

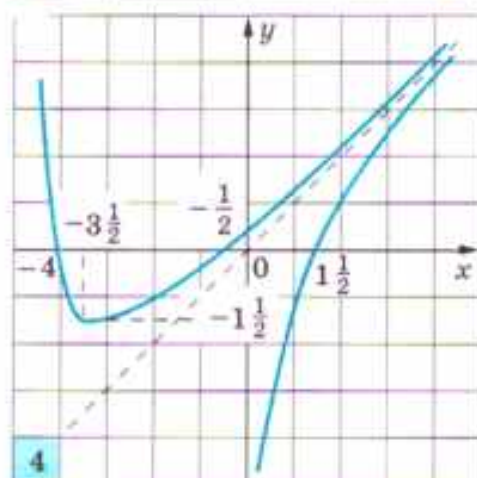
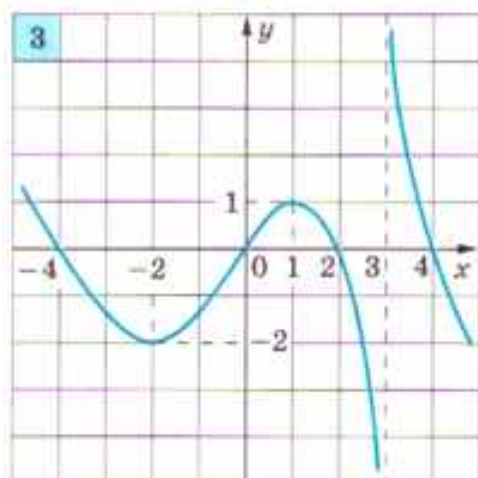
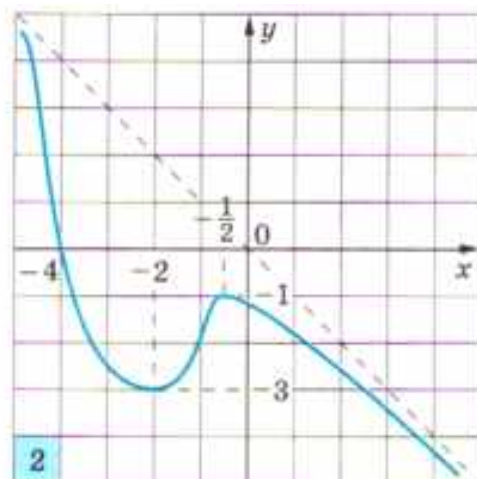
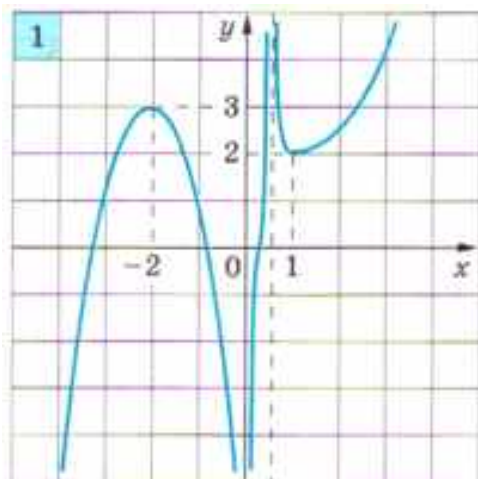
Глава 11

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

- T-1101 Исследование функции по графику
- T-1102 Соответствие между графиком рациональной функции и формулой
- T-1103 Построение графика по свойствам
- T-1104 Параллельный перенос графика
- T-1105 Симметричное отражение графика
- T-1106 Растяжение графика
- T-1107 Дробно-линейная функция
- T-1108 Построение формулы гиперболы
- T-1109 Квадратичная функция
- T-1110 Исследование дробно-линейной функции
- T-1111 Решение уравнений по графику
- T-1112 Рациональные неравенства
- T-1113 Четность
- T-1114 Обобщение

T-1101

Исследование функции по графику



	1	2	3	4
Область определения				
Нули				
Знаки	+			
	-			
Монотонность	↗			
	↘			
Экстремумы				
Область значений				

T-1102

Соответствие между графиком рациональной функции и формулой

Для каждой рациональной функции найдите ее график.

1. $y = \frac{-1}{x+2}$

2. $y = \frac{x}{x+2}$

3. $y = \frac{1}{x^2-4}$

4. $y = \frac{x}{x^2-4}$

5. $y = \frac{1}{x^2+4}$

6. $y = \frac{x}{x^2+4}$

7. $y = x + \frac{4}{x}$

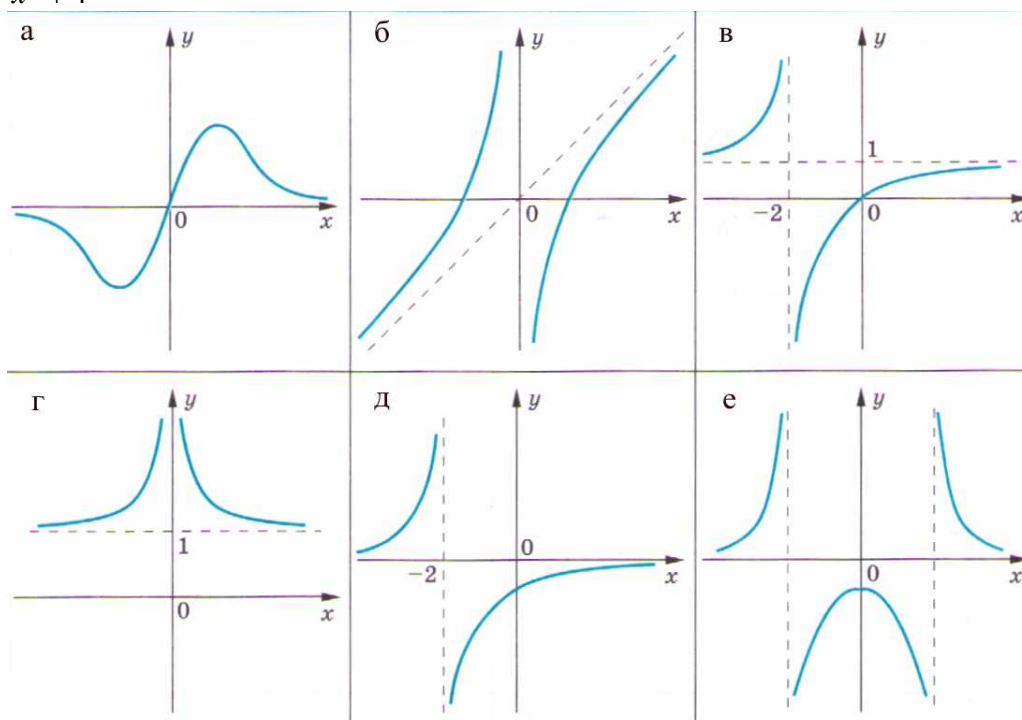
8. $y = x - \frac{4}{x}$

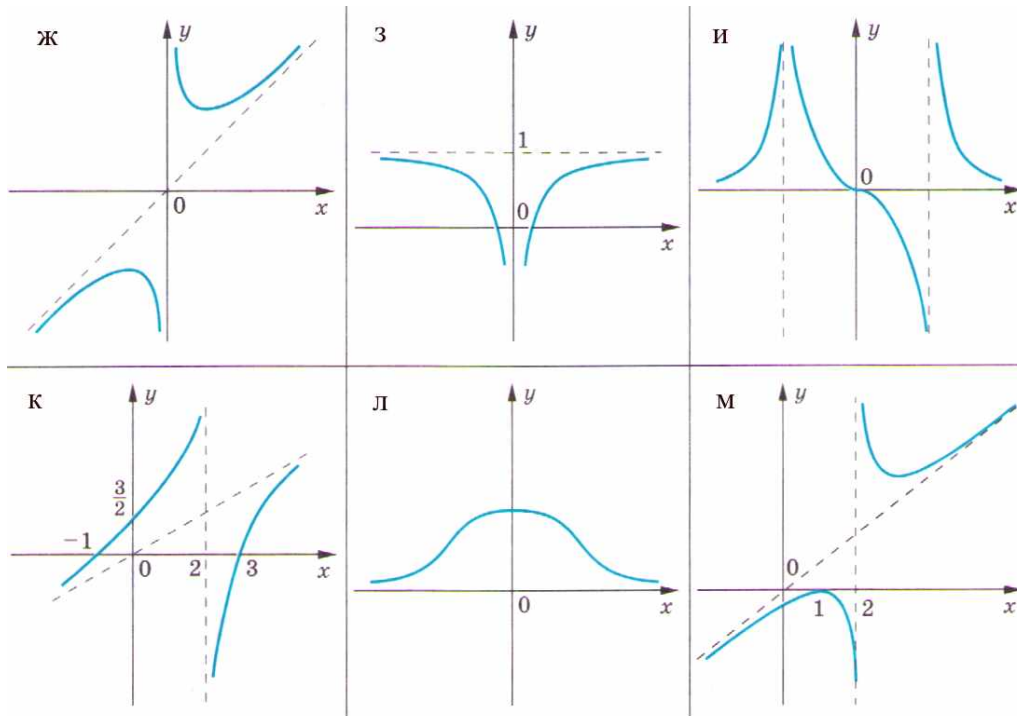
9. $y = \frac{x^2+4}{x^2}$

10. $y = \frac{x^2-4}{x^2}$

11. $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$

12. $y = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$



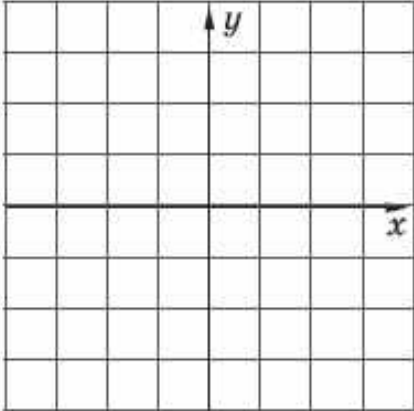
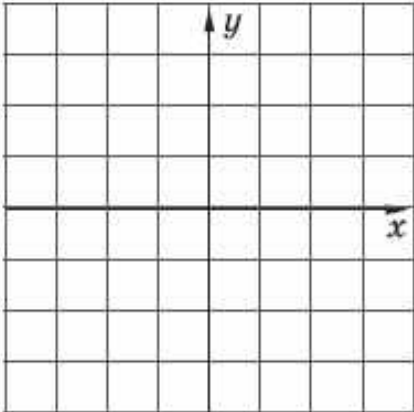
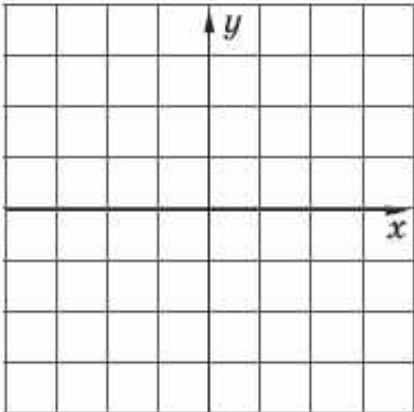


Формула	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
График												

Т-1103 Построение графика по свойствам

Постройте график функции с заданными свойствами на $[a; b]$.

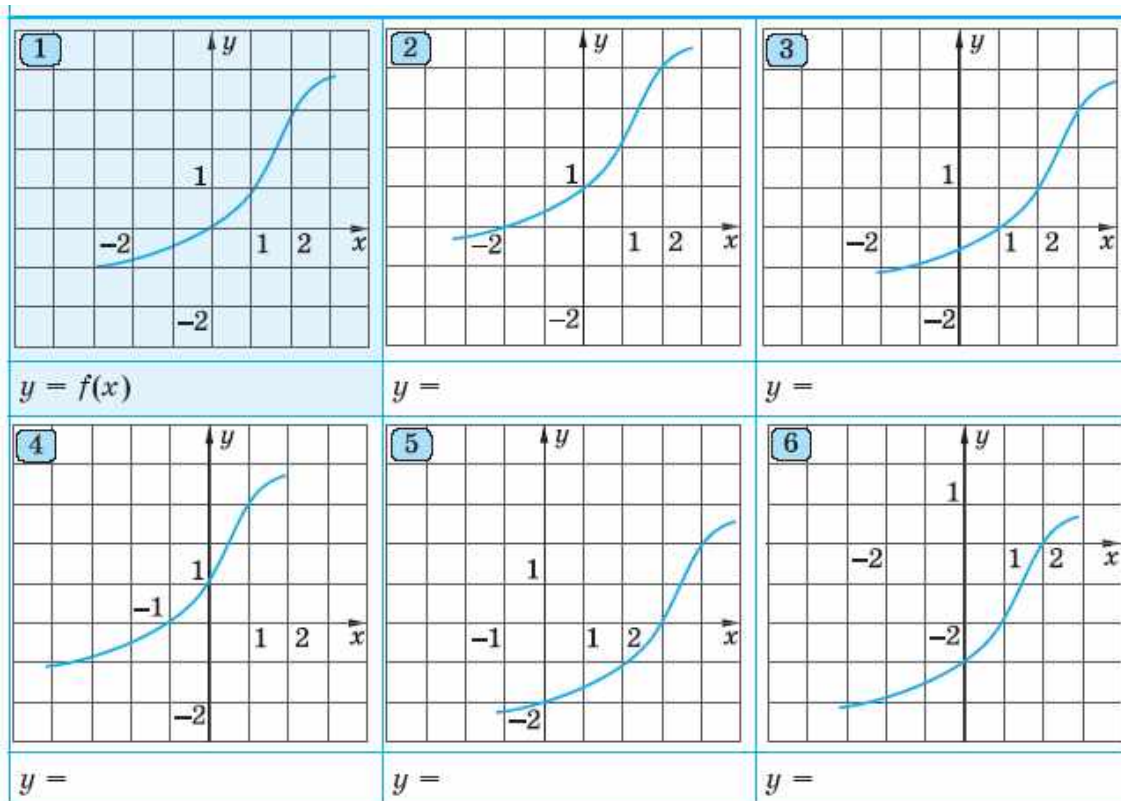
№ п/п	Свойства	График
1	$y = f(x)$ на $[-3; 3]$ 1) График проходит через точки $P_1(-3; -3)$, $P_2(1; 1)$, $P_3(3; 3)$. 2) Функция обращается в нуль при $x = -2$, $x = 1,5$ и $x = 2,5$. 3) Максимум: $y = 2$ при $x = -1$; минимум: $y = -1$ при $x = 2$.	

№ п/п	Свойства	График
2	$y = f(x)$ на $[-3; 2]$ 1) Наибольшее значение, равное 2, функция принимает в точке с абсциссой (-3) . 2) Нули функции: $x = 0, x = 2$. 3) Минимум функции $y = 0$ при $x = 0$, максимум: $y = 1$ при $x = 1$.	
3	$y = f(x)$ на $[-2; 2]$ 1) Нули функции: $x = -2; x = 0; x = 2$. 2) Минимум функции $y = -2$ при $x = -1$; максимум: $y = 2$ при $x = 1$.	
4	$y = f(x)$ на $[-3; 3]$ 1) График проходит через точки $(-3; 1); (3; -1)$. 2) Функция убывает на $[-2; 1]$, возрастает на $[-3; -2]$ и на $[1; 3]$. 3) Нули функции: $x = -1$. 4) Наибольшее значение функции равно 3, наименьшее (-3) .	

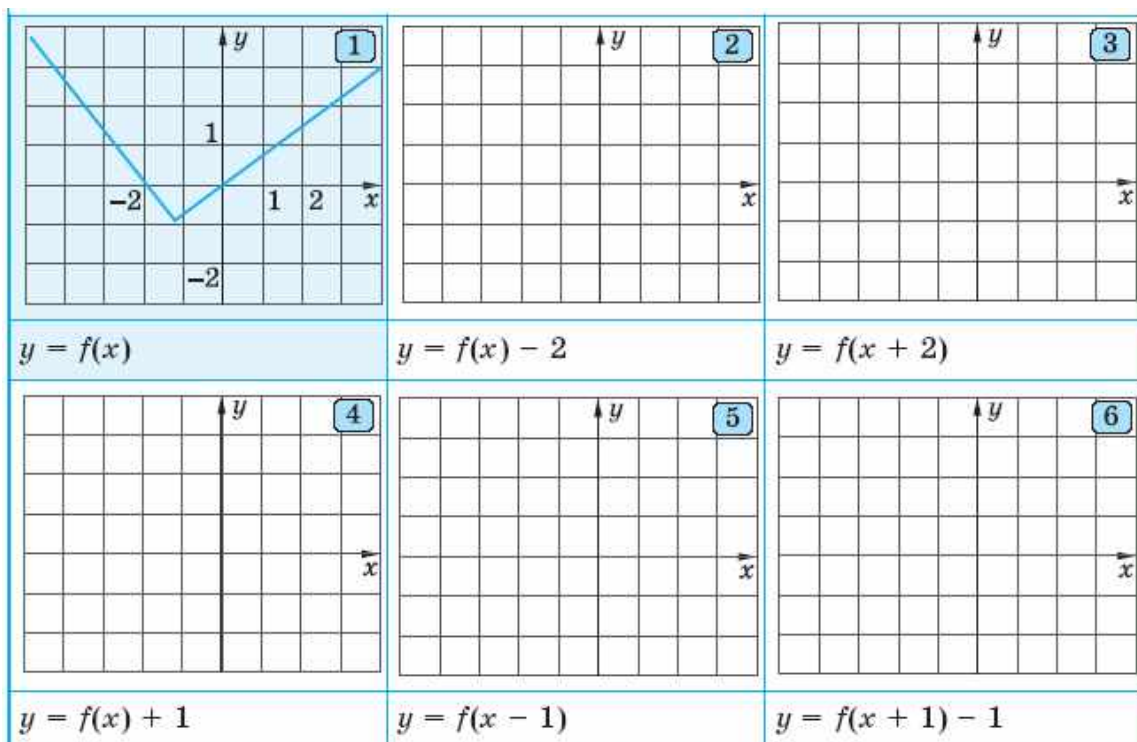
Т-1104

Параллельный перенос графика

На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Запишите формулы, с помощью которых можно задать остальные графики.

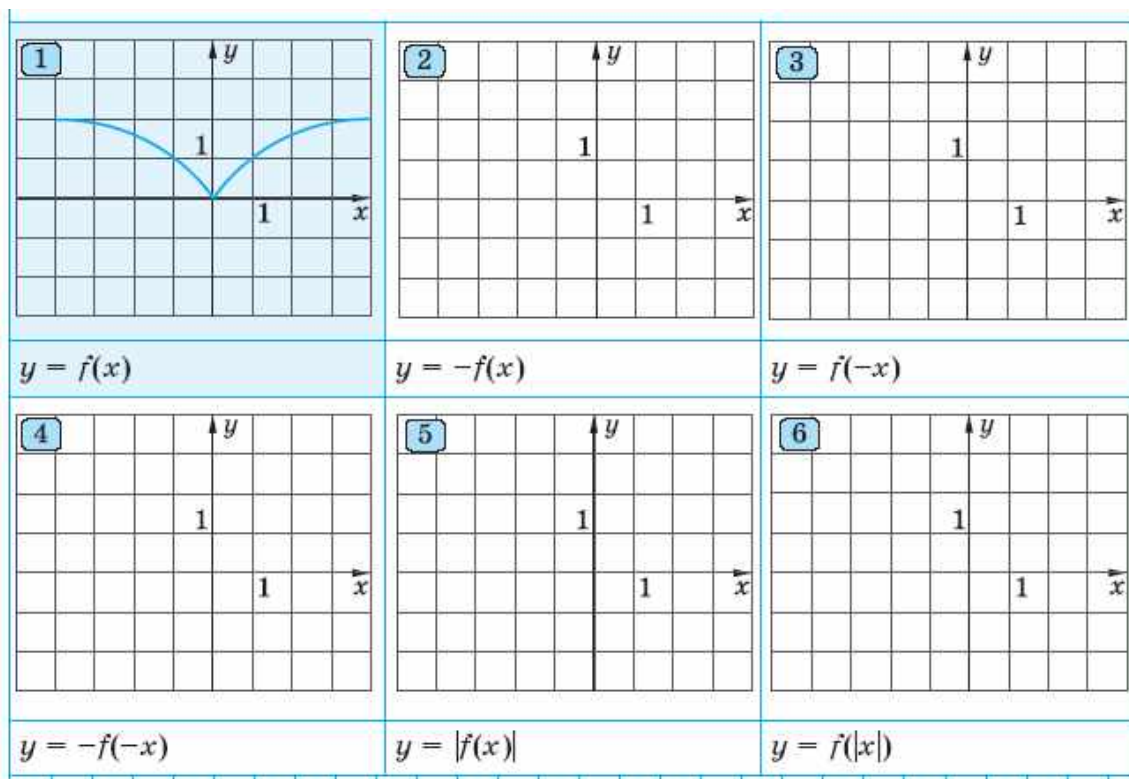


На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Начертите графики преобразованных функций.

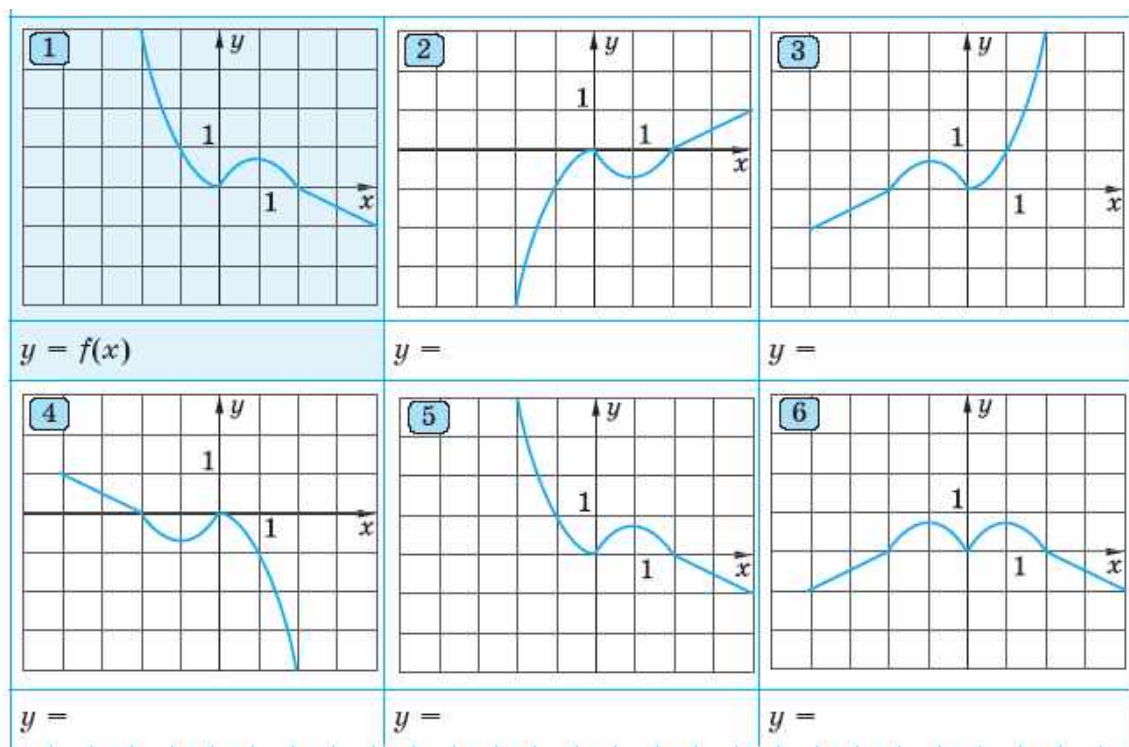


T-1105 Симметричное отражение графика

Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 1). Постройте графики преобразованных функций.

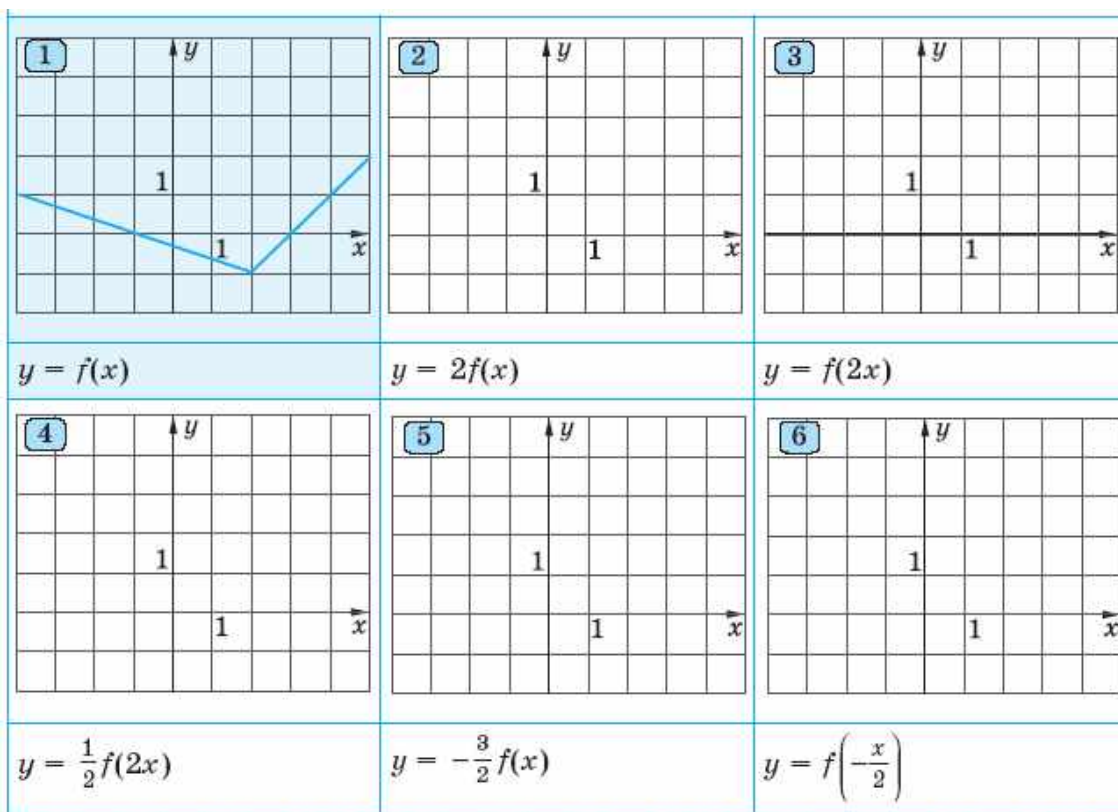


На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Запишите формулы, с помощью которых можно задать остальные графики.

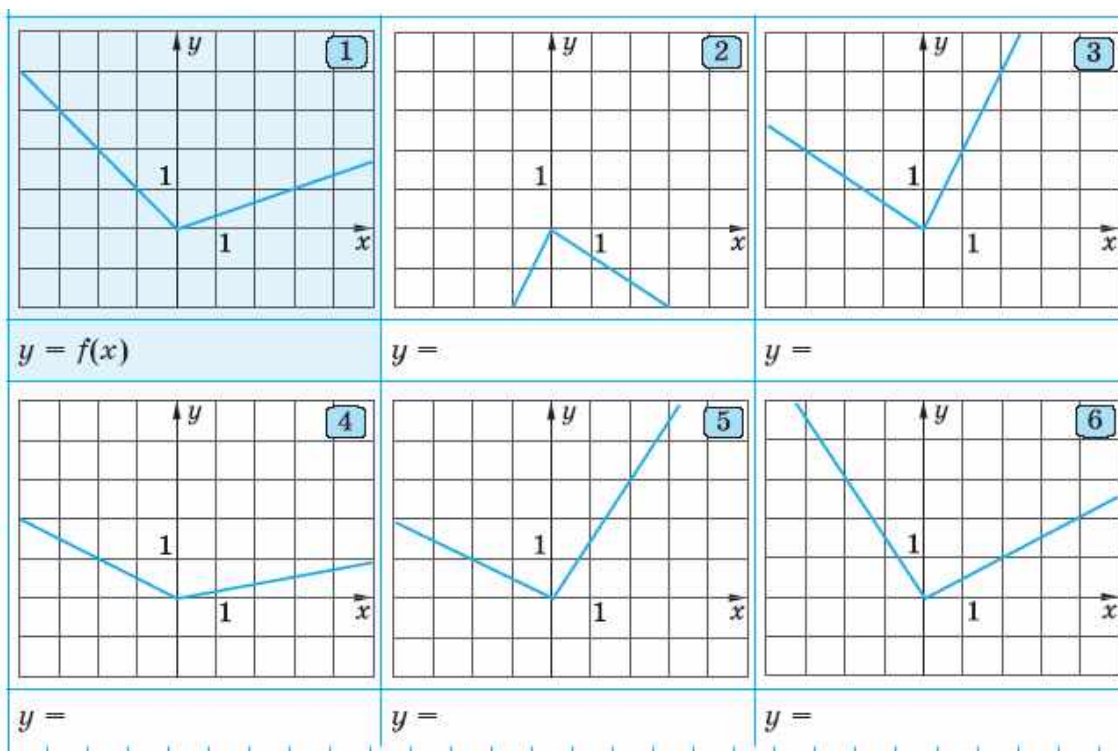


T-1106 Растяжения графика

Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 1). Постройте графики преобразованных функций.



На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Запишите формулы, с помощью которых можно задать остальные графики.



Т-1107 Дробно-линейная функция

1) Построение графика

Начиная с известного графика функции $y = \frac{k}{x}$, с помощью преобразований можно построить графики других дробно-линейных функций. Постройте графики указанных функций.

1) $y = \frac{1}{x+1}$ (рис. 1)

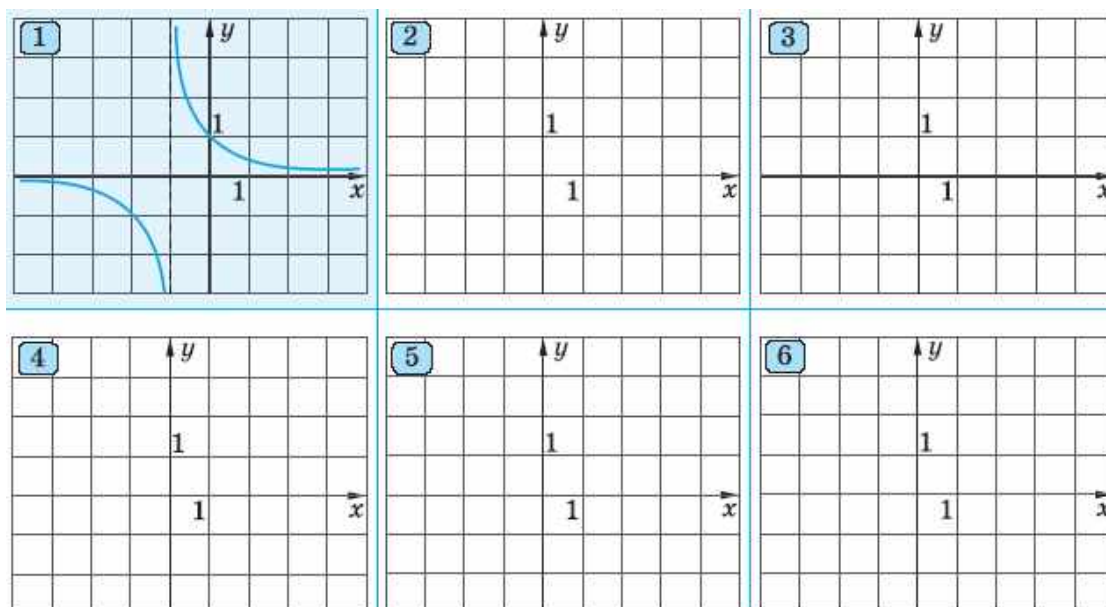
4) $y = \frac{1}{x-1} - 1$

2) $y = \frac{1}{x} + 1$

5) $y = \frac{-2}{x+1}$

3) $y = \frac{2}{x-2}$

6) $y = \frac{-1}{x+2} + \frac{1}{2}$



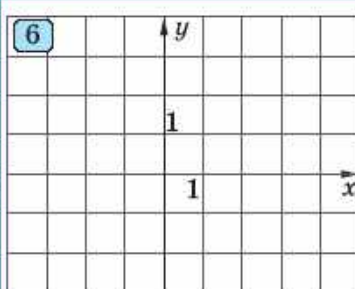
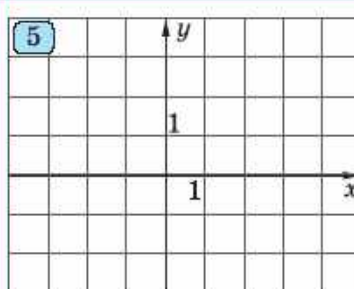
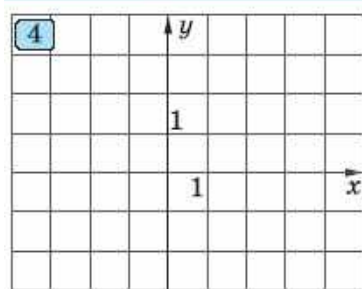
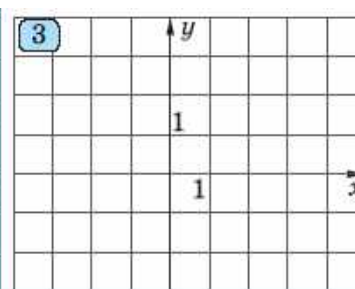
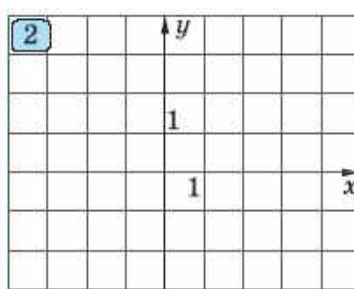
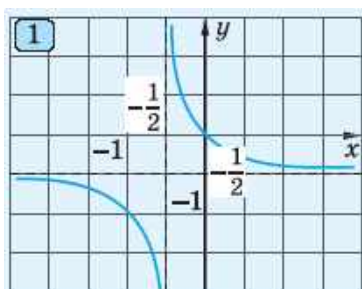
2) Стандартная запись дробно-линейной функции

Функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ может быть приведена к виду $y = \frac{k}{x-x_0} + y_0$, или

$(y - y_0)(x - x_0) = k$. Такую запись будем считать стандартной. Через точку $P(x_0; y_0)$ надо провести «крест» – прямые, параллельные осям координат. Затем в четвертях, образованных этим крестом, расположить ветви гиперболы (первой и третьей при $k > 0$ и второй и четвертой при $k < 0$). При построении учесть величину коэффициента k , строя несколько точек графика (и прежде всего точки пересечения с осями координат).

Приведите заданные дробно-линейные функции и стандартному виду и затем постройте их графики.

1) $y = \frac{-x}{2x+1}$	$\frac{-x}{2x+1} = \frac{-x}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}, y = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}$ $\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad P\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad k = \frac{1}{4} \text{ (рис. 1)}$
2) $y = \frac{x}{x-2}$	
3) $y = \frac{2x+1}{x-1}$	
4) $y = \frac{-x+1}{x+3}$	
5) $y = \frac{x+2}{3x-2}$	
6) $y = \frac{3-2x}{2x+3}$	



Т-1108 Построение формулы гиперболы

Задайте дробно-линейную функцию формулой $y = \frac{kx}{x - x_0} + y_0$.

№	Условие	Чертеж	Ответ
1	Центр гиперболы находится в точке $A(2; 1)$ и она проходит через точку $M(1; 2)$		
2	Вертикальная асимптота гиперболы: $x = -2$; график проходит через начало координат и точку $M(-1; 3)$		
3	Горизонтальная асимптота гиперболы: $y = -3$; график проходит через точки $M_1(2; -1)$ и $M_2(-1; -4)$.		
4	Гипербола проходит через три точки $M_1(-2; -4)$, $M_2(-1; -1)$ и $M_3\left(1; \frac{1}{2}\right)$.		
5	Осями симметрии гиперболы являются прямые $x + y = 3$ и $x - y = -1$; функция обращается в нуль при $x = -1$.		

Т-1109 Квадратичная функция

Приведите квадратные трехчлены вида $y = ax^2 + bx + c$ к виду $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Выпишите координаты $P(x_0; y_0)$ вершины параболы.

№	Квадратный трехчлен	Вершина
1	$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$	$P\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}\right)$
2	$x^2 + 4x + 1 =$	
3	$-x^2 + 6x + 3 =$	

№	Квадратный трехчлен	Вершина
4	$x^2 + 5x - 1 =$	
5	$3x^2 - x + 7 =$	
6	$-2x^2 + 6x - 5 =$	
7	$5x^2 + 8x - 13 =$	

Т-1110 Исследование дробно-линейной функции

Заполните таблицу свойств указанных дробно-линейных функций.

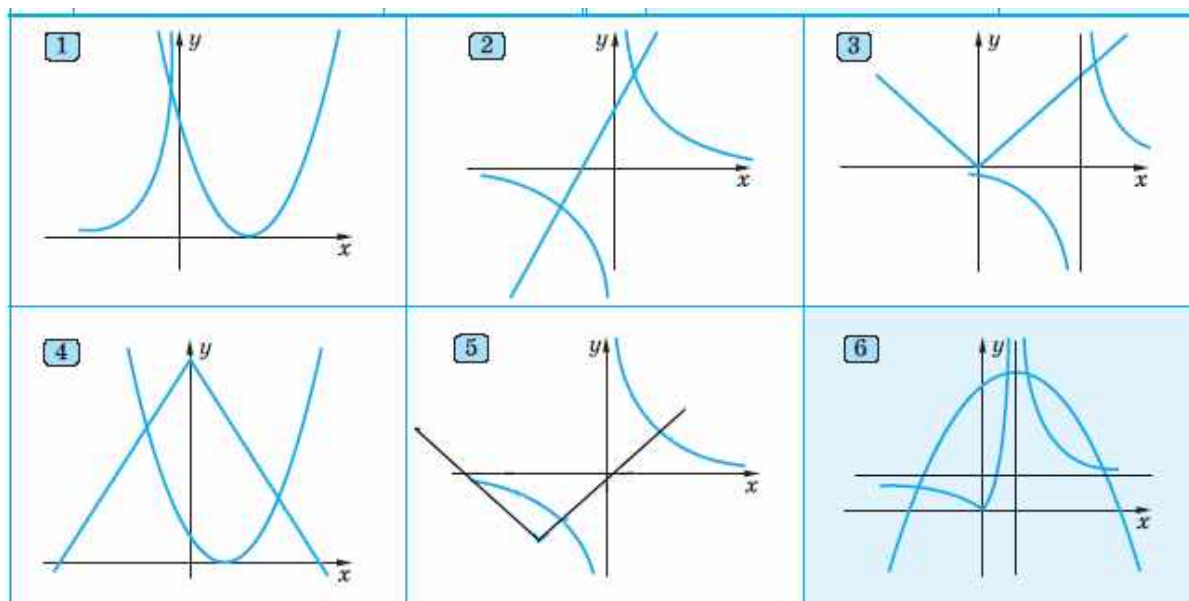
Под *стандартным видом* функции подразумевается запись: $y - y_0 = \frac{k}{x - x_0}$.

Функция		$y = \frac{x-1}{x-2}$	$y = \frac{x}{2x+3}$
Свойство			
Стандартный вид			
Область определения			
Нули			
Монотонность	↗		
	↘		
Знаки	+		
	-		
Область значений			
График			
Асимптоты	вертикальная		
	горизонтальная		

Т-1111 Решение уравнений по графику

Применяя графики, определите число корней следующих уравнений.

	Уравнение	Число корней		Уравнение	Число корней
1	$(x-2)^2 + \frac{1}{x} = 0$		4	$ x + (x-1)^2 = 5$	
2	$\frac{1}{x} - 2x - 3 = 0$		5	$\frac{1}{x} = x+2 - 2$	
3	$ x = \frac{1}{x-3}$		6	$\left \frac{x}{x-1} \right + (x-1)^2 = 4$	4



Т-1112 Рациональные неравенства

Решите неравенства. Под *стандартным видом* неравенства понимается его запись в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или запись $P(x) \cdot Q(x) > 0$, где многочлены P и Q разложены на множители.

	Неравенство	Стандартный вид	Числовая ось	Ответ
1	$\frac{x+5}{2x-1} < 0$			
2	$\frac{x-4}{1-3x} > 0$			
3	$\frac{8-2x}{x-5} < 0$			
4	$\frac{x(x+1)}{3x+6} < 0$			

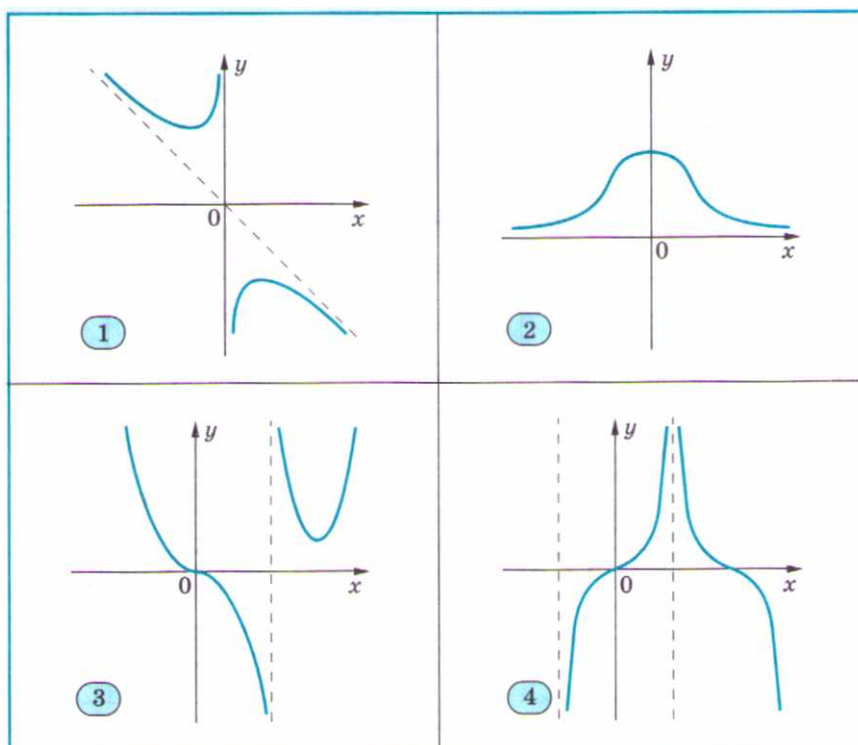
	Неравенство	Стандартный вид	Числовая ось	Ответ
5	$\frac{x^2-1}{x+4} < 0$			
6	$\frac{x^2+9}{(x-7)(x+4)} < 0$			
7	$\frac{3x-6}{(x+3)(x-5)} > 0$			
8	$\frac{5x-2}{(2x-7)(3x+12)} < 0$			
9	$(1-x^2)(5-x) < 0$			
10	$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$			
11	$\frac{x}{3-x} > 2$			
12	$\frac{1}{x} < \frac{3}{2x+1}$			
13	$x(x^2-1) \geq 6(x-1)$			
14	$\frac{2x^2-8}{x^2+4x-5} \leq 0$			
15	$2x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \geq 3(2x+1)$			
16	$\frac{x^3+8}{x^3-27} < 0$			
17	$x + \frac{1}{x} \leq \frac{10}{3}$			
18	$\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x} - \frac{15}{x+1} > 0$			
19	$x^2 + x - 1 \geq \frac{2}{x^2 + x}$			
20	$\frac{x+5}{(x-1)^3} \leq \frac{7}{x-1}$			

Т-1113 Четность

1. Исследуйте функцию на четность. В свободной клетке поставьте один из знаков: «+» для четной функции, «-» – для нечетной, «О» для функции общего вида, т. е. не являющейся ни четной, ни нечетной.

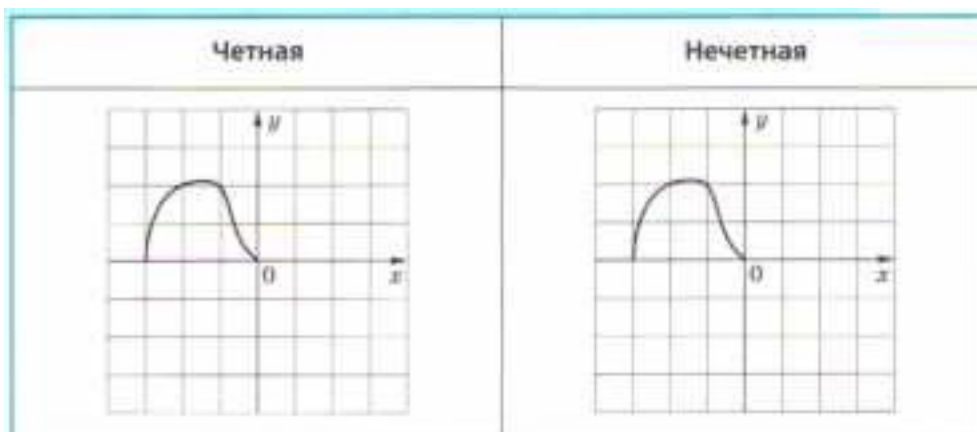
№	Функция	Четность	№	Функция	Четность
1	$y = \frac{1}{x}$		11	$y = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$	
2	$y = \frac{1}{x^4} + x^2$		12	$y = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x+3}$	
3	$y = x^8 + 3x^4 - 2x^2 + 5$		13	$y = 3 - x^2 + \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x+2}$	
4	$y = x ^2 - 3 x + 2$		14	$y = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$	
5	$y = 2 x - 3 $		15	$y = \begin{cases} 2x+3, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2x-3, & x < 0 \end{cases}$	
6	$y = x^3 - \frac{1}{x^5} + 2x$		16	$y = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$	
7	$y = x + 3$		17	$y = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0 \end{cases}$	
8	$y = x^2 + 2x - 3$		18	$y = \begin{cases} x-1 , & x \geq 0, \\ x+1 , & x < 0 \end{cases}$	
9	$y = \frac{1}{x-1}$		19	$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$	
10	$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$		20	$y = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$	

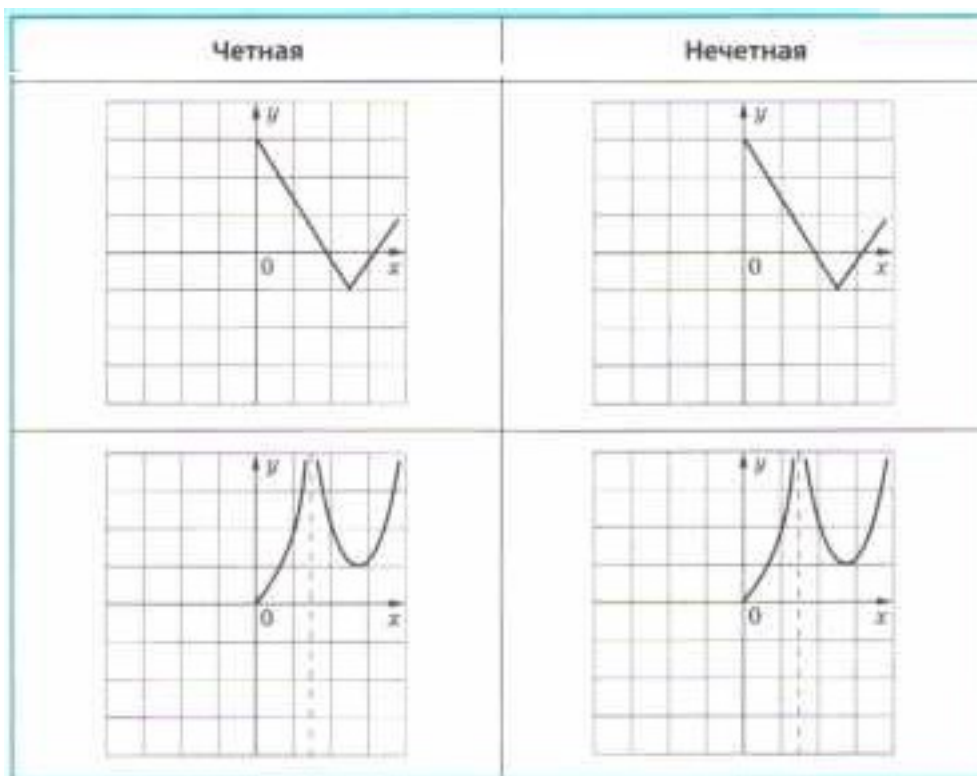
2. Даны графики четырех функций. Укажите среди них четные (+), нечетные (-) и функции общего вида (O). Если значения функции при $x \geq 0$ записать формулой $y = f(x)$, то как через $f(x)$ выразятся значения $f(-x)$?



Функция	1	2	3	4
Свойство				
«Четность»				
$f(-x)$				

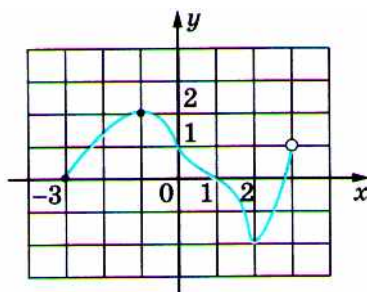
3. Дорисуйте график так, чтобы получилась функция указанной четности.





Т-1114 Обобщение

Отметьте, на каких промежутках функция $f(x)$, заданная графиком, обладает указанными свойствами.



Свойства	Промежуток	$(-3; -2)$	$(-1; 1)$	$(1; 3)$	$(1; 2)$	$(-2; 0)$
Положительна и возрастает						
Отрицательна и убывает						
Выполняется неравенство $1 \leq f(x) \leq 2$						
Принимает наибольшее значение на конце промежутка						
Уравнение $ f(x) = 1$ имеет хотя бы один корень						

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

ЛР-1101 Квадратичная функция с параметром

ЛР-1102 Подпрыгивание теннисного мяча

ЛР-1101 Квадратичная функция с параметром

1) Графическое исследование

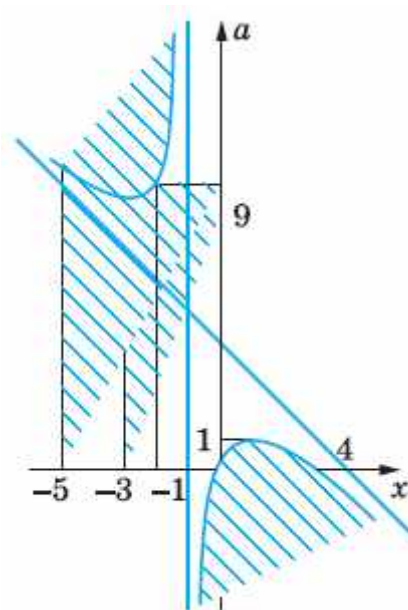
Дана функция $y = f(x, a)$, где $f(x, a) = x^2 + (a - 3)x + a$.

Из уравнения $x^2 + (a - 3)x + a = 0$ можно выразить a

как функцию от x : $a = \frac{3x - x^2}{x + 1}$. С помощью графика

этой функции, изображенного на рисунке, можно ответить на ряд вопросов о поведении квадратного трехчлена $f(x, a)$.

1. Корни квадратного трехчлена $f(x, a)$ при фиксированном значении a_0 – это абсциссы точек пересечения прямой $a = a_0$ с графиком. Ответьте с помощью этого соображения на вопросы 1, 2, 4 и 5 (см. Задание).



2. Ветви графика функции $a = a(x)$ делят плоскость с координатами (x, a) на три части. В двух из них выполняется неравенство $f(x, a) < 0$, а в одной $f(x, a) > 0$. Решение неравенства $f(x, a_0) \leq 0$ при фиксированном a_0 – это отрезок между абсциссами точек пересечения графика с прямой $a = a_0$. Ответьте теперь на вопросы 3, 6, 7 и 8 из задания.

2) Задание

1. При каких a уравнение $f(x, a) = 0$ (относительно x) имеет хотя бы один вещественный корень?
2. При каких a уравнение $f(x, a) = 0$ имеет ровно один корень?
3. При каких a неравенство $f(x, a) > 0$ выполняется при всех значениях x ?
4. При каких a многочлен $f(x, a)$ имеет два положительных корня?
5. При каких a уравнение $f(x, a) = 0$ имеет хотя бы один корень, модуль которого не превосходил бы числа 2 ($|x| \leq 2$)?
6. При каких значениях a все решения неравенства $f(x, a) < 0$ положительны?
7. Вычислите сумму квадратов $s(a)$ корней многочлена $f(x, a)$ как функцию от параметра a .

8. При каком a сумма квадратов вещественных корней многочлена $f(x, a)$ принимает наименьшее значение?
9. Определите, при каких a областью значений функции y будет промежуток $[3; +\infty)$.
10. Найдите наибольшее значение функции $m = m(a)$.

ЛР-1102 Подпрыгивание теннисного мяча

Теннисный мячик сброшен с высоты $H_0 = 1,6$ м. При каждом отскоке мяч теряет половину кинетической энергии.

Требуется изучить закон движения мячика, построить его график, определить различные характеристики движения. Размером самого мячика в вычислениях можно пренебречь.

1. Эксперимент.

Дана таблица значений высоты мячика h над поверхностью земли в зависимости от времени t . Постройте по точкам примерный график функции $h = h(t)$.

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
h	1,60	1,52	1,34	1,07	0,70	0,23	0,21	0,50	0,69	0,79	0,79	0,69	0,49

t	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40
h	0,19	0,13	0,31	0,39	0,38	0,27	0,06	0,12	0,20	0,17	0,05	0,08

2. Исследование движения до первого отскока.

- а) Найдите скорость v_0 первого падения мяча на землю, используя равенство кинетической и потенциальной энергии в этот момент: $mgH_0 = \frac{mv_0^2}{2}$, где $g = 9,8$ м/с².
- б) Запишите закон движения (то есть функцию $h = h(t)$) мячика до первого отскока.
- в) Используя условие потери половины кинетической энергии, вычислите скорость шарика сразу после первого удара о землю.

3. Измерение скорости при отскоках.

- а) Докажите, что скорость v_1 первого отскока связана со скоростью v_0 падения мяча соотношением $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0$.
- б) Выразите скорости второго, третьего и т. д. отскоков v_2, v_3, \dots через скорость v_0 . Верно ли, что v_2 вдвое меньше v_0 ?
- в) Используя формулу связи между кинетической и потенциальной энергией, покажите, что при каждом отскоке высота подъема уменьшается вдвое.

4. Исследование закона движения.

- а) Запишите закон движения между первым и вторым отскоками.
- б) Покажите, что между вторым и третьим отскоками зависимость h от t такова:
 $h = 2,8t - 4,9t^2$.
- в) Определите время между первым и вторым отскоками, вторым и третьим.
- г) Найдите уравнение движения между третьим и четвертым отскоками.
- д) Проверьте, что время между третьим и четвертым отскоками вдвое меньше времени между первым и третьим отскоками.
- е) Обозначьте время между k -м и $(k+1)$ -м отскоками через T_k ; докажите, что
 $T_k = \frac{1}{\sqrt{2}} T_{k-1}$; $T_k = \frac{1}{2} T_{k-2}$.

5. Обсуждение результатов.

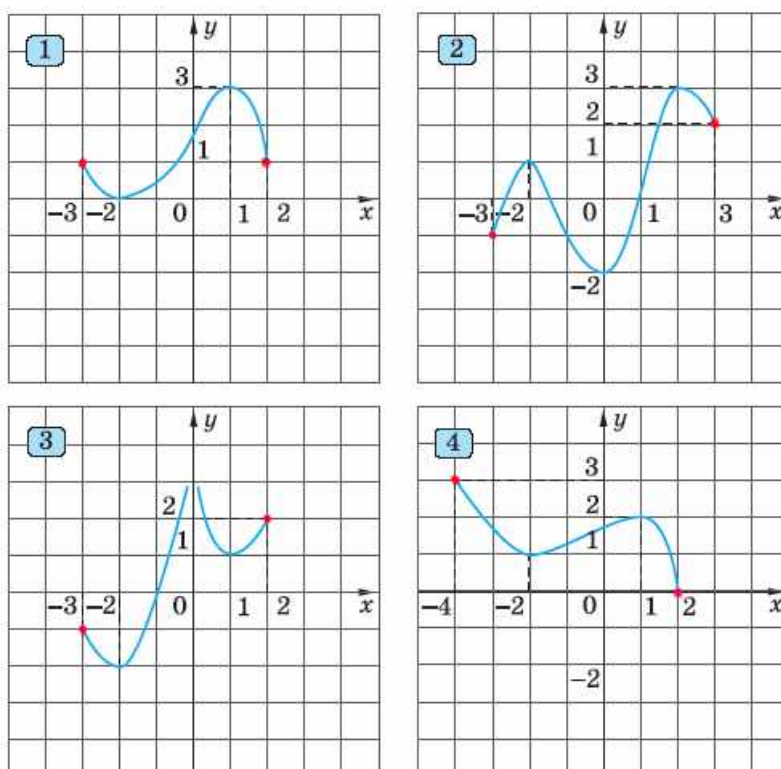
- а) Используя результаты проведенного исследования, постройте график зависимости $h = h(t)$.
- б) Постройте последовательность моментов падения мяча на землю: t_1 , $t_2 = t_1 + T_1$, $t_3 = t_2 + T_2$,
- в) Каково время движения мяча до полной остановки?
- г) Каким точкам на графике соответствуют моменты отскоков?

КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ

- КТ-1101 Исследование функции по графику
 КТ-1102 Преобразования графика
 КТ-1103 Исследование дробно-линейной функции
 КТ-1104 Рациональные неравенства
 КТ-1105 Повторение
 КТ-1106 Итоговый

КТ-1101 Исследование функции по графику

По графику функции запишите в таблицу результаты ее исследования.

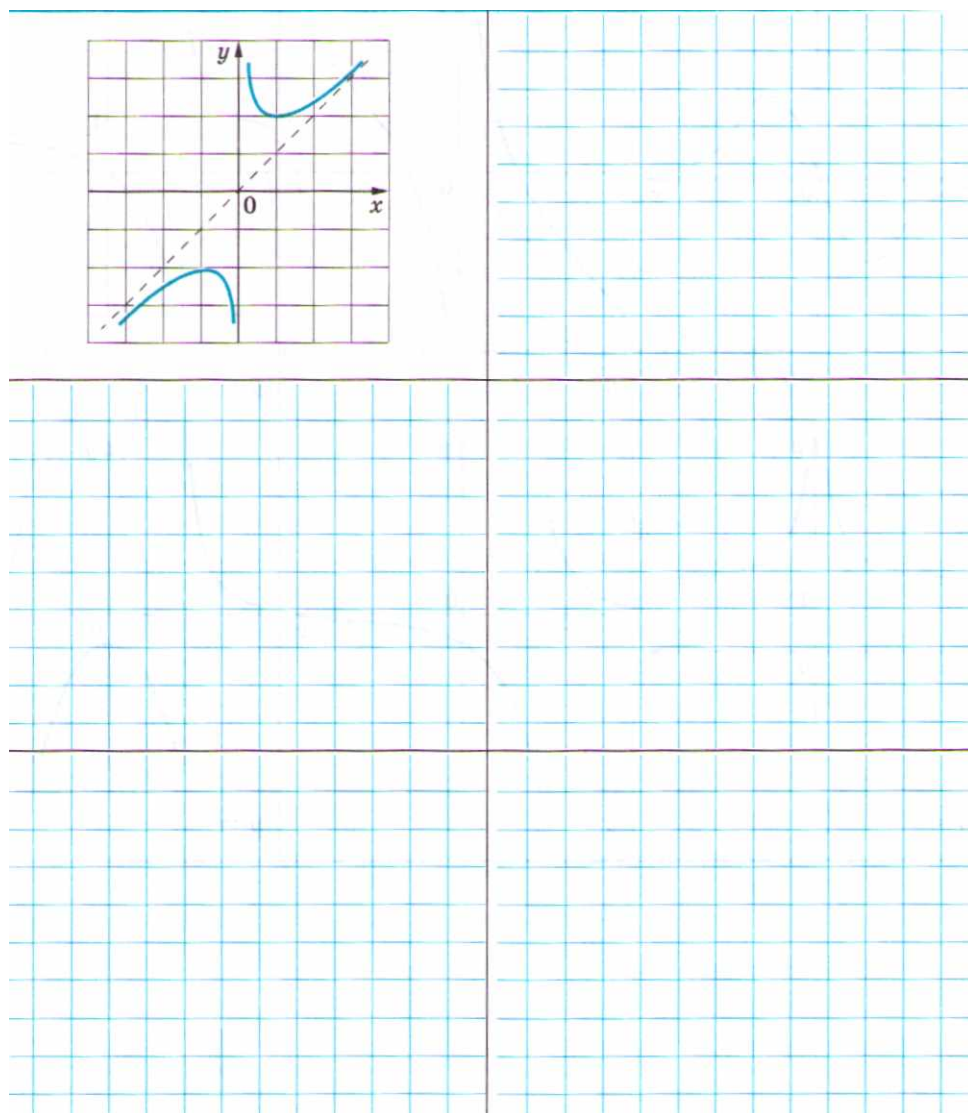


	1	2	3	4
Область определения	$[-3; 2]$			
Промежутки возрастания	$[-2; 1]$			
Промежутки убывания	$[-3; -2], [1; 2]$			
Точки экстремума	точка максимума $x = 1$, точка минимума $x = -2$			
Экстремумы функции	максимум $y = 3$ при $x = 1$, минимум $y = 0$ при $x = -2$			

	1	2	3	4
Нули	$x = -2$			
Значения x , при которых $y(x) > 0$	$[-3; -2), (-2; 2]$			
Значения x , при которых $y(x) < 0$	нет			
Область значений	$[0; 3]$			

КТ-1102 Преобразования графика

Дан график функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$. С помощью преобразований постройте графики функций: $y = f(x) - 1$, $y = f(x - 1)$, $y = 2f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$.



КТ-1103 Исследование дробно-линейной функции

Заполните таблицу свойств указанных четырех дробно-линейных функций.

Под *стандартным видом* функции подразумевается запись: $y - y_0 = \frac{k}{x - x_0}$.

		$y = \frac{4x}{1-2x}$	$y = \frac{2x}{x-3}$
Стандартный вид			
Область определения			
Нули			
Монотонность	↗		
	↘		
Знаки	+		
	-		
Область значений			
График			
Асимптоты	вертик.		
	горизонт.		

КТ-1104 Рациональные неравенства

Отметьте, какие из указанных интервалов входят в множество решений данного неравенства.

Вариант 1

	$(-\infty; -3)$	$(-3; 0)$	$(0; 3)$	$(3; 4)$	$(4; +\infty)$
$x(x^2 - 9)(x - 4) > 0$					
$x^3 > 9x$					
$\frac{4}{x} < 1$					
$\frac{x^2}{x^2 - 9} < 0$					
$\frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-4}$					

Вариант 2

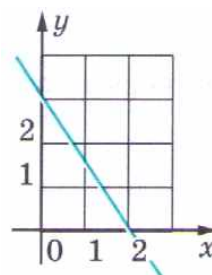
	$(-\infty; -3)$	$(-3; 0)$	$(0; 3)$	$(3; 4)$	$(4; +\infty)$
$\frac{1}{x-4} > \frac{1}{x-3}$					
$\frac{x(x^2-9)}{x-4} > 0$					
$x^3 < 9x$					
$\frac{1}{x} > \frac{1}{4}$					
$\frac{9}{x^2} > 1$					

КТ-1105 **Повторение**

Укажите единственный правильный ответ.

1. Дан график функции $y = kx + b$. Найдите k и b .

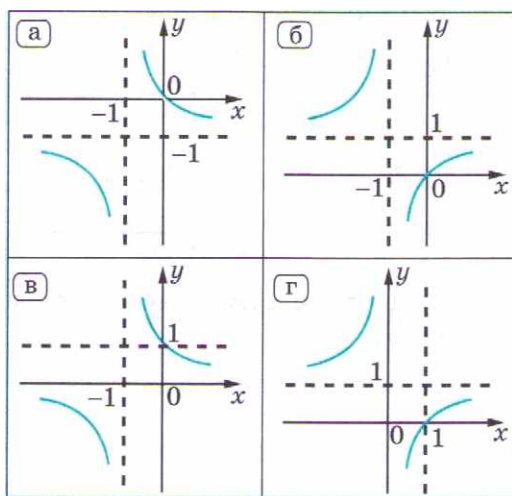
- а) $k = 1,5; b = 3$
 б) $k = -1,5; b = 3$
 в) $k = 1,5; b = -3$
 г) $k = -1,5; b = -3$



2. Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$. Найдите координаты ее центра A и радиус R .

- а) $A(-1; 2); R = 2$ б) $A(1; -2); R = 3$ в) $A(1; -2); R = 2$ г) $A(-1; 2); R = 3$

3. Какой график на рисунке изображает функцию $y = \frac{x}{x+1}$?



4. Какой вид имеет зависимость $y = f(x)$, если известно, что $f(2) = 2$ и $f(4) = 1$?

а) $y = kx$

б) $y = x + b$

в) $y = \frac{k}{x}$

г) $y = ax^2$

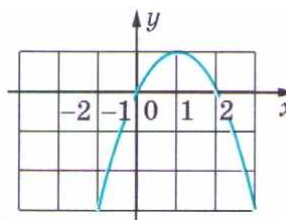
5. График какой функции изображен на рисунке?

а) $y = -x^2 + 2$

б) $y = -x^2 + 2x$

в) $y = x^2 - 2x$

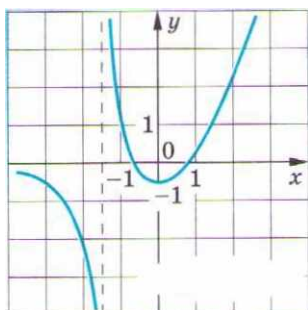
г) $y = x^2 + 2x$



КТ-1106

Итоговый

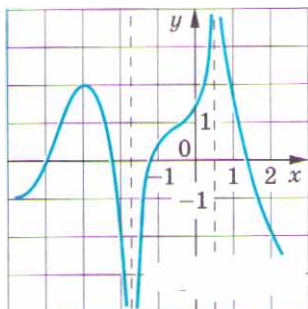
Вариант 1



Отметьте, на каких промежутках функция $f(x)$, заданная графиком, обладает указанными свойствами.

	$[-3; -2]$	$[-1; 1]$	$[0; 1]$	$[-0,1; 3]$	$[2; 3]$
Положительна и возрастает					
Отрицательна и убывает					
Выполняется неравенство $f(x) \leq 1$					
Принимает наибольшее значение на конце промежутка					
Уравнение $ f(x) = 1$ имеет хотя бы один корень					

Вариант 2



Отметьте, на каких промежутках функция $f(x)$, заданная графиком, обладает указанными свойствами.

	$[-3; -2]$	$[-3; -1]$	$[-1; 0]$	$[-1; 1]$	$[0; 2]$
Положительна или возрастает					
Положительна и возрастает					
Выполняется неравенство $ f(x) \leq 1,5$					
Принимает наименьшее значение на конце промежутка					
Уравнение $f^2(x) = 1$ имеет ровно один корень					