

одну верхнюю карточку (из любой коробки) и переложить ее либо на дно пустой коробки, либо на карточку с номером на единицу больше?

*А. Канель-Белов*

5. Натуральное число  $n$  таково, что числа  $3n + 1$  и  $10n + 1$  являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число  $29n + 11$  составное.

*Р. Женодаров*

6. Дан треугольник  $ABC$  и точки  $P$  и  $Q$ , лежащие на его описанной окружности. Точку  $P$  отразили относительно прямой  $BC$  и получили точку  $P_a$ . Точку пересечения прямых  $QP_a$  и  $BC$  обозначим  $A'$ . Точки  $B'$  и  $C'$  строятся аналогично. Докажите, что точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  лежат на одной прямой.

*А. Акоюян*

### 11 класс

1. Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ , все члены которой принадлежат отрезку  $[0; 3\pi/2]$ , если числа  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \alpha_2$  и  $\cos \alpha_3$ , а также числа  $\sin \alpha_3$ ,  $\sin \alpha_4$  и  $\sin \alpha_5$  в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии?

*По мотивам А. Канунникова*

2. Найдите все несократимые дроби  $a : b$ , представимые в виде  $\bar{b}, \bar{a}$  (запятая разделяет десятичные записи натуральных чисел  $b$  и  $a$ ).

*И. Сергеев*

3. Можно ли намотать нерастяжимую ленту на бесконечный конус так, чтобы сделать вокруг его оси бесконечно много оборотов? Ленту нельзя наматывать на вершину

конуса, а также разрезать и перекручивать. При необходимости можно считать, что лента бесконечна, а угол между осью и образующей конуса достаточно мал.

*И. Сергеев*

4. Алиса и Базилио играют в следующую игру: из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

*О. Косухин*

5. На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найдите геометрическое место середин оснований таких треугольников.

*В. Алексеев*

6. Все имеющиеся на складе конфеты разных сортов разложены по  $n$  коробкам, на которые установлены цены в  $1, 2, \dots, n$  у.е. соответственно. Требуется купить такие  $k$  из этих коробок наименьшей суммарной стоимости, которые содержат заведомо не менее  $k/n$  массы всех конфет при одном лишь условии, что масса конфет в любой коробке не превосходит массы конфет в любой более дорогой коробке.

а) Какие коробки следует купить при  $n = 10$  и  $k = 3$ ?

б) Тот же вопрос для произвольных натуральных  $n \geq k$ .

*И. Сергеев*

*Публикацию подготовил Б. Френкин*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### 7 класс

1. Найдите примерную величину давления в центре Земли, считая, что средняя плотность ее вещества  $\rho = 5000 \text{ кг/м}^3$ . Радиус Земли  $R_3 = 6400 \text{ км}$ , ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

*С. Варламов*

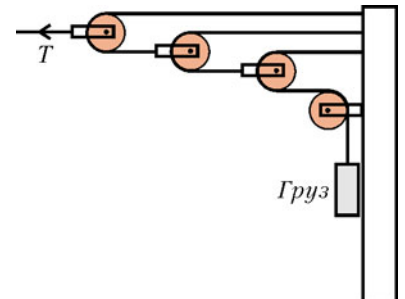
2. Школьники побывали в музее-имени Л.Н.Толстого «Ясная поляна» и возвращались в Рязань на автобусах, которые ехали со скоростью  $v_1 = 70 \text{ км/ч}$ . Пошел дождь, и водители снизили скорость до  $v_2 = 60 \text{ км/ч}$ . Когда дождь кончился, до Рязани оставалось проехать  $s = 40 \text{ км}$ . Автобусы поехали со скоростью  $v_3 = 75 \text{ км/ч}$  и въехали в Рязань в точно запланированное время. Сколько времени шел дождь? Чему равна средняя скорость автобуса? Для упрощения считайте, что автобусы в пути не останавливались.

*М. Ромашка*

3. Во льдах Арктики в центре небольшой плоской льдины площадью  $S = 70 \text{ м}^2$  стоит белый медведь массой  $m = 700 \text{ кг}$ . При этом надводная часть льдины выступает над поверхностью воды на высоту  $h = 10 \text{ см}$ . На какой глубине под водой находится нижняя поверхность льдины? Плотность воды  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$ .

*М. Ромашка*

4. Провода над железной дорогой, питающие ток электропоезда, натягиваются с помощью системы, показанной на рисунке 1. Она крепится к столбу и состоит из тросов, блоков с изоляторами и стального груза квадратного сечения со сто-



*Рис. 1*

роной  $a = 20$  см. Сила натяжения толстого троса, который идет от крайнего блока к держателю проводов, равна  $T = 8$  кН. Какова высота стального груза? Плотность стали  $\rho_c = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*М.Ромашка*

### 8 класс

1. В двухлитровую пластиковую бутылку через короткий шланг накачивается воздух до давления 2 атм. Шланг пережимается, и к нему присоединяется герметичный тонкостенный полиэтиленовый пакет большой емкости (больше 10 литров) без воздуха внутри. Бутылку вместе с пакетом кладут на одну чашку весов и уравнивают гири, которые помещают на другую чашку, а затем зажим ослабляют. Воздух из бутылки перетекает в пакет, и равновесие весов нарушается. Груз какой массы и на какую чашку весов нужно положить, чтобы равновесие весов восстановилось? Плотность воздуха равна  $1,3$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения считать равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

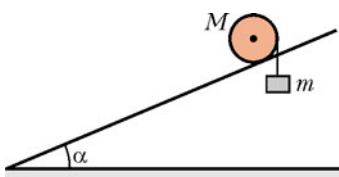
*С.Варламов*

2. В калориметре находится  $m = 100$  г расплавленного металла галлия при температуре его плавления  $t_{пл} = 29,8$  °С. Металл начали медленно охлаждать, оберегая от внешних воздействий, и в результате температура понизилась до  $t = 19,8$  °С, а галлий остался жидким. Когда переохлажденный таким образом жидкий галлий размешали палочкой, он частично перешел в твердое состояние. Найдите массу отвердевшего галлия и установившуюся в калориметре температуру. Удельная теплота плавления галлия  $\lambda = 80$  кДж/кг, удельная теплоемкость жидкого галлия  $c = 410$  Дж/(кг·°С). Теплоемкостью калориметра и палочки пренебречь.

*М.Ромашка*

### 9 класс

1. Цилиндр массой  $M$  поместили на рельсы, наклоненные под углом  $\alpha$  к горизонту (вид сбоку показан на рисунке 2).



Груз какой минимальной массы  $m$  нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы цилиндр показателся вверх? Проскальзывание отсутствует.

*А.Якута*

Рис. 2

2. Алюминиевая проволока диаметром  $d = 2,5$  мм, не слишком гнутая, покрыта льдом. Общий диаметр проволоки со льдом  $D = 3,5$  мм. Температура льда и проволоки  $t = 0$  °С. По проволоке пустили ток силой  $I = 15$  А. За какое время лед растает? Плотность льда  $\rho_{л} = 0,9$  г/см<sup>3</sup>, а его удельная теплота плавления  $\lambda = 340$  кДж/кг. Удельное сопротивление алюминия  $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

*М.Ромашка*

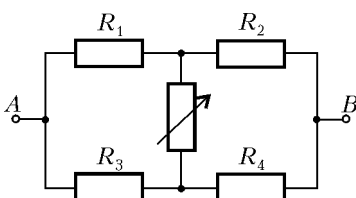


Рис. 3

3. Электрическая цепь состоит из трех резисторов с известными сопротивлениями  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_4 = 60$  Ом, одного резистора с неизвестным сопротивлением  $R_3$  и одного переменного резистора (рис.3). При

измерении сопротивления  $R_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$  этой электрической цепи выяснилось, что оно не зависит от сопротивления переменного резистора. Найдите величины сопротивлений неизвестного резистора  $R_3$  и всей цепи  $R_{AB}$ .

*М.Ромашка*

4. В секстанте, который позволяет определять угол  $\varphi$  возвышения Солнца над горизонтом в полдень и, таким образом, широту местности, используются два плоских зеркала, от которых свет поочередно отражается и угол  $\alpha$  между которыми регулируется. Изображение Солнца в этих зеркалах при измерениях с помощью секстанта необходимо совместить с линией горизонта, подбирая угол  $\alpha$ . Найдите связь угла  $\alpha$  с углом  $\varphi$  и объясните, почему использование секстанта сильно упрощает задачу нахождения угла  $\varphi$ , особенно при качке корабля.

*М.Семенов*

### 10 класс

1. Однажды летним утром кузнечик сидел на асфальте. Когда Солнце поднялось на угол  $\varphi$  над горизонтом, он прыгнул в сторону Солнца с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. С какой скоростью будет двигаться по асфальту тень кузнечика спустя время  $t$  после прыжка?

*М.Ромашка*

2. На шарнирно закрепленной доске на расстоянии  $R$  от шарнира находится маленькая шайба. Доску, первоначально расположенную горизонтально, начали вращать вокруг шарнира в вертикальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$ . При каком значении угла  $\alpha$  наклона доски к горизонту шайба начнет соскльзывать по доске? Коэффициент трения шайбы о доску равен  $\mu < 1$ , ускорение свободного падения равно  $g$ .

*А.Якута*

3. Два космических корабля с массами  $m_1$  и  $m_2$  летят с выключенными двигателями в поле тяготения звезды, масса которой  $M$  много больше их масс. Скорости кораблей на большом удалении от звезды были равны  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. После пролета кораблей около звезды и их удаления на большое расстояние от нее векторы их скоростей изменили свое направление на  $90^\circ$  и остались такими же по величине. Первый корабль пролетел от звезды на минимальном расстоянии  $l_1$ . На каком минимальном расстоянии от звезды  $l_2$  пролетел второй корабль?

*О.Шведов*

### 11 класс

1. По внутренней поверхности большого неподвижного обруча радиусом  $2r$  без проскальзывания катится малый обруч радиусом  $r$ . Отрезок  $OO'$ , соединяющий центры обручей, движется с угловой скоростью  $\omega$ . К малому обручу в точке  $A$  прикреплен грузик. В некоторый момент времени обручи и грузик расположены так, как показано на рисунке 4. Чему равно в этот момент ускорение грузика?

*С.Кротов, М.Семенов*

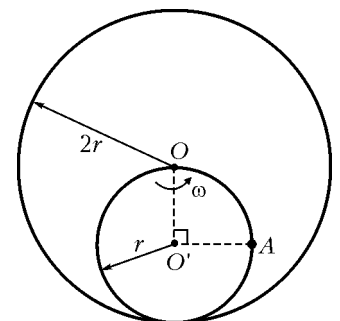


Рис. 4

2. На закрепленной наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, удерживают легкий лист бумаги. В некоторый момент на него положили большой деревянный брусок. С каким ускорением начал двигаться брусок, когда брусок и бумагу отпустили? Коэффициент трения между

брусом и бумагой  $\mu_1$ , между бумагой и наклонной плоскостью  $\mu_2$ .

*М.Ромашка*

3. Для обоснования формулы, связывающей массу и энергию, А. Эйнштейн предложил следующий мысленный эксперимент. Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  находятся на концах легкой неподвижной тележки длиной  $L$ , которая может свободно перемещаться по горизонтальной поверхности без трения. Одно из тел испускает фотон с частотой  $\omega$ , который поглощается вторым телом. Чему будет равна скорость тележки после испускания фотона до его поглощения? А после поглощения фотона? На какое расстояние сместится тележка в рассматриваемом процессе? На какую величину  $\Delta m$  должна уменьшиться масса первого тела и увеличиться масса второго тела, чтобы центр масс системы после поглощения фотона остался на месте? Постоянная Планка равна  $\hbar$ , скорость света  $c$ .

*О.Шведов*

**ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР**

8 класс

1. Ко дну сосуда при помощи шарнира прикреплена за конец тонкая однородная палочка длиной  $L$ . В сосуд медленно наливают воду и отмечают, какая часть длины палочки  $L_n$  оказывается под водой. График зависимости относительной части длины палочки  $L_n/L$ , находящейся под водой, от высоты  $h$  уровня жидкости над дном сосуда изображен на рисунке 5. Определите плотность материала палочки, если известна плотность воды  $\rho_n$ .

Рис. 5

2. В калориметре находился лед массой  $m_l = 0,5$  кг при температуре  $t_l = -20$  °С. Удельная теплоемкость льда  $c_l = 2100$  Дж/(кг·°С), а его удельная теплота плавления  $\lambda = 340$  кДж/кг. В калориметр впускают пар массой  $m_n = 60$  г при температуре  $t_n = 100$  °С. Какая температура установится в калориметре? Удельная теплоемкость воды  $c_v = 4200$  Дж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды  $r = 2,2 \cdot 10^6$  Дж/кг. Теплоемкостью калориметра и потерями тепла пренебречь. Ответьте на тот же вопрос, если начальная масса льда равна  $m_{л1} = 0,3$  кг.

*М.Ромашка*

3. Груз массой  $M$  прикреплен к подвижному блоку, подвешенному на нити, один конец которой намотан на шкив радиусом  $r$ , а другой конец перекинут через соосный, скрепленный с первым шкив радиусом  $R$  и наматывается на вал, приводимый во вращение при помощи двигателя (рис.6). Скорость горизонтального участка нити равна  $v$ . Найдите мощность, которая развивается двигателем при поднятии груза, считая, что нить не проскальзывает по шкивам.

Рис. 6

*Я.Пузырев*

9 класс

1. Находясь на вершине ледяной горки, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, школьник бросил снежок под углом  $\beta = 70^\circ$  к горизонту и в этот же момент начал спускаться без начальной скорости с этой горки на санках (рис.7). Через некоторое время снежок попал в школьника. Найдите коэффициент трения между полозьями санок и льдом.

Рис. 7

*М.Ромашка*

2. В системе, изображенной на рисунке 8, нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трения нет. Массы грузов на концах нити равны  $m_1$  и  $m_2$ , однородная доска массой  $m_3$  лежит на горизонтальном столе так, что вертикальные участки нити, переброшенной через закрепленные на доске блоки, проходят вдоль ее торцов. При каком условии доска при движении грузов будет оставаться в горизонтальном положении?

Рис. 8

*М.Семенов*

3. В два сообщающихся цилиндра налита вода. Один из цилиндров с площадью поперечного сечения  $S_1$  открыт, а другой закрыт сверху поршнем, к которому прикреплен пружина (рис.9). Система находится в равновесии. Если точку подвеса пружины сместить вниз на  $a$ , то свободная поверхность воды в первом цилиндре поднимется на  $\alpha_1 a$ , а поршень опустится на  $\alpha_2 a$  ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – положительные коэффициенты). Чему равна площадь поперечного сечения  $S_2$  закрытого цилиндра? На какое расстояние  $b_2$  сместился бы поршень, если бы в открытый цилиндр долили объем  $V$  воды, не смещая точку подвеса пружины? Чему равна жесткость пружины  $k$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ , плотность воды  $\rho$ .

Рис. 9

*О.Шведов*

4. В технической документации на калькулятор школьник прочитал: «Для нормальной работы калькулятора подаваемое на него напряжение должно быть в пределах от  $U_{\min} = 4,5$  В до  $U_{\max} = 5,5$  В; в зависимости от режима работы калькулятор потребляет ток от  $I_{\min} = 20$  мА до  $I_{\max} = 50$  мА». Не найдя батарейку с нужным напряжением, школьник решил включить данный калькулятор, используя имеющийся в школьной лаборатории аккумулятор с напряжением  $U_0 = 12$  В и малым внутренним сопротивлением и резисторы, собранные в электрическую

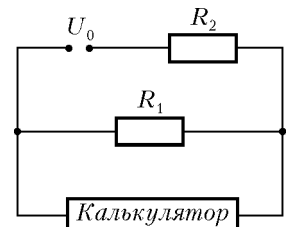


Рис. 10

цепь, схема которой изображена на рисунке 10. Сопротивление второго резистора  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ . В каком интервале должно лежать сопротивление первого резистора ( $R_1$ ), чтобы включенный таким образом калькулятор функционировал нормально?

*С.Варламов*

### 10 класс

1. В невесомости внутри сферы радиусом  $R_0$  движется шарик, упруго соударяясь со стенками сферы. Скорость шарика  $v_0$ , угол падения шарика на сферу, т.е. угол между вектором его скорости и нормалью к сфере непосредственно перед соударением, равен  $\alpha_0$  (рис.11). Сферу начали медленно равномерно сжимать до радиуса  $R_1$ . С какой скоростью  $v_1$  будет двигаться шарик в конце процесса сжатия? Чему при этом будет равен угол  $\alpha_1$  падения шарика на сферу?

Рис. 11

2. Идеальный одноатомный газ в количестве  $\nu$  молей участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изотерм и двух изохор. При изохорическом нагревании газ получает количество теплоты  $Q_1$ , а при изотермическом расширении – количество теплоты  $Q_2$ . Минимальная температура газа в данном циклическом процессе равна  $T_{\min}$ . Найдите: а) максимальную температуру газа; б) количества теплоты, отданные газом при изохорическом охлаждении и изотермическом сжатии; в) работу, совершенную газом на каждой из стадий процесса; г) КПД теплового двигателя, работающего по рассматриваемому циклу.

*А.Зильберман*

3. Двенадцать резисторов спаяны в виде прямоугольного параллелепипеда таким образом, что сопротивления каждого четырех параллельных ребер одинаковы и равны  $R_1$ ,  $R_2$  и

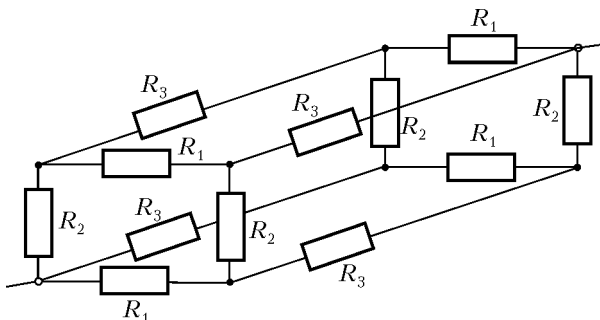


Рис. 12

$R_3$  соответственно (рис.12). Найдите сопротивление этой электрической цепи между точками, лежащими на пространственной диагонали параллелепипеда.

*С.Кротов*

### 11 класс

1. В системе, изображенной на рисунке 13, цилиндрический груз массой  $m_1$  движется внутри цилиндрического канала чуть большего диаметра, просверленного внутри тела массой  $m_2$ . Нить, соединяющая грузы с массами  $m_1$  и  $m_3$ , невесома и нерастяжима, блоки невесома, трения нет. Чему равно ускорение тела массой  $m_1$ ? Ускорение свободного

падения равно  $g$ , участок нити между блоками горизонтален.

*М.Семенов*

2. Развивая молекулярно-кинетическую теорию, И. Лошмидт в 1865 году предложил первый способ оценки размера и массы молекулы. Он использовал известные в его время данные о длине свободного пробега – расстоянии, которое пролетает молекула газа в промежутке между столкновениями (оно выражается через определяемые из опыта коэффициенты вязкости и теплопроводности). Вслед за Лошмидтом получите формулы для оценки по порядку величины размера молекулы  $r_0$  и ее массы  $m_0$  по известным данным – длине свободного пробега  $\lambda$  и плотностям вещества  $\rho_r$  и  $\rho_{ж}$  в газообразном и жидком состояниях. Получите ответ в общем виде и для числовых значений  $\lambda \approx 10^{-7} \text{ м}$ ,  $\rho_{ж} \approx 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_r \approx 1 \text{ кг/м}^3$ .

*О.Шведов*

3. Два одинаковых неидеальных диода с вольт-амперной характеристикой, приведенной на рисунке 14,а включены вместе с конденсатором, двумя резисторами, идеальной батареей и ключом в электрическую цепь, изображенную на рисунке 14,б. Сопротивления резисторов  $R = 16 \text{ Ом}$  и  $r = 4 \text{ Ом}$ , ЭДС батарейки  $\mathcal{E} = 4 \text{ В}$ , емкость конденсатора  $C = 100 \text{ мкФ}$ , параметры вольт-амперной характеристики диода  $U_0 = 1 \text{ В}$  и  $I_0 = 50 \text{ мА}$ . а) Ключ в цепи замкнули. До какого напряжения зарядится конденсатор? б) После заряд-

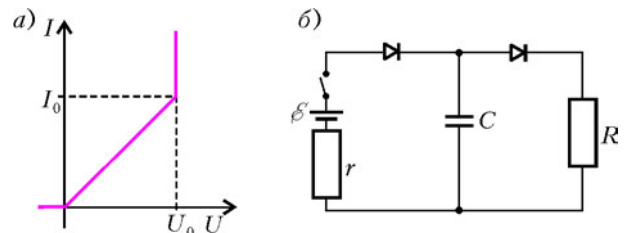


Рис. 14

ки конденсатора ключ разомкнули. Какое количество теплоты выделится при разрядке конденсатора на резисторе  $R$ ? А на каждом из диодов?

*К.Парфенов*

4. Электрическая цепь состоит из катушек с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и конденсатора емкостью  $C$ , включенных параллельно. В начальный момент времени токи через катушки текут в одну сторону и равны  $I_1^0$  и  $I_2^0$ , а конденсатор не заряжен (рис.15). Найдите частоту  $\omega$  возникающих в системе гармонических колебаний и зависимости от времени токов через катушки  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  и заряда на конденсаторе  $Q(t)$ . Сопротивлением катушек пренебречь.

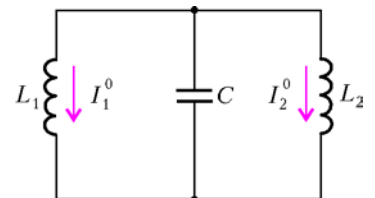


Рис. 15

*О.Шведов*

Публикацию подготовили  
М.Семенов, А.Якута