Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2041» или «Ф2048». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2042 и М2045 предлагались на III этапе XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике, задачи М2041, М2044, М2047, М2049 – на XXVIII Турнире городов.

Задачи Ф2050, Ф2053– Ф2056 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М2041–М2050, Ф2048–Ф2057

М2041. Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматной доске 8×8, чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей?

Р.Женодаров

М2042. Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq 2 .$$

Н.Агаханов

М2043. Можно ли сконструировать такой набор «Юный паркетчик» из четырех одинаковых многоугольников и квадратика, чтобы из всех пяти деталей можно было сложить квадрат, а из трех одинаковых деталей – равносторонний треугольник?

О.Нечаева

М2044. Пусть $f(x)$ – некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет четное число решений?

П.Кожевников

М2045. На доске записано число $\underbrace{111\ldots11}_{99 \text{ единиц}}$. Двое играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди, причем за ход разрешается либо записать ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стереть один из нулей. Проигрывает тот, после хода которого число будет делиться на 11. Кто выигрывает при правильной игре?

М.Мурашкин

М2046. Муха села в полдень на секундную стрелку часов и решила ездить, придерживаясь следующего правила: если одна стрелка обгоняет другую и муха сидит на одной из этих стрелок, то она пересаживается на другую. Сколько оборотов сделает муха к полуночи?

Фольклор

М2047. Из точки T, лежащей внутри треугольника ABC, стороны AB, BC, CA видны под углом $120°$ каждая. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT, CT относительно прямых BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.

А.Заславский

М2048. Найдите такое наибольшее натуральное k, что найдется натуральное $n > 1$, для которого каждое из чисел $n, n^2, \ldots, n^k$ представимо в виде $x^2 + y^2 + 1$, где x, y – целые числа.

В.Сендеров

М2049. От правильного октаэдра с ребром 1 отрезали 6 углов – пирамидок с квадратным основанием и ребром $1/3$. Получился многогранник, грани которого – квадраты и правильные шестиугольники. Можно ли копиями такого многогранника замостить пространство?

А.Канель

М2050. В однокруговом турнире по волейболу (без ничьих) участвовало 2^n команд, причем команда «Чемпион» заняла первое место. Назовем команду *плохой*, если она выиграла у «Чемпиона». Оргкомитет планирует провести турнир по олимпийской системе и предполагает, что все встречи закончатся так же, как в предыдущем турнире. Докажите, что можно так составить расписание, что «Чемпион» опять победит, причем все плохие команды проиграют (и прекратят участие) уже в первых двух турах.

Б.Френкин, Л.Остроумова

Ф2048. Материальная точка движется с постоянным ускорением. Ее координаты в начальный момент (0, 0, 0), через 1 секунду после начала движения (1, 1, 2), еще через секунду (2, 3, 4). Какой угол составляет вектор начальной скорости точки с вектором ее ускорения?

А.Зильберман

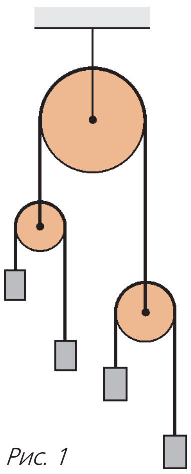


Рис. 1

Ф2049. В системе (рис.1) трения нет. Массы грузов на левом блоке M и $2M$, на правом блоке – $2M$ и $4M$. Найдите ускорение самого легкого груза при движении.

А.Блоков

Ф2050. Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точки своей траектории, распавшись на три осколка с массами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ и $m_3 = 4m$, которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками с массами m_1 и m_2 оказалось равным L. Чему было равно в этот момент расстояние между осколками с массами m_1 и m_3, если ни один из осколков еще не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебречь.

А.Якута

Ф2051. По горизонтальному столу катится без проскальзывания велосипедное колесо. Его диаметр 1 м, масса 1 кг, скорость центра 1 м/с. В некоторый момент к колесу приклеился маленький кусочек жвачки массой 2 г, лежавший на столе. Скорость центра колеса теперь меняется. Оцените отличие *минимальной* скорости колеса от его *начальной* скорости.

Р.Колесов

Ф2052. Однородное плоское тело вращается относительно вертикально оси, лежащей в плоскости тела (рис.2). Тело раскрутили до угловой скорости ω_0 и отпустили. На тело действует сила сопротивления воздуха такая, что избыточное давление пропорционально скорости v участка поверхности с коэффициентом k (т.е. $\Delta F = k\Delta S v$). Масса тела M, его «поперечная» площадь S. Сколько оборотов совершит тело до полной остановки?

А.Киселев

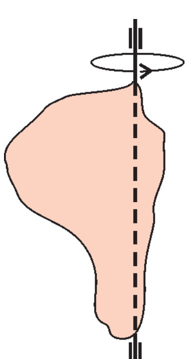


Рис. 2

Ф2053. На столе стоит вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд, в который вставлены два поршня (рис.3). Верхний поршень – тяжелый, теплонепроницаемый и может двигаться в цилиндре без трения. Нижний поршень – легкий и теплопроводящий, но между ним и стенками сосуда существует трение. В каждой из частей сосуда находится по ν молей идеального одноатомного газа. Вначале система находилась в тепловом равновесии, а обе части сосуда имели высоту L. Потом систему медленно нагрели, сообщив ей количество теплоты ΔQ. На какую величину ΔT изменилась температура газов, если нижний поршень при этом не сдвинулся с места? При каком наименьшем значении силы трения F между нижним поршнем и стенками это возможно? Какова теплоемкость системы C в этом процессе? Теплоемкостью стенок сосуда и поршней пренебречь.

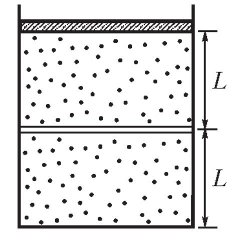


Рис. 3

Д.Вагин, М.Семенов

Ф2054. Над ν молями идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого изображен на pV-диаграмме (рис.4). Цикл состоит из вертикального (*1–2*) и горизонтального (*3–1*) участков и “лестницы” (*2–3*) из n ступенек, на каждой из которых давление и объем газа изменяются в одно и то же число раз. Отношение максимального давления газа к минимальному равно k, отношение максимального объема к минимальному также равно k. Найдите КПД тепловой машины, работающей по данному циклу.

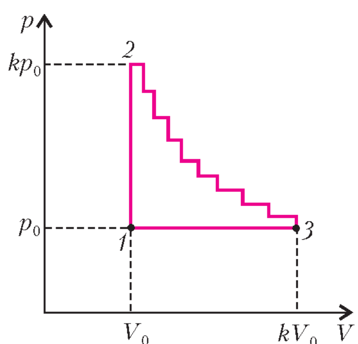


Рис. 4

О.Шведов

Ф2055. Электрическая цепь (рис.5) состоит из идеальной батарейки с ЭДС U_0, идеального амперметра и четырех одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока I и напряжения U имеет вид $I = \alpha U^2$. Какой ток I_0 показывает амперметр?

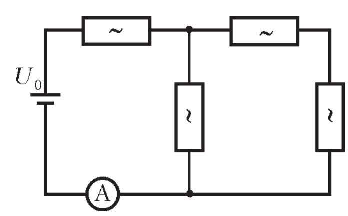


Рис. 5

Д.Харабадзе

Ф2056. Тридцать одинаковых резисторов сопротивлением R каждый соединены между собой в пространстве так, что они являются ребрами выпуклого правильного многогранника (рис.6): а) двадцатигранника (икосаэдра); б) двенадцатигранника (додекаэдра). Какое со-

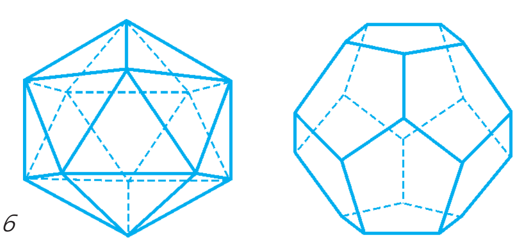


Рис. 6

противление будет представлять описанная выше система а) или б), если подключиться к паре ее наиболее удаленных вершин? Сколько разных значений сопротивления можно будет получить в случае а) и в случае б), если подключиться к всевозможным парам вершин этих многогранников?

Справка: грани икосаэдра – это 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра – это 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника.

С.Кротов

Ф2057. Конденсатор емкостью C и две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. В некоторый момент конденсатор не заряжен, а токи катушек равны I и $2I$. В этот момент очень быстро параллельно подключают еще пять таких же катушек, а внешнюю цепь отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора и максимальное значение силы тока через катушку номер 7 (последняя из подключенных катушек). Элементы цепи считайте идеальными.

З.Рафаилов

Решения задач М2021–М2025, Ф2033–Ф2042

М2021. *В зале находится компания из n человек, среди которых есть пары знакомых. Известно, что если в зале останется 98 человек, то их всегда можно будет разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть в такой компании, если: а) $n = 99$; б) $n = 100$?*

Ответ: а) 99; б) 150.

Если для некоторого человека A в компании найдется 97 не знакомых с ним людей, то A и эти 97 человек образуют группу из 98 человек, которую нельзя разбить на 49 пар знакомых, – противоречие. Таким образом, у каждого человека в компании не более 96 не знакомых с ним людей, и следовательно, не менее $n-97$ знакомых. Поэтому количество пар знакомых не менее $n(n-97)/2$, что при $n = 99$ и $n = 100$ равно 99 и 150 соответственно.

Остается привести примеры. Рассадим людей по кругу на равном расстоянии друг от друга.

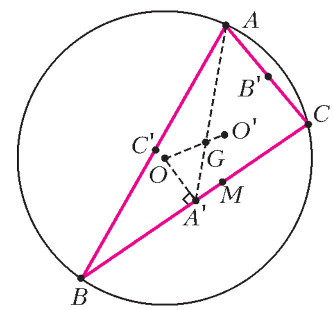
Для 99 человек пусть двое знакомы, если они соседи (т.е. сидят рядом за столом). Если зал покинул один человек, то оставшихся можно разбить на пары соседей.

Для 100 человек $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ пусть знакомы сидящие рядом и кроме того пусть имеются пары «диаметрально противоположных» знакомых $A_1 - A_{51}, A_2 - A_{52}, \ldots, A_{50} - A_{100}$. Если зал покинули два человека с номерами разной четности, то оставшихся можно разбить на пары соседей. Пусть зал покинули два человека с номерами одной четности, для определенности A_1 и A_{2k+1}, где $k \le 25$. Тогда выберем пару знакомых $A_2 - A_{52}$, а оставшихся 96 человек можно разбить на пары соседей.

П.Кожевников

М2022. *Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всевозможных треугольников ABC, касаются фиксированной окружности.*

Пусть O – центр данной окружности ω, O' – центр окружности ω', проходящей через середины A', B', C' сторон треугольника ABC, G – точка пересечения медиан треугольника ABC (см. рисунок). Обозначим через R и R' радиусы окружностей ω и ω' соответственно. Так как $OA' \perp BC$, то A' лежит на (фиксированной) окружности γ с диаметром OM. При гомотетии h с центром в A и коэффициентом $2/3$ точка A' переходит в G, поэтому G лежит на фиксированной окружности γ_1 – образе γ при гомотетии h.



Треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC гомотетией с центром G и коэффициентом $-1/2$, поэтому $R' = R/2$, а точка O' такова, что $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{GO'}$. Это означает, что при гомотетии h_1 с центром в O и коэффициентом $3/2$ точка G переходит в O', поэтому O' лежит на фиксированной окружности γ_2 – образе γ_1 при гомотетии h_1.

Итак, радиусы всевозможных окружностей ω' равны $R/2$, а их центры лежат на фиксированной окружности γ_2 с центром O_2 и радиусом r. Значит, окружности ω' касаются окружности с центром O_2 и радиусом $R/2 + r$ (а также при $R/2 \ne r$ касаются окружности с центром O_2 и радиусом $|R/2 - r|$).

П.Кожевников

М2023. *Пусть a, b, c – отличные от нуля целые числа, сумма которых равна нулю. Докажите, что:*

а) $(ab)^5 + (bc)^5 + (ca)^5$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$;

б) $a^n + b^n + c^n$ делится на $a^4 + b^4 + c^4$ при любом натуральном n, дающем при делении на 3 остаток 1;

в) $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$ при любом натуральном n, дающем при делении на 3 остаток 2.

Введем обозначения: $A_n = a^n + b^n + c^n$, $B_n = (ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$, $s_n = (x+y)^n + (-x)^n + (-y)^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

Лемма 1. Многочлен s_n делится на $x^2 + xy + y^2$ (делимость s_n на многочлен $P(x, y)$ здесь и ниже означает, что при любых $x, y \in \boldsymbol{Z}$ имеем $s_n = P(x, y)\,l(x, y)$, где $l \in \boldsymbol{Z}$) в точности если n не делится на 3.

Доказательство. Имеем $s_1 \vdots x^2 + xy + y^2$, $s_2 \vdots x^2 + xy + y^2$. Отсюда вследствие легко доказываемого тождества

$$s_{n+3} = \left(x^2 + xy + y^2\right)s_{n+1} + xy(x+y)s_n, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}, \qquad (*)$$

следует, что $s_n \vdots x^2 + xy + y^2$ при любом n, не делящем-