Фибоначчиевы кролики

Л.ШИБАСОВ, З.ШИБАСОВА

В 1170 ГОДУ В ИТАЛЬЯНСКОМ ГОРОДЕ ПИЗА В семье нотариуса родился сын Леонардо. Его отец имел прозвище Боначчи – добряк, поэтому мальчика называли Фибоначчи – сын Боначчи. Под этим именем Леонардо Пизанский, ставший впоследствии известным математиком, часто упоминается в истории науки. Отец работал в Алжире в качестве представителя торгового дома своего города. Проживание в Алжире благоприятно сказалось на образовании Леонардо. Ведь это была мрачная эпоха Средневековья, когда европейская наука находилась в упадке. В арабском же мире наблюдался подъем математической науки. Арабы, завоевавшие к этому времени высокоразвитые страны Средиземноморья, многое позаимствовали из культуры покоренных стран. Арабские халифы для прославления своего правления покровительствовали искусствам и наукам. Ученые активно переводили античные труды с греческого языка на арабский и получили ряд новых серьезных результатов в области алгебры и тригонометрии.

Образование, полученное в Алжире, Леонардо постоянно пополнял во время путешествий с отцом, которому часто приходилось бывать по торговым делам в разных странах Средиземноморья. Внимательно изучив достижения арабской математики, Леонардо подытожил их в трактате «Книга абака» (1202). Абак – это простейший вычислительный прибор, прародитель счетов, хорошо знакомых нам по недавнему прошлому. Но в книге речь шла не об этом приборе, а об искусстве вычислений. Труд получился грандиозным – достаточно сказать, что уже в печатном виде книга содержала 460 страниц. Написана она была для торговых и деловых людей с целью облегчения расчетов. В ней Леонардо познакомил широкий круг европейцев с десятичной системой счисления, которой пользовались арабы, и показал ее преимущество перед римской нумерацией, применявшейся в Европе.

Помимо задач практического характера (о цене товара, о дележе наследства, об имуществе, о сплавах и растворах) книга содержала правило приближенного извлечения корней, способы решения систем линейных уравнений, неопределенных уравнений и их систем, в частности – решение китайской задачи о делении с остатком. В этом трактате многое для европейской математики оказалось новым: использовались отрицательные числа, которые трактовались как долг, был введен термин «частное», в записи дроби появилась разделительная черта между числителем и знаменателем и т.д. Содержались в книге и собственные результаты Леонардо, в частности – решение задачи о размножении кроликов (о ней пойдет речь ниже) и задачи о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить на рычажных весах все грузы, вес которых выражается целыми числами, не превышающими фиксированного натурального числа. Ее решение у Леонардо фактически основано на записи числа в троичной системе счисления. Эта задача до сих пор остается популярной. Надо сказать, что многие задачи из «Книги абака» использовались позже различными авторами.

В 1220 году Леонардо пишет «Практическую геометрию», в которой рассматривает геометрические задачи на построение, решаемые с помощью алгебры. Слава о выдающемся пизанском математике разнеслась по всей Европе. Прибывший в 1225 году в Пизу император Германии и король Сицилии Фридрих II решил испытать Леонардо. Придворный философ императора Иоганн Палермский предложил ему ряд задач, с которыми Леонардо блестяще справился. В том же году в «Книге квадратов» и в трактате «Цветок» он привел решения некоторых из них.

А теперь сформулируем знаменитую **задачу о размножении кроликов:** «Некто поместил пару кроликов в загоне, огороженном со всех сторон, дабы узнать, сколько пар кроликов родится в течение года. Природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а потомство дают они со второго месяца после своего рождения».

Приведем решение Леонардо. В начале первого месяца была одна пара кроликов; в начале второго – две, причем одна из них зрелая, т.е. способная через месяц принести потомство, вторая – нет. Поэтому в начале третьего месяца будут три пары кроликов, две из них зрелые. В начале четвертого месяца станет пять пар (три пары были и две – новое потомство), из них только три зрелые, и т.д.:

Начало месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Число зрелых пар	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
Число всех пар	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Из таблицы видно, что в конце года в загоне окажется 377 пар кроликов.

Числа второй строки с легкой руки французского математика Э.Люка стали называть *числами Фибоначчи.* Они образуют последовательность, элементы которой обозначим через φ_n. Легко видеть, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$ и т.д. Другими словами, для чисел φ_n выполняется соотношение

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}, \qquad (1)$$

т.е. для вычисления элемента φ_n необходимо знать два предыдущих элемента φ_{n-1} и φ_{n-2}, а для их вычисления – вновь надо знать предыдущие элементы и т.д. до тех пор, пока не вернемся к φ_2 и φ_1. Соотношения такого типа в математике называют *рекуррентными* (от латинского recurrentis – возвращающийся), а возникающую при этом последовательность – *рекуррентной* или *возвратной.*

Равенство (1) позволяет вывести многие свойства чисел Фибоначчи. Мы приведем доказательство одних из них, а другие сформулируем в виде упражнений.

Свойство 1. *Соседние члены последовательности Фибоначчи взаимно просты.*

Предположим противное: найдутся φ_{n+1} и φ_n, имеющие общий делитель $d > 1$. Тогда $\varphi_{n-1} = \varphi_{n+1} - \varphi_n$ тоже делится на d. Продолжая этот спуск дальше, дойдем до $\varphi_2 = 1$, которое также должно делиться на d, что невозможно. Свойство доказано.

Свойство 2. *Если φ_n – наименьшее число, делящееся на d, то числа Фибоначчи, кратные d, повторяются с периодом, равным n.*

Пусть n – наименьший номер, для которого φ_n делится на d: $\varphi_n = a_0 d$. Тогда $\varphi_{n+1} = a_1 d + r$, $0 < r < d$, причем по предыдущему свойству d и r взаимно простые, $\varphi_{n+2} = (a_0 + a_1)d + r = a_2 d + r$, $\varphi_{n+3} = a_3 d + 2r$, $\varphi_{n+4} = a_4 d + 3r$, $\varphi_{n+5} = a_5 d + 5r$, …, $\varphi_{n+k} = a_k d + \varphi_k r$. Остатки r, r, $2r$, $3r$, $5r$, …, φ_k не являются наименьшими остатками от деления φ_{n+k} на d. При $k < n$ они на d не делятся в силу того, что φ_k не делится на d по условию, а r взаимно просто с d. Но число $\varphi_{2n} = a_n d + \varphi_n r$ кратно d. Аналогично, следующее число, делящееся на d, это φ_{3n} и т.д. Свойство доказано.

Из этого свойства вытекает, например, что числа φ_{3m} четные, числа φ_{4m} кратны трем, φ_{5m} делятся на 5, φ_{6m} – на 8.

Свойство 3. *При $m \neq 2$ число φ_n кратно φ_m тогда и только тогда, когда n кратно m.*

В самом деле, если $n = km$, то, положив $d = \varphi_m$, по предыдущему свойству получим, что число φ_{km} делится на φ_m. Пусть теперь φ_n делится на φ_m и $n = km + r$, $0 \le r < m$. По свойству 2, между числами φ_{km} и φ_{km+m} нет чисел, делящихся на φ_m, а значит, $r = 0$.

Упражнение 1. Покажите, что если φ_p – простое число, то при $p \neq 4$ его номер p тоже является простым. Обратное утверждение неверно.

Прежде чем сформулировать следующее свойство, отметим, что для любого натурального числа N выполняется неравенство $\varphi_n \le N < \varphi_{n+1}$. Тогда либо $N = \varphi_n$, либо для числа $N - \varphi_n$ вновь находим два соседних числа Фибоначчи φ_m и φ_{m+1} таких, что $\varphi_m \le N - \varphi_n < \varphi_{m+1}$.

Упражнение 2. Покажите, что $m + 1 < n$.

И снова либо $N = \varphi_n + \varphi_m$, либо находим наибольшее число φ_k, не превосходящее разности $N - (\varphi_n + \varphi_m)$, и т.д. Разность $N - (\varphi_n + \varphi_m + \varphi_k + \ldots)$ неотрицательна и убывает с каждым шагом. Бесконечно убывать она не может, поскольку ограничена снизу нулем. Поэтому на некотором шаге она становится равной нулю. В результате имеем $N = \varphi_n + \varphi_m + \varphi_k + \ldots$, где $N < \varphi_{n+1}$, $m + 1 < n$, $k + 1 < m$, … Включив в найденную сумму все пропущенные числа Фибоначчи с нулевыми коэффициентами, получаем следующее свойство

Свойство 4. *Любое натуральное число N однозначно записывается в виде*

$$N = a_n\varphi_n + a_{n-1}\varphi_{n-1} + \ldots + a_2\varphi_2 + a_1\varphi_1$$

с коэффициентами a_k, равными нулю или единице.

Это позволяет говорить о фибоначчиевой системе счисления. Например,

$$20 = 13 + 5 + 2 = \varphi_7 + \varphi_5 + \varphi_3 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)_\Phi,$$

$$50 = 34 + 13 + 3 = \varphi_9 + \varphi_7 + \varphi_4 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)_\Phi,$$

$$100 = 89 + 8 + 3 = \varphi_{11} + \varphi_6 + \varphi_4 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)_\Phi.$$

Индекс «Ф» указывает на то, что число записано в фибоначчиевой системе счисления. Такая запись напоминает двоичную, но, в отличие от нее, не может иметь две подряд идущие единицы в силу максимальной экономности способа представления.

Рекуррентная формула позволяет найти значение любого члена последовательности Фибоначчи по предыдущим членам. А можно ли выразить φ_n непосредственно через n? Ответ на этот вопрос положительный. Чтобы найти искомое выражение, снова обратимся к соотношению (1) и рассмотрим его как уравнение с неизвестным φ_n. Будем искать решение этого уравнения в виде $\varphi_n = \lambda^n$. Подставляя λ^n в (1), получим

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n. \qquad (2)$$

Поскольку нулевое решение нас не интересует, сократив на λ^n, придем к уравнению $\lambda^2 = \lambda + 1$. Оно называется *характеристическим* для соотношения (1). Степени его корней $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ удовлетворяют уравнению (2) и, следовательно, соотношению (1). Очевидно, любая линейная комбинация λ_1^n и λ_2^n также удовлетворяет (1), поэтому

$$\varphi_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Остается так подобрать коэффициенты c_1 и c_2, чтобы $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$. С этой целью положим $n = 1$ и $n = 2$, тогда

$$1 = c_1 + c_2 \text{ и } 1 = c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

откуда $c_1 = (1+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$, $c_2 = (\sqrt{5}-1)/2\sqrt{5}$. Окончательно получаем

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Это равенство называют *формулой Бине* по имени открывшего ее (1843) французского математика Ж.Бине, хотя еще раньше она встречалась (1728) у швейцарского математика Д.Бернулли.

В формуле Бине присутствуют два числа $\left(1+\sqrt{5}\right)/2 = \Phi$ и $\left(1-\sqrt{5}\right)/2 = \widehat{\Phi}$, связанные еще с одним замечательным математическим понятием — *золотым сечением.* Оно определяется как деление отрезка на две неравные части, из которых бóльшая x является средней пропорциональной между всем отрезком a и меньшей частью, т.е. $a : x = x : (a - x)$. Из этой пропорции находим $x = a\Phi^{-1} = -a\widehat{\Phi}$. Отношение же всего отрезка к его большей части равно Φ. Такое деление отрезка обладает рядом интересных свойств и часто применяется при создании произведений искусства и предметов быта для достижения гармонии. По этой причине великий художник и ученый эпохи Возрождения Леонардо да Винчи назвал его «золотым сечением». Обозначение отношения буквой Φ взято в честь древнегреческого скульптора Фидия (V в. до н.э.), специально использовавшего его в своих произведениях.

Выведем с помощью формулы Бине еще одно свойство чисел Фибоначчи.

Свойство 5. *Предел отношения* $\varphi_{n+1} : \varphi_n$ *при* $n \to \infty$ *равен числу Φ.*

Это свойство обнаружил еще в XVII веке немецкий астроном и математик И.Кеплер. Запишем формулу Бине в виде $\varphi_n = \left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n\right)/\sqrt{5}$. Из неравенств $\Phi > 1$, $\left|\widehat{\Phi}\right| < 1$ следует, что искомый предел равен пределу отношения $\Phi^{n+1} : \Phi^n = \Phi$.

Вернемся к соотношению (1). Перепишем его в общем виде $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ для произвольной последовательности $\{u_n\}$, каждая из которых определяется своими первыми элементами u_1 и u_2. Все они называются *обобщенными последовательностями Фибоначчи.* Нами рассмотрен случай $u_1 = u_2 = 1$. Приведем другие примеры: 1) при $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ получим последовательность чисел третьей строки таблицы (число всех пар кроликов); 2) при $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ придем к последовательности 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... ; 3) при $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ получим предыдущую последовательность, начиная со второго элемента. Ее члены называются *числами Люка.* Очевидно, формула общего члена для каждой из таких последовательностей имеет вид $u_n = c_1\Phi^n + c_2\widehat{\Phi}^n$, где c_1 и c_2 определяются по двум первым элементам.

Упражнение 3. Покажите, что для n-го числа Люка L_n выполняются равенства $L_n = \Phi^n + \widehat{\Phi}^n$ и $L_n = \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}$.

Пользуясь равенством (1), можно ввести числа Фибоначчи с отрицательными индексами: $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_{-1} = \varphi_1 - \varphi_0$, $\varphi_{-2} = \varphi_0 - \varphi_{-1}$ и т.д. Выпишем несколько их значений:

$-n$	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10
φ_{-n}	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Видим, что вновь возникает последовательность чисел Фибоначчи, только с чередующимися знаками.

Упражнение 4. Докажите равенство $\varphi_{-n} = (-1)^{n-1}\varphi_n$.

Числа Фибоначчи часто встречаются в природе: интересно, что ими выражаются количества спиралей, по которым располагаются семечки в подсолнухе, цветочки в соцветиях ромашки, чешуйки в еловых шишках и др. Применяются они и в практической деятельности, например при машинной сортировке и обработке информации. Используются числа Фибоначчи и в математике при генерировании случайных чисел, при нахождении экстремумов функций, производные которых неизвестны. В 1891 году Э.Люка с их помощью нашел 12-е совершенное число (число, равное сумме всех своих собственных делителей). Заметим, что это последнее совершенное число, найденное без использования ЭВМ.

Но самое замечательное приложение числа Фибоначчи нашли в XX веке. С их помощью советский математик Ю.В.Матиясевич решил (1970) десятую проблему Гильберта. Здесь надо сказать несколько слов о знаменитом докладе немецкого математика Д.Гильберта, сделанном им на Втором международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1900 году в Париже. В этом докладе он обрисовал состояние математики на рубеже веков и поставил 23 проблемы, разрешение которых желательно было бы получить в новом веке. Среди них были и древние задачи, и совершенно новые, которые появились в результате последних исследований ученых, в том числе и самого Гильберта. Проблемы оказались столь актуальными, что практически вся математика XX века развивалась под знаком решения задач, поставленных Гильбертом. Под номером десять в докладе была сформулирована проблема разрешимости алгебраического уравнения с целыми коэффициентами во множестве целых чисел. Используя делимость чисел Фибоначчи, Матиясевич доказал, что не существует алгоритма, позволяющего определить, разрешимо ли такое уравнение во множестве целых чисел.

Упражнения

5. Докажите следующие свойства чисел Фибоначчи:

а) $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \varphi_{n+2} - 1$;

б) $\varphi_1 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_{2n-1} = \varphi_{2n}$;

в) $\varphi_2 + \varphi_4 + \ldots + \varphi_{2n} = \varphi_{2n+1} - 1$;

г) $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2 = \varphi_n\varphi_{n+1}$;

д) $\varphi_{n+1}^2 - \varphi_n^2 = \varphi_{n+2}\varphi_{n-1}$;

е) $\varphi_{n-1}\varphi_{n+1} - \varphi_n^2 = (-1)^n$ (результат Дж.Кассини, 1680);

ж) $\varphi_n^2 - \varphi_n\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$;

з) $\varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \ldots + \varphi_n^3 = \left(\varphi_{3n+2} + (-1)^{n-1} \cdot 6\varphi_{n-1} + 5\right)/10$.

6. Докажите формулу

$$\varphi_{n+m} = \varphi_m\varphi_{n-1} + \varphi_{m+1}\varphi_n$$

и получите из нее следующие равенства:

а) $\varphi_{n+1}^2 - \varphi_{n-1}^2 = \varphi_{2n}$;

б) $\varphi_n^2 + \varphi_{n+1}^2 = \varphi_{2n+1}$;

в) $\varphi_{n+1}^3 + \varphi_n^3 - \varphi_{n-1}^3 = \varphi_{3n}$;

г) $\text{НОД}(\varphi_m, \varphi_n) = \varphi_{\text{НОД}(m,n)}$.

7. Докажите, что не существует треугольника, длины сторон которого выражаются различными числами Фибоначчи.