac{a}{\sqrt{2}}$. По условию, $KP : PS = 1 : 2 \Rightarrow SK = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Далее: в ΔSHK $\quad h = a\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{5a}{\sqrt{6}} \Rightarrow a = \frac{h\sqrt{6}}{5}$.

Наконец,

$$k = \sqrt{SK^2 - NK^2} = a\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{1}{4}} = a\frac{\sqrt{17}}{2} =$$

$$= \frac{h\sqrt{6}}{5}\frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow k = h\frac{\sqrt{16}}{5}\frac{\sqrt{17}}{2} .$$

Задавая по условию $k = \sqrt{17}$, находим $h = SH = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

Вариант 6

1. ± 1 . **2.** $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **3.** $\frac{\pi}{10}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 10. **5.** $(2; 0)$.

6. 2. *Указание.* Если x_0 – корень данного уравнения, то и $x_1 = \frac{x_0 + 1}{3x_0 - 1}$ – тоже его корень, поскольку тогда $x_0 = \frac{x_1 + 1}{3x_1 - 1}$ и $|x_1| + \left|\frac{x_1 + 1}{3x_1 - 1}\right| = a$. Следовательно, для того чтобы число корней было нечетным, необходимо, чтобы один из них был корнем уравнения

$$x = \frac{x+1}{3x-1} ,$$

т.е. либо $x = 1$, либо $x = -\frac{1}{3}$, для которых либо $a = 2$, либо $a = \frac{2}{3}$. Осталось проверить полученные значения a.

Вариант 7

1. ± 1 . **2.** $-\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $16\sqrt{5}$. **4.** $[1; 2)$.

5. 4. *Указание.* Пусть x и y – скорости первого и второго спортсменов. Тогда

$$\begin{cases} \frac{10000}{y} = \frac{10000}{x} + \frac{50}{3}, \\ \frac{800}{x-y} = \frac{10000}{x} - \frac{130}{3}. \end{cases}$$

Отсюда найдите x и y, а затем и количество обгонов.

6. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. *Указание.* Из первого уравнения системы следует, что сумма расстояний от точки $M(x; y)$ до точек $A = (-1; -1)$, $B(1; 11)$ равно длине отрезка AB, а это значит, что M лежит на этом отрезке. Но тогда $y + 1 = (x+1)\frac{12}{2}$, $0 \le x + 1 \le 2$.

7. $\frac{\pi}{35}$. *Указание.* Докажите, что при всяком рациональном $x = \frac{p}{q}$ имеет место равенство $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$, так что $f\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2}{7} f(1)$, но условие $f(10) = -\pi$ означает, что $f(1) = -\frac{\pi}{10}$.

Вариант 8

1. 4. **2.** $\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **3.** $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **4.** 10 ч.

5. 7. *Указание.* Для многочлена $p(x)$ сумма коэффициентов равна $p(1)$, а свободный член равен $p(0)$.

6. 1:3. *Указание.* Найдите координаты точки пересечения прямых AC и BD. Для этого запишите уравнения этих прямых.

Вариант 9

1. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $2\pi k$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

2. 150. *Указание.* Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен полуразности оснований.

3. $\left[\frac{4}{5}; 1\right)$.

4. $\frac{3\pi}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. *Указание.* Система задает на плоскости $(x; y)$ круговой сектор, центр которого находится в точке $(2; 1)$, радиус равен $\sqrt{2}$, а центральный угол составляет 270°.

5. 26.

Если на каждом из N станков вытачивали по x деталей в день, то потом стали вытачивать по $1{,}2x$. Поэтому x делится на 5, а $Nx = 5850$. Кроме того, $(N-4) \cdot 1{,}2x \ge Nx > (N-5) \cdot 1{,}2x$, откуда следует оценка $30 > N \ge 24$. Но $5850 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ делится на N. Значит, $N = 26$.

6. $\pi\sqrt{\frac{7}{2}}$. *Указание.* Пусть A – вершина конуса, AB и AC – данные образующие. Есть 2 возможности: $\angle BAC = 45°$ либо

$\angle BAC = 135°$. Угол развертки конуса равен $\gamma = 2\pi\frac{r}{l}$, где l – длина образующей, а r – радиус основания конуса. Вычислите отношение $\frac{r}{l}$ для обоих возможных случаев и получите ответ.

Вариант 10

1. $\{-1\}\cup\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **2.** $\left[-3; \frac{\sqrt{41}-5}{4}\right]$. **3.** $1;\ \frac{\sqrt{85}}{2}$.

4. 5π. *Указание.* Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}\cos 2x + 5\cos x + 4 = 0,\\ x - 15 - 5\cos x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z},\\ x \ge 10.\end{cases}$$

Отсюда $n \ge 2$, поэтому наименьший корень данного уравнения равен $x = 5\pi$.

5. 0 либо 3.

6. $\left[\frac{2}{3}; 1\right)\cup[3; +\infty)$. *Указание.* В области определения, т.е. при $x > 0$, $x \ne 1$, равносильны следующие переходы:

$$\frac{1}{\log_{x+\frac{1}{3}} x} \le \frac{2}{\log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3) - \log_{x+\frac{1}{3}} x^2}{\log_{x+\frac{1}{3}} x \cdot \log_{x+\frac{1}{3}}(2x+3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(2x+3-x^2\right)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 (x-1)(2x+2)} \le 0.$$

7. $[-1; 5]$.

Пусть $y = x + a$, тогда данное неравенство принимает вид

$$|y-2| + 2|y-2a+2| \le 3.$$

Раскрывая первый из модулей, запишем это неравенство в виде системы

$$\begin{cases}y - 2 \le 3 - 2|y-2a+2|,\\ y - 2 \ge -3 + 2|y-2a+2|,\end{cases}$$

или

$$-1 + 2|y-2a+2| \le y \le 5 - 2|y-2a+2|.$$

Отсюда следует, что переменная y не может принимать значений, выходящих за пределы отрезка $[-1; 5]$. Покажем, что искомым множеством является весь этот отрезок. Достаточно убедиться, что граничные значения достигаются. Действительно, $y = -1$ получаем из равенства $-1 - 2a + 2 = 0$, т.е. при $a = \frac{1}{2}$. Аналогично, $y = 5$ получается при $5 - 2a + 2 = 0$, т.е. для $a = \frac{7}{2}$.

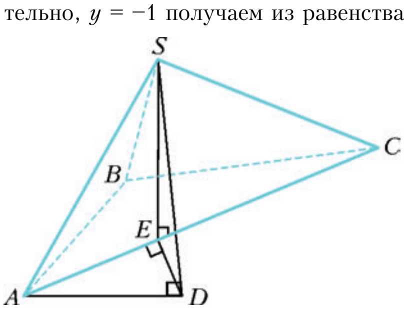

Рис. 12

8. $\frac{12}{5}$. *Указание.* Вычислите двумя способами объем V пирамиды $SABC$. Пусть h — искомая величина, тогда $V = \frac{1}{3}hS_{ASC} = \frac{1}{3}SD\cdot S_{ABC}$ (рис.12). Найдите SD и площадь треугольника ASC (для чего найдите его высоту SE).

Вариант 11

1. $0, \pm1, \pm2, +3$. **2.** 240. **3.** $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)\cup(3; +\infty)$. **4.** 2π.

5. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* После замены $v = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ уравнение приводится к виду $3v^3 - 2v^2 + v - 2 = 0$, или $(v-1)\left(3v^2 + v + 2\right) = 0$.

6. 2; $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$. *Указание.* Пусть $AC = x$, $CD = l$. По свойству биссектрисы, $l^2 = 2x - 2(x-2) = 4$, т.е. $l = 2$.

7. 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. *Указание.* Квадратный трехчлен относительно x отрицателен при всех x тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен.

Вариант 12

1. $\frac{9\pi}{8}(4k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{9}} \sin 4x = 0,\\ \log_{\frac{1}{9}} \operatorname{ctg}\frac{2x}{9} = 0.\end{cases}$$

2. 18.

3. 962500 руб. *Указание.* Среди чисел от 1 до 1000 на 13 делятся 76 чисел, на 5 делятся 200 чисел, а на 5 и 13 одновременно делятся 15 чисел.

4. $\left[1-\sqrt{23}; -\frac{7}{2}\right)\cup\left(-\frac{7}{2}; -\sqrt{\frac{34}{3}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{34}{3}}; 4\right)$.

Указание. Переходя к основанию $a = \sqrt{5} - 2 < 1$, имеем

$$\log_a(4-x) + \log_a|2x+7| \ge \log_a\left(x^2+x-6\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(4-x)\cdot|2x+7| \le x^2+x-6,\\ 4-x > 0, \quad x \ne -\frac{7}{2}.\end{cases}$$

5. $2\sqrt{3}+4$, $2\sqrt{3}+4$, $4\sqrt{3}+6$.

Так как K, M, N – точки касания вписанной окружностью сторон треугольника ABC, то $BM = BN$, $AN = AK$, $CM = CK$ (рис.13). Из $AK = CK$ следует, что $AB = BC$, а в треугольнике KMN $\angle N = \angle M = 75°$, $\angle K = 30°$.

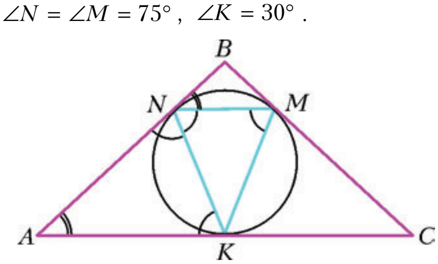

Рис. 13

Вписанная в треугольник ABC окружность является описанной около треугольника KNM. Пусть R – ее радиус, тогда $MN = 2R\sin 30° = R$, $MK = NK = 2R\sin 75° = \frac{R}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Вычисляя произведение $MN\cdot MK\cdot NK$, находим, что

$$R = \sqrt{3},\ MN = \sqrt{3},\ MK = NK = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}}.$$

Угол ANK, как угол между касательной и хордой, равен углу NMK, так что $\angle ANK = \angle AKN = 75°$, поэтому треугольники ANK и KNM подобны. Следовательно,

$$\frac{AK}{KN} = \frac{KN}{NM}, \text{ и } AK = 2\sqrt{3}+3,$$

значит, $AC = 2AK = 6 + 4\sqrt{3}$.

Наконец, из подобия равнобедренных треугольников ABC и

NBM вытекает равенство

$$\frac{AN+BN}{BN}=\frac{AC}{NM}\text{, откуда } BN = 1.$$

Таким образом, $AB = BC = AN + BN = 2\sqrt{3}+4$.

6. $\left(-\frac{2}{3};1\right)$, $\left(-1-\frac{1}{l-1};l^2+l-1\right)$, $\left(-1+\frac{1}{l+2};l^2+l-1\right)$,

$l\in\boldsymbol{Z}$, $l\neq -5,-2,1,4$.

Указание. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}|\cos\pi y|=1,\\ y+2\neq 0,\quad |y+2|\neq 21,\\ y(x+1)^2-x^2+x+1=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=k\in\boldsymbol{Z},\quad k\neq -2,-23,19,\\ (k-1)x^2+(1+2k)x+k+1=0.\end{cases}$$

При $k = 1$ имеем $x=-\frac{2}{3}$, т.е. $\left(-\frac{2}{3};1\right)$ – решение.

При $k\neq 1$ квадратное уравнение имеет рациональные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант является квадратом целого числа:

$$D=4k+5=m^2,\ m\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, $m = 2l + 1$, т.е.

$$k=l^2+l-1,\ l\in\boldsymbol{Z}.$$

Неравенство $k\neq 1$ приводит к ограничению $l\neq 1,-2$. Учтем теперь, как выражаются в терминах переменной l условия $k\neq -2$, $k\neq -23$, $k\neq 19$. Первые два из них выполнены всегда, а условие

$$k\neq 19\Leftrightarrow l\neq 4,-5.$$

Осталось найти решения квадратного уравнения из последней системы и записать ответ.

7. $(0;16\pi)$. *Указание.* Числитель дроби из левой части данного выражения всегда положителен, а знаменатель неотрицателен. Таким образом, на области определения заданное неравенство выполнено всегда при условии необращения в ноль знаменателя, что равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}-22\le y-x\le 4,\\ -14\le y+x\le 4,\\ x\neq 4,\\ \left|\sqrt{9\sqrt{128}-9x}+x\right|+|y+5|\neq 0.\end{cases}$$

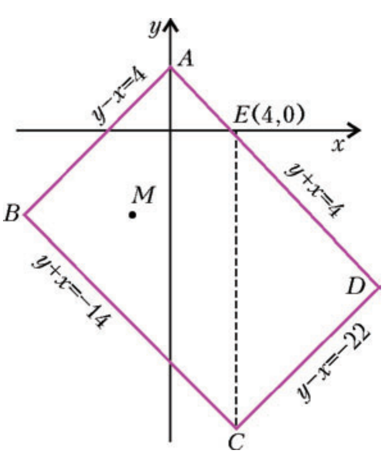

Рис. 14

Первые два неравенства задают на плоскости $(x;y)$ прямоугольник (рис.14) с вершинами в точках $A(0;4)$, $B(-9;-5)$, $C(4;-18)$ и $D(13;-9)$, стороны которого наклонены под углом 45° к осям координат. Последние же два неравенства соответствуют «разрезу» по отрезку прямой EC (здесь $E(4;0)$) и «выколотой» точке $M\left(-\sqrt{72\sqrt{2}-97};-5\right)$. Таким образом, следует рассмотреть круги, расположенные в четырехугольнике $ABCE$ и не содержащие точку M, и круги, целиком содержащиеся в треугольнике CDE.

Вариант 13

1. $[1;+\infty)$. **2.** $(-\infty;-2]$. **3.** -3. **4.** $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$. **5.** 6; 8; 10; 12.

6. $(2;3)$; $(3;2)$; $(3;3)$; $(4;3)$; $(5;4)$. *Указание.* Из первого неравенства данной системы следуют оценки

$$\begin{cases}|x-3|<\sqrt{5},\\ |y-4|<\sqrt{5}.\end{cases}$$

Это означает, что $1\le x\le 5$ и $2\le y\le 6$.

Второе неравенство дает

$$y\le\frac{x+11}{4},\quad x\ge 4y-11,$$

откуда

$$2\le y\le 4.$$

Теперь все целочисленные решения системы неравенств можно найти перебором.

7. $90\sqrt{3}$.

8. $(-\infty;1]\cup\left\{\frac{5}{4}\right\}\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$. *Указание.* Разделив обе части исходного уравнения на $4^x\neq 0$, перейдем к переменной $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$. Зависимость t от x строго монотонна, поэтому каждому $t > 0$ соответствует ровно одно значение x. Таким образом, надо найти все значения a, при которых в области $t > 0$ уравнение

$$(3a-4)t^2-(2a-3)t-(a-1)=0$$

имеет единственное решение. Корни этого уравнения (при $a\neq\frac{4}{3}$): $t_1=1$ и $t_2=\frac{1-a}{3a-4}$. Случай $a=\frac{4}{3}$ очевиден.

Вариант 14

1. ± 3. **2.** $(-\infty;1]\cup(\log_2 11;+\infty)$.

3. $-\frac{\pi}{12}+2\pi k$, $-\frac{11\pi}{12}+2\pi n$, $k,n\in\boldsymbol{Z}$.

4. $\arccos\frac{5}{8}+\frac{\pi}{2}$; $4\sqrt{\frac{22}{13}}$. *Указание.* Пусть $BM\perp AD$, $CK\perp BM$ (рис.15), $AB = AC = BD = x$. Найдите BK, а затем составьте уравнение относительно x, пользуясь теоремой Пифагора.

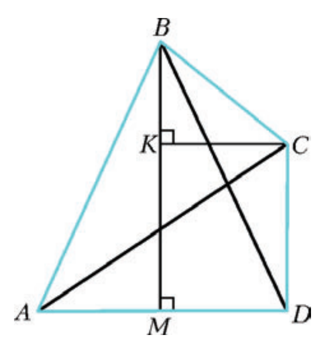

Рис. 15

5. 5. *Указание.* Пусть u и v – скорости черепахи и Ахилла соответственно. Пусть также в первой игре черепаха двигалась p минут, во второй – q минут, а Ахилл – r и s минут соответственно. Тогда

$$\begin{cases}v=50u,\\ p+r\ge 15,\\ q+s\le\frac{3}{2},\\ pu+rv+10u+v=uq+vs.\end{cases}$$

Докажите, что неравенства этой системы на самом деле являются равенствами.

6. $0<|a|\le 2$. *Указание.* Выполнив замену $t=\sin x$, приходим к такой переформулировке задачи: при каких значениях a уравнение $y=\frac{4t+a}{4a-2t}$ имеет корень на отрезке $[-1;1]$ для любого $y\in[0;1]$?

Решая это уравнение относительно t, получаем $t=2a-\frac{9a}{2(y+2)}=f(y)$. Ясно, что $a\neq 0$. При $a\neq 0$ функция

$2-\dfrac{9}{2(y+2)}$ монотонно возрастает на отрезке $[0;1]$, а t при этом принимает значения от $f(0)=-\dfrac{a}{4}$ до $f(1)=\dfrac{a}{2}$. Условие $|t|\le 1$ означает, что $\left|\dfrac{a}{4}\right|\le 1$, $\left|\dfrac{a}{2}\right|\le 1$.

Вариант 15

1. $(-\infty;-1)\cup(-1;5]$. **2.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt3}{2}+2\pi k$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$.

3. $\dfrac{-3+\sqrt5}{2}$. *Указание.* После замены $y = x + 2$ уравнение принимает вид

$$\sqrt{y-1}+\sqrt{y^2-1}=y\sqrt{y},$$

откуда

$$\begin{cases} y^2-1=\left(y\sqrt{y}-\sqrt{y-1}\right)^2, \\ y\sqrt{y}\ge\sqrt{y-1}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \left(\sqrt{y^2-y}-1\right)^2=0, \\ y\ge 1. \end{cases}$$

Отсюда $y=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$, т.е. $x=\dfrac{-3+\sqrt5}{2}$.

4. 5%.

5. $\left(-\dfrac13;-\dfrac14\right)\cup\left(-\dfrac16;-\dfrac1{10}\right)$. *Указание.* Замена $t=\log_{4|x|+1}(6x+2)$ приводит к неравенству

$$t-\frac1t<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t<1 \\ t<-1. \end{array}\right.$$

6. $\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{7\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12}$ либо $\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3};\alpha;\dfrac{5\pi}{6}-\alpha$, где $\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt3}{2\sqrt{4-\sqrt3}}$.

Последовательно обозначая вершины, получаем три различных четырехугольника: $ABCD$, $ACBD$ и $ABDC$ (другие отличаются лишь направлением перечисления последовательно идущих вершин).

а) Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис.16,*а*). Пусть E – точка пересечения прямых AD и BC. Тогда треугольники

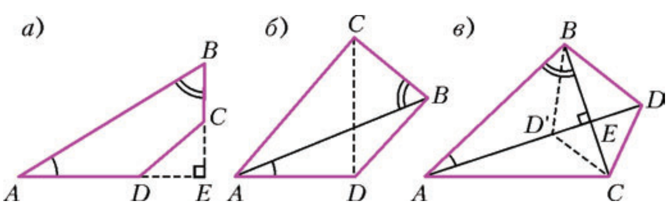

Рис. 16

AEB и CED прямоугольные, так как $\angle BAD+\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$.

Поэтому $BE=AB\sin\dfrac{\pi}{6}=\sqrt3$, $AE=AB\cos\dfrac{\pi}{6}=3$.

Следовательно, $CE=BE-BC=2-\sqrt3$, $DE = AE - AD = 1$.

Из треугольника CED имеем $\operatorname{tg}\angle CDE=2-\sqrt3$, т.е. $\angle CDE=\operatorname{arctg}\left(2-\sqrt3\right)=\dfrac{\pi}{12}$.

Теперь находим углы четырехугольника $ABCD$:

$$\angle ADC=\pi-\angle CDE=\frac{11\pi}{12},\ \angle BCD=\frac{7\pi}{12}.$$

б) В четырехугольнике $ADBC$ (рис.16,*б*) из треугольника ABD по теореме косинусов получаем, что $BD = 2$, следовательно, треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ABD=\dfrac{\pi}{6}$, так что $\angle ADB=\dfrac{2\pi}{3}$, $\angle DBC=\dfrac{\pi}{2}$.

Из треугольника ABC находим с помощью теоремы косинусов, что $AC=2\sqrt{4-\sqrt3}$. Из прямоугольного треугольника CBD следует $CD^2=4\left(5-2\sqrt3\right)$.

Пусть $\alpha=\angle CAD$, тогда из теоремы косинусов для треугольника ACD имеем

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt3}{2\sqrt{4-\sqrt3}}.$$

Осталось найти последний из углов четырехугольника.

в) В четырехугольнике $ABDC$ (рис.16,*в*) прямые AD и BC пересекаются в точке, которую мы обозначим через E, под прямым углом. Так же, как в п. а), находим $AE=2\sqrt3\times\cos\dfrac{\pi}{6}=3$. Но по условию $AD = 2$, следовательно, точка D занимает положение D', так что четырехугольник $ABDC$ не является выпуклым, т.е. не отвечает условию задачи.

7. $12\sqrt2$. *Указание.* Пользуясь тем, что

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2,\ 2\left(x^2+y^2\right)=(x+y)^2+(x-y)^2,$$

преобразуйте исходное выражение к виду

$$\left(\left(p^2-2p+4\right)^2-(x+y)^2\right)\left(\left(p^2+2p+4\right)^2-(x-y)^2\right)=0,$$

откуда

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+y=p^2-2p+4 \\ x+y=-\left(p^2-2p+4\right) \\ x-y=p^2+2p+4 \\ x-y=-\left(p^2+2p+4\right). \end{array}\right.$$

При каждом значении p уравнения этой совокупности задают четыре прямые на координатной плоскости $(x;y)$. Поскольку

$$p^2-2p+4=(p-1)^2+3\ge3,\ p^2+2p+4=(p+1)^2+3\ge3,$$

указанные прямые не проходят только через точки области, определяемой системой неравенств

$$\begin{cases} |x+y|<3, \\ |x-y|<3, \end{cases}$$

задающей внутренность квадрата со стороной $3\sqrt2$.

Вариант 16

1. Можно. С 8 руб. 50 коп. по 16 руб. 00 коп. включительно.

2. $(5;+\infty)$. **3.** $(0; 0)$. **4.** $1+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

5. 69 руб. 43 коп.

Пусть истинная сдача составляла сумму $100x + y$ (коп.), где x, y – натуральные числа из промежутка $[1;99]$. Тогда выданная кассиром сдача была равна $100y + x$ (коп.). Из условия следует уравнение

$$100y + x = 140 + 300x + 3y.$$

Поскольку $43\le 3y+40\le 337$, сравнивая количество единиц и сотен в обеих частях уравнения, приходим к четырем возможным случаям:

1) $\begin{cases} x=3y+40, \\ y=3x+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 100+x=3y+40, \\ y-1=3x+1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 200+x=3y+40, \\ y-2=3x+1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 300+x=3y+40, \\ y-3=3x+1. \end{cases}$

Первые три системы не имеют решений в натуральных числах. Решением последней является пара $x = 31$, $y = 97$.

Итак, истинная сдача составляла 31 руб. 97 коп., так что общая сумма покупок равна 100 руб. − 31 руб. 97 коп. + + 1 руб. 40 коп. = 69 руб. 43 коп.

6. $a\ge0$. *Указание.* Введем новую переменную $t=\log_2\left(\dfrac1x-2\right)$. Здесь $0 < x < 2$. При условии задачи $x<\dfrac13$ имеем $t > 0$.

Итак, нужно найти все значения a, при которых для любого $b > 0$ существует хотя бы одно положительное решение уравнения

$$\frac{2a}{t} = t - b \text{, или } t^2 - bt - 2a = 0 .$$

Если $a > 0$, дискриминант $D = b^2 + 8a$ квадратного уравнения положителен, следовательно, существуют два решения, которые имеют различные знаки при любом b.
Если $a = 0$, то уравнение имеет корни $t = 0$ и $t = b$, второй из которых положителен тогда и только тогда, когда $b > 0$.
Пусть $a < 0$. Тогда всегда можно подобрать положительное значение b так, чтобы было выполнено неравенство $D < 0$ и квадратное уравнение не имело решений.
Итак, ответом задачи является множество значений параметра, удовлетворяющих условию $a \ge 0$.
7. *Указание.* Выпустим на трассу в произвольной точке A кольцевой дороги машину со 150 л бензина. Пусть на всех пунктах заправки эта машина забирает весь имеющийся бензин. Совершив полный круг, машина вернется в точку A со 150 л бензина. Проследим теперь, в какой точке трассы запас бензина в машине был минимален. Это будет в одном из пунктов заправки. Если явиться к этому пункту с пустым баком, залить имеющиеся 30 л и отправиться в путь, то заведомо удастся проехать весь маршрут (убедитесь в этом).

Вариант 17

1. 0; 4. **2.** $\pm\frac{1}{2}$. **3.** 2. **4.** $\frac{11}{3}$. **5.** $\left(-4; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$.
6. 20; 18000. *Указание.* Если группа школьников состояла из n человек, а взнос каждого составил m рублей, то

$$mn = (m+100)(n-2) ,$$

откуда

$$m = 50n - 100.$$

С другой стороны, для цены музыкального центра справедливо неравенство

$$17000 < n(50n - 100) < 19500 ,$$

из которого следует, что $n = 20$.

Вариант 18

1. 126. **2.** $\left(-\frac{3}{2}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup [-1; 0) \cup \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
3. $\frac{1}{2}$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left|8x^2 - 2x - 1\right| + \left|2x^2 - 5x + 2\right| \le 0, \\ \left|2x^2 - 5x + 2\right| < 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|8x^2 - 2x - 1\right| = 0, \\ \left|2x^2 - 5x + 2\right| = 0. \end{cases}$$

4. $4\sqrt{3}$.
5. Утверждение верно. *Указание.* Вводя переменную $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$, находим множество значений данной функции: $-4 \le y \le \frac{17}{8}$.
6. 20%.
7. $\frac{\pi}{2}$; $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Возможны два варианта расположения вершины S пирамиды – S' и S'' (рис.17,*а* и 17,*б*).
Пусть высота пирамиды равна h, тогда длина ребра куба равна $2h$.
1) Точка S' находится внутри куба $ABCDA'B'C'D'$; очевидно, S' – центр куба (см. рис.17,*а*). Проведем через S' прямую, параллельную $A'B$. Эта прямая пересекает ребра $A'D'$ и BC в их серединах – точках K и L соответственно. Угол между AS' и KL, величину которого обозначим через α, – искомый.

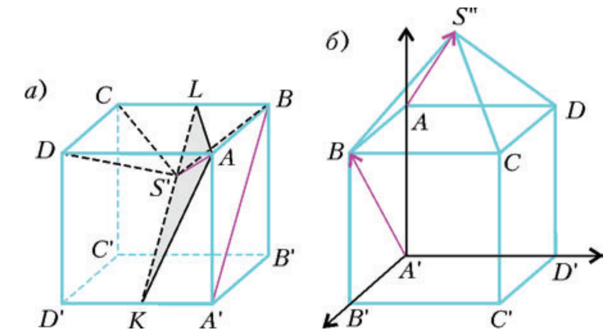

Рис. 17

Пересекающиеся прямые AS' и KL определяют плоскость, в которой находится треугольник AKL. Из вышесказанного следует $KS' = LS'$. Кроме того, $AK = AL$, так как треугольники $AA'K$ и ABL равны. Поэтому $AS' \perp KL$ как медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
2) Точка S'' находится вне куба (см. рис.17,*б*). Решим задачу для разнообразия координатно-векторным методом.
Введем прямоугольную систему координат с центром в точке A' и с осями, направленными по ребрам $A'B'$, $A'D'$ и $A'A$. Тогда интересующие нас точки имеют такие координаты: $A'(0; 0; 0)$, $B(2h; 0; 2h)$, $A(0; 0; 2h)$, $S''(h; h; 3h)$. Находим координаты векторов: $\overrightarrow{A'B} = (2h; 0; 2h)$, $\overrightarrow{AS''} = (h; h; h)$.
Если α – величина угла между $\overrightarrow{A'B}$ и $\overrightarrow{AS''}$, то, используя скалярное произведение векторов, имеем

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AS''}\right)}{\left|\overrightarrow{A'B}\right|\left|\overrightarrow{AS''}\right|} = \frac{2h^2 + 2h^2}{\sqrt{4h^2 + 4h^2}\sqrt{h^2 + h^2 + h^2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

8. $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Поскольку

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 ,$$

существует число φ такое, что

$$x - 3 = \sqrt{3}\cos\varphi ,\quad y + 2 = \sqrt{3}\sin\varphi ,\quad \varphi \in [0; 2\pi) .$$

Но тогда

$$2ax - 3y - 10 = \sqrt{3}\,(2a\cos\varphi - 3\sin\varphi) + 6a - 4 = U(\varphi) .$$

Нужно исследовать разность между максимальным и минимальным значениями $U(\varphi)$. Рассмотрим лишь слагаемые, зависящие от φ, и преобразуем их сумму:

$$\sqrt{3}\,(2a\cos\varphi - 3\sin\varphi) = \sqrt{3}\sqrt{4a^2 + 9}\cos(\varphi + \alpha) ,$$

где α – некоторое значение, определяемое из равенств

$$\cos\alpha = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 9}} ,\quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{4a^2 + 9}} .$$

Но тогда

$$U_{\max} - U_{\min} = 2\sqrt{3}\sqrt{4a^2 + 9} .$$

Осталось найти требуемые значения параметра a.

Физика

Физический факультет

1. Изменение силы натяжения подвеса, после того как стержень коснется поверхности воды, обусловлено действием сил со стороны воды на стержень. Поскольку диаметр стержня равен $d = 2\sqrt{\dfrac{M}{\pi\rho L}}$, толщина зазора между стенками цилиндра и стержнем составляет $\delta = 0{,}5(D-d) \approx 0{,}1416$ мм (оси стержня и цилиндра совпадают) и высота столба воды, отсчитываемая от нижнего основания стержня, при заданной толщине слоя воды между нижним основанием стержня и дном цилиндра (без учета капиллярных явлении) равна

$$H = \frac{(m/\rho_\text{в}) - 0{,}25\pi D^2 h}{0{,}25\pi\left(D^2 - d^2\right)} \approx 1{,}238 \text{ м},$$

где $\rho_\text{в} = 1$ г/см^3 – плотность воды. Так как в условии задачи не оговорено иное, будем считать, что цилиндр покоится относительно лабораторной системы отсчета и эту систему можно считать инерциальной. Тогда сила натяжения подвеса (считая величину ускорения свободного падения равной $g = 9{,}81$ м/с^2) уменьшится, без учета сил поверхностного натяжения, на величину

$$\Delta F = 0{,}25\pi d^2\rho_\text{в} gH = Mg\frac{4m - \pi D^2 h\rho_\text{в}}{\pi D^2 L\rho - 4M} \approx 0{,}9448Mg \approx 46{,}34 \text{ Н}.$$

Как известно, давление под искривленной поверхностью жидкости за счет действия сил поверхностного натяжения при условии смачивания стенок меньше (а несмачивания – больше) давления над плоской поверхностью при тех же внешних условиях на величину, определяемую формулой Лапласа: $\Delta p = \left(1/R_1 + 1/R_2\right)\sigma$, где R_1 и R_2 – так называемые главные радиусы кривизны поверхности, а σ – коэффициент поверхностного натяжения. В рассматриваемом случае при полном смачивании или несмачивании цилиндра и стержня $R_1 = \delta/2$, а $R_2 \approx D/2$. Поскольку $D \gg \delta$, максимальная поправка на изменение силы натяжения подвеса, обусловленная действием сил поверхностного натяжения, при заданном погружении цилиндра должна быть равна

$$F_\text{п} = \frac{2\sigma}{\delta}\frac{\pi d^2}{4} = \frac{2\sigma}{(D/2)\sqrt{M/(\pi\rho L)}}\frac{M}{\rho L} \approx 3{,}92 \text{ Н}$$

(коэффициент поверхностного натяжения воды при температуре $t = 20\,°\text{C}$ и давлении $p = 760$ мм рт. ст. равен $\sigma \approx 0{,}0728$ Н/м). В этом расчете мы не учитывали силу, с которой на цилиндр действует верхняя кромка жидкости: при смачивании – вниз, а при несмачивании – вверх. Читатель может убедиться самостоятельно, что величина этой силы составляет долю $2\delta/d$ от величины $F_\text{п}$, т.е. приблизительно 0,4%.

Итак, в зависимости от степени смачивания цилиндра и стержня водой сила натяжения подвеса может уменьшиться на любую величину от $\Delta F - F_\text{п} \approx 42{,}4$ Н до $Mg \approx 49{,}05$ Н (нить не может давить на стержень). В последнем случае необходимо считать, что $R_1 > \delta/2$, т.е. модуль косинуса краевого угла отличен от единицы.

Следует отметить, что при решении данной задачи было необходимо правильно выбрать точность числовых расчетов.

2. Из условия задачи следует, что груз будет двигаться поступательно вдоль оси стержня. Поэтому положение груза будем определять вдоль оси *X*, совпадающей с осью стержня и направленной в сторону движения подвижной стенки. Начало отсчета вдоль этой оси совместим с положением центра масс груза, которую он имел при $t \le 0$. Поскольку до начала движения правой стенки пружины не были деформированы, можно утверждать, что эта ось покоится относительно инерциального наблюдателя. Тогда при $0 < t \le \tau$, где $\tau = L/v$, уравнение движения груза будет иметь вид

$$mx'' = -kx + k(vt - x),$$

где m – масса груза, а x – смещение центра масс (или любой другой фиксированной точки) груза к моменту времени t. Приведенное уравнение нужно решить с учетом того, что $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, так как при $t = 0$ по условию задачи пружины не деформированы. Обозначив $x' = y$, получим уравнение

$$my'' = -2ky + kv.$$

Поскольку k и v не зависят от времени, решение этого уравнения должно иметь вид

$$y = y_0\cos(\omega t + \varphi) + C,$$

где $\omega = \sqrt{2k/m}$. Из условий $y_0\cos\varphi + C = 0$ и $-y_0\omega\sin\varphi = 0$ получаем $\varphi = 0$ и $y_0 = -C$. Следовательно, $C = 0{,}5v$, а

$$x'(t) = 0{,}5v(1 - \cos\omega t).$$

При $t = \tau$ по условию задачи $x'(\tau) = v$, поэтому

$$\omega\tau = \sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{L}{v} = \pi,$$

откуда

$$m = \frac{2kL^2}{\pi^2 v^2}.$$

3. Будем решать задачу, полагая, что плоскость покоится относительно инерциального наблюдателя, размеры тела достаточно малы, а влиянием воздуха на движение тела можно пренебречь. Выберем систему координат так, как показано на рисунке 18. Тогда уравнение движения тела массой m в проекциях на оси выбранной системы координат можно представить в виде

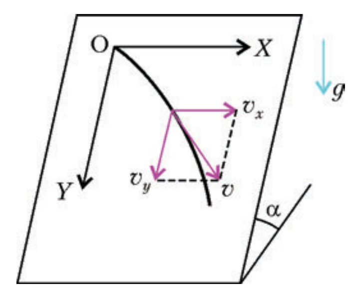

Рис. 18

$$mx'' = mv_x' = F_{\text{тр}\,x} = -\mu mg\frac{v_x}{v}\cos\alpha,$$

$$my'' = mv_y' = mg\sin\alpha + F_{\text{тр}\,y} = mg\sin\alpha - \mu mg\frac{v_y}{v}\cos\alpha,$$

где g – ускорение свободного падения, $F_{\text{тр}\,i}$ – проекция силы трения скольжения на соответствующую ось, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Из второго уравнения следует, что за малый промежуток времени dt приращение dv_y равно

$$dv_y = \frac{\left(v\sin\alpha - \mu v_y\cos\alpha\right)g\,dt}{v},$$

а приращение кинетической энергии тела составляет

$$dW_\text{к} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\,dv = mgv_y(dt)\sin\alpha - \mu mgv(dt)\cos\alpha,$$

откуда

$$dv = \frac{\left(v_y\sin\alpha - \mu v\cos\alpha\right)g\,dt}{v}.$$

Умножая уравнение для dv_y на $\sin\alpha$, а уравнение для dv на $\mu\cos\alpha$ и складывая эти произведения, получим

$$\frac{d}{dt}\left(v\mu\cos\alpha + v_y\sin\alpha\right) = \left(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha\right)g.$$

Поскольку при $t = 0$ тело имело $v = v_0$ и $v_y = 0$, из полученного уравнения следует, что

$$v\mu\cos\alpha + v_y\sin\alpha = v_0\mu\cos\alpha + \left(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha\right)gt.$$

Отсюда, учитывая, что в момент остановки скорость тела обращается в ноль, находим время движения тела:

$$t_{\text{ост}} = \frac{v_0\mu}{\left(\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha\right) g\cos\alpha}.$$

4. Как это обычно и делается при решении подобных задач, будем считать диск твердым телом. По условию задачи диск совершает плоское движение. Как известно, такое движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию двух движений: поступательного и вращательного вокруг оси, перпендикулярной плоскостям, в которых располагаются траектории точек диска. При этом скорость оси – скорость поступательного движения – зависит от выбора точки, называемой полюсом вращения, через которую проходит ось вращения, в то время как угловая скорость вращения не зависит от выбора полюса. Более того, всегда можно выбрать полюс так, чтобы для данного момента скорость оси вращения была равна нулю. Такую ось называют мгновенной осью вращения. При этом скорость любой точки твердого тела будет направлена перпендикулярно радиусу ее вращения (кратчайшему расстоянию от оси до данной точки) и равна произведению угловой скорости вращения на величину этого радиуса.

В соответствии со сказанным, находим точку O пересечения перпендикуляров к линиям скоростей точек A и B, восстановленных из этих точек (рис.19). Если из двух возможных по условию задачи направлений скорость точки A в момент времени $t = 0$ направлена так, как показано на рисунке 19, то диск должен вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega = v_A/\rho_A$, где $\rho_A = OA$ – мгновенный радиус вращения точки A. Из рисунка видно, что величина мгновенного радиуса ρ_B вращения точки B удовлетворяет соотношениям

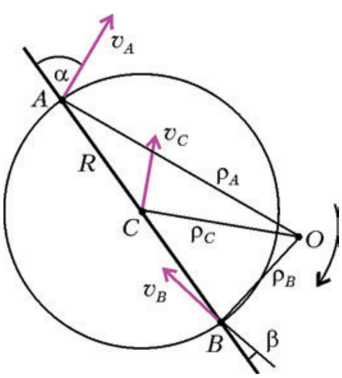

Рис. 19

$$\rho_A\cos\alpha = \rho_B\cos\beta, \qquad \rho_A\sin\alpha + \rho_B\sin\beta = 2R,$$

а потому

$$\rho_A = \frac{2R\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Кроме того, радиус вращения центра диска C в момент времени $t = 0$ равен

$$\rho_C = \sqrt{R^2 + \rho_A^2 - 2R\rho_A\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = R\sqrt{1 + \frac{4\cos^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{4\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}},$$

а скорость этой точки в указанный момент времени направлена так, как показано на рисунке, и ее величина равна

$$v_C = \rho_C\omega.$$

По условию задачи диск скользит по гладкой горизонтальной плоскости, является однородным и нет указаний, что он подвергается действию каких-либо иных объектов, кроме плоскости и земли. Поэтому на основании теоремы о движении центра масс можно утверждать, что скорость его центра направлена горизонтально и не зависит от времени, а потому величина его перемещения за время τ равна $\Delta r = v_C\tau$. Окончательный расчет дает

$$\Delta r = \frac{v_A\tau}{2}\sqrt{\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta} + 4\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\cos\beta}} = \frac{v_A\tau}{\sqrt{3}}.$$

5. Под действием электрических зарядов шариков на обращенных к ним сторонах пластин возникают индуцированные заряды противоположного знака. В результате на каждую из пластин со стороны ближайшего к ней шарика будет действовать сила притяжения, и пластины после отпускания начнут смещаться одинаковым образом от своих исходных положений. Пусть максимальное смещение каждой из пластин от исходного положения равно x_m. Поскольку размеры пластин велики и они соединены проводящей пружиной, можно считать, что электрического поля между пластинами нет, а энергия поля, создаваемого зарядами шариков и зарядами, индуцированными на указанных поверхностях пластин, когда пластины сместились от исходных положений на расстояние x, равна энергии поля двух точечных зарядов, находящихся в вакууме на расстоянии $2(L-x)$ друг от друга, т.е. равна

$$W_{\text{э}} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0(L-x)}.$$

При этом потенциальная энергия упруго деформированной пружины будет равна

$$W_{\text{п}} = 2kx^2.$$

В соответствии с условием задачи силами сопротивления движению пластин следует пренебречь. Будем пренебрегать также излучением, возникающим при неравномерном движении заряженных пластин, индуктивностью пружины и ее омическим сопротивлением.

Поскольку первоначально пластины покоились и при максимальном смещении их скорость равна нулю, то, согласно закону сохранения энергии,

$$-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0(L-x_m)} + 2kx_m^2.$$

Обозначим $y_m = x_m/L$ и $B = q^2\big/\left(16\pi\varepsilon_0 kL^3\right)$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$y_m^2 - y_m + B = 0,$$

откуда

$$y_m = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - B}.$$

Следовательно, $B \le 0{,}25$, т.е. $q^2 \le 4\pi\varepsilon_0 kL^3$, а потому искомая величина заряда должна быть чуть меньше

$$q_{\max} = 2L\sqrt{\pi\varepsilon_0 kL}.$$

6. После замыкания ключа K_1 конденсатор емкостью C_1 будет заряжаться, а конденсатор емкостью C_2 будет оставаться незаряженным, так как диод D_2 заперт. После размыкания ключа K_1 и замыкания ключа K_2 диод D_1 откроется, и конденсатор емкостью C_1 начнет разряжаться через этот диод и катушку индуктивности. К моменту полного разряда этого конденсатора ток через катушку достигнет максимума, а в следующий момент времени откроется диод D_2 и конденсаторы будут перезаряжаться до тех пор, пока ток через катушку не станет равным нулю. Поскольку диоды считаются идеальными, то, пренебрегая, как обычно, влиянием соединительных проводов, можно утверждать, что к моменту прекращения тока через катушку напряжения на конденсаторах будут равны и достигнут максимального значения. После этого диод D_1 будет заперт, а потому, пренебрегая токами утечки конденсаторов, следует считать, что напряжение на конденсаторах изменяться не будет и напряжение на диоде D_2 будет оставаться равным нулю.

Таким образом, отношение установившегося напряжения на диоде D_2 к величине ЭДС батареи равно нулю.

7. При решении задачи будем , как обычно, пренебрегать токами утечки в конденсаторах схемы, а ключ K считать идеальным. После замыкания ключа конденсатор емкостью C_1

начнет заряжаться током, текущим не только через резистор R_1, но и током заряда конденсатора емкостью C_2. Ток заряда этого конденсатора будет уменьшаться со временем и станет равным нулю в тот момент, когда напряжение U_{C_2} на этом конденсаторе станет равным напряжению U_{R_1} на резисторе R_1. В этот же момент напряжение на диоде D станет равным нулю, а в последующие моменты диод будет заперт, так как по условию задачи он является идеальным. Следовательно, напряжение на конденсаторе емкостью C_2 в дальнейшем изменяться не будет, а потому должны выполняться соотношения

$$U_{C_2}(\tau) = U_{R_1}(\tau) = \frac{q}{C_2}.$$

Напряжение же на конденсаторе емкостью C_1 через время τ после замыкания ключа станет равным

$$U_{C_1}(\tau) = \mathcal{E} - U_{R_1}(\tau).$$

Поскольку зарядка этого конденсатора будет продолжаться до тех пор, пока напряжение на нем не станет равным ЭДС источника $\mathcal{E}$, через источник за время $t \ge \tau$ протечет заряд

$$\Delta q = \left(\mathcal{E} - U_{C_1}(\tau)\right) C_1,$$

а выделившееся на резисторе R_1 максимальное количество теплоты должно удовлетворять соотношению

$$Q(\tau,\infty) = \mathcal{E}\Delta q - 0{,}5\mathcal{E}^2 C_1 + 0{,}5\left(\mathcal{E} - U_{C_2}(\tau)\right)^2 C_1.$$

Итак,

$$Q \le Q(\tau,\infty) = \frac{q^2 C_1}{2C_2^2}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\Delta t = \dfrac{4\pi d}{v_0} \approx 1{,}57$ с. **2.** $v_0 = \dfrac{3}{4}\sqrt{5gl} = 5{,}25$ м/с.

3. $F = \dfrac{mg}{\cos(\alpha/2)}$. **4.** $A = \dfrac{1}{8}\rho_в S L^2 g(3 - \sin\alpha) = \dfrac{5}{16}\rho_в S L^2 g$.

5. $l_{\max} = l + v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$, $l_{\min} = l - v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$.

6. $F_{\max} = mg\dfrac{M + 2m}{M + m}$. **7.** $r_{\min} = \dfrac{3\sigma R T_0}{(M_в - M_{He})p_0} \approx 2{,}73$ м.

8. $k = \dfrac{2M_1}{M_2} = 1$. **9.** $A = \dfrac{(3\eta/100\%) + 2}{2(1 - (\eta/100\%))} R\Delta T \approx 1{,}35$ кДж.

10. $A = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}\left(1 - \dfrac{15q^2}{64\pi\varepsilon_0 k L^3}\right)$.

11. $R_2 = R_1\dfrac{k_2(k_1 - 1)}{k_1(1 - k_2)} = 3$ см, $Q_2 = Q_1\dfrac{k_1 - 1}{1 - k_2} = 6\cdot 10^{-8}$ Кл.

12. $R(t) = R_0\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right)$, где $\tau = R_0 C$.

13. $F = C_0(\varepsilon - 1)\dfrac{\mathcal{E}^2}{2l}$. **14.** $\Delta U = BL\left(v - \dfrac{u^2}{v}\right) = 0{,}48$ В.

15. $q = q_0 - \dfrac{mv}{Bl}$. **16.** $T = \dfrac{4\pi R}{e}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m R} \approx 2\cdot 10^{-15}$ с.

17. $\sin\alpha_{\max} = \sqrt{n^2 - \dfrac{R^2}{(R - d)^2}} = 0{,}5$, $\alpha_{\max} = 30°$.

18. $n < 2$. **19.** $F = \dfrac{l\delta}{\Delta}$. **20.** $d = 5\lambda_1\sqrt{1 + \left(\dfrac{2F}{l}\right)^2} \approx 3{,}8$ мкм.

Химический факультет

Вариант 1

3. На интервале $0 \le t \le 1$ с. **4.** Увеличилась в 2 раза.

5. См. рис.20. **6.** $m = \dfrac{F_1 + F_2}{g} = 100$ кг.

7. $U_m = \sqrt{U^2 + \dfrac{LI^2}{C}} = \sqrt{6}$ В $\approx 2{,}45$ В.

8. $a_1 = \dfrac{F\cos\alpha}{m} - \dfrac{(F - ma)(mg - F\sin\alpha)}{m^2 g} \approx 0{,}16$ м/с^2.

9. $q = \dfrac{C\mathcal{E}}{2} = 10^{-3}$ Кл. **10.** $Q = 10{,}5RT_1 \approx 15{,}7$ кДж.

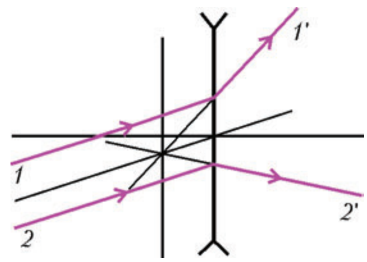

Рис. 20

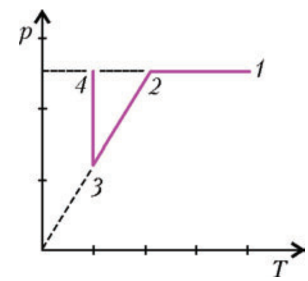

Рис. 21

Вариант 2

3. $A = 6$ Дж. **4.** См. рис.21.

5. $a = 2g\sin\alpha - \dfrac{F}{m} = 4$ м/с^2. **6.** $n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 - (d/l)^2}} \approx 1{,}5$.

7. $Q = 0{,}5(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = 16$ кДж.

8. $\nu = \dfrac{\mathcal{E}}{2\pi BS} = 5$ Гц. **9.** $\eta = \dfrac{nhc}{\lambda I U} = 1{,}8\cdot 10^{-6}$.

10. $q = -\dfrac{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + d^2\right)^{3/2} mg}{Qd} \approx 6{,}6\cdot 10^{-8}$ Кл.

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия,
М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, Тел./факс: (272) 6-25-36
E-mail: chpk_marketing@chehov/ru