ИУМК «АЛГЕБРА 7–9»
МЕТОДИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Глава I. Современный учебник математики: на пути к сетевым ресурсам

1. Целевые установки школьного математического образования

Обсуждение новых тенденций построения школьного математического учебника мы начнем с краткого обзора целей математического образования.

Традиционно в описании целей математического образования определились три точки притяжения. Их можно обозначить тремя высказываниями достаточно известных людей. Первое принадлежит академику А. Н. Крылову: «Математика – это есть средство, это есть инструмент, такой же, как штангель и напильник для слесаря или топор и пила для плотника» [1]. Выраженная этими словами целевая установка может быть названа прагматической, *утилитарной направленностью* обучения математике. Второе высказывание принадлежит Ж. Дьедонне: «В принципе математика в основе своей не имеет какой-либо утилитарной цели, а представляет собой интеллектуальную дисциплину» [2]. Это несколько парадоксальное выражение крупного математика во главу угла ставит задачу интеллектуального воспитания человека. Наконец, можно привести третью формулировку, принадлежащую Николаю Вавилову: «Основная цель изучения математики в школе – воспитание интеллектуальной честности». Эта точка притяжения ставит в центр внимания воспитательные ценности обучения математике.

Разумеется, всегда во всех педагогических системах присутствовали все три момента, которые обозначены в этих высказываниях. Однако существенно различным часто оказывается взаимодействие этих трех направлений. Можно смело сказать, что в течение длительного времени обучение математике в нашей школе тяготело к первому, прагматическому направлению. В программе по математике, которая действовала вплоть до восьмидесятых годов так определяется цель обучения математике: «*Основная задача обучения математике в общеобразовательной средней школе – обеспечить прочное, сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования*» [6].

Изменение направленности образования отчетливо прозвучало в концепции общего среднего образования, принятой Всесоюзным педагогическим съездом в 1988 г.: «главная цель средней общеобразовательной школы – способствовать умственному, нравственному, эмоциональному и физическому развитию личности, всемерно раскрывать ее творческие возможности». В применении к постановке задач математического образования эта же мысль очень ярко была сформулирована в рекомендациях XIX международной конференции по народному просвещению, состоявшейся в 1956 году в Женеве: «В средней школе следует достигнуть в возможно большей мере воспитательных целей изучения математики, относящихся к интеллектуальной деятельности и формированию характера. Эти цели сводятся к процессам логического мышления, к рациональным качествам мысли и ее выражения, к духу наблюдения, пространственным и количественным представлениям, к интуиции и воображению в абстрактной области, к развитию внимания и способности сосредоточиться, к воспитанию настойчивости и привычки работать упорядоченно и, наконец, к формированию научного духа…» [7].

Усиление внимания к воспитательной функции основано на гуманистических принципах личностно-ориентированного подхода, развиваемого современной психологией. Один из основоположников гуманистической психологии К. Роджерс писал, что «помочь людям быть личностями – это значительно более важно, чем помочь им стать математиками» [8].

Все указанные направления в целеполагании математического образования нашли свое место в формулировках действующего государственного Стандарта [9]. Напомним эти формулировки.

«***Изучение математики на базовом уровне среднего (полного) общего образования направлено на достижение следующих целей*:**

- **формирование представлений** о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- **развитие** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, а также последующего обучения в высшей школе;
- **овладение математическими знаниями и умениями**, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на

базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

• **воспитание** средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей» [7].

Можно обратить внимание на то, что наряду с тремя основными направлениями – психологическим (развитие личности), прагматическим (овладение знаниями и умениями) и воспитательным – выделено «философское» направление, ориентированное на формирование представлений об идеях и методах математики.

Ценность формулировок целей предметного обучения для учителя состоит в выборе общей ориентации и еще далека от практического преломления. Соглашаясь, скажем, с необходимостью формирования логического мышления, воспитания рациональных качеств мысли, пространственных и количественных представлений и т. д., учитель еще не будет располагать главным знанием – в какой пропорции нужно смешивать эти различные установки (различные, прежде всего, по тому, какую учебную работу они предполагают) при изучении конкретного раздела программы в конкретном классе, наполненном конкретными учащимися.

Таким образом, мы подошли к другому уровню целеполагания в деятельности учителя, который можно было бы назвать модульным уровнем (в отличие от рассматривавшихся до этого общесистемного и предметного уровней).

Модулем предметного обучения естественно считать тему (раздел) учебной дисциплины, вписывающуюся в общую структуру учебного плана конкретного учебного заведения.

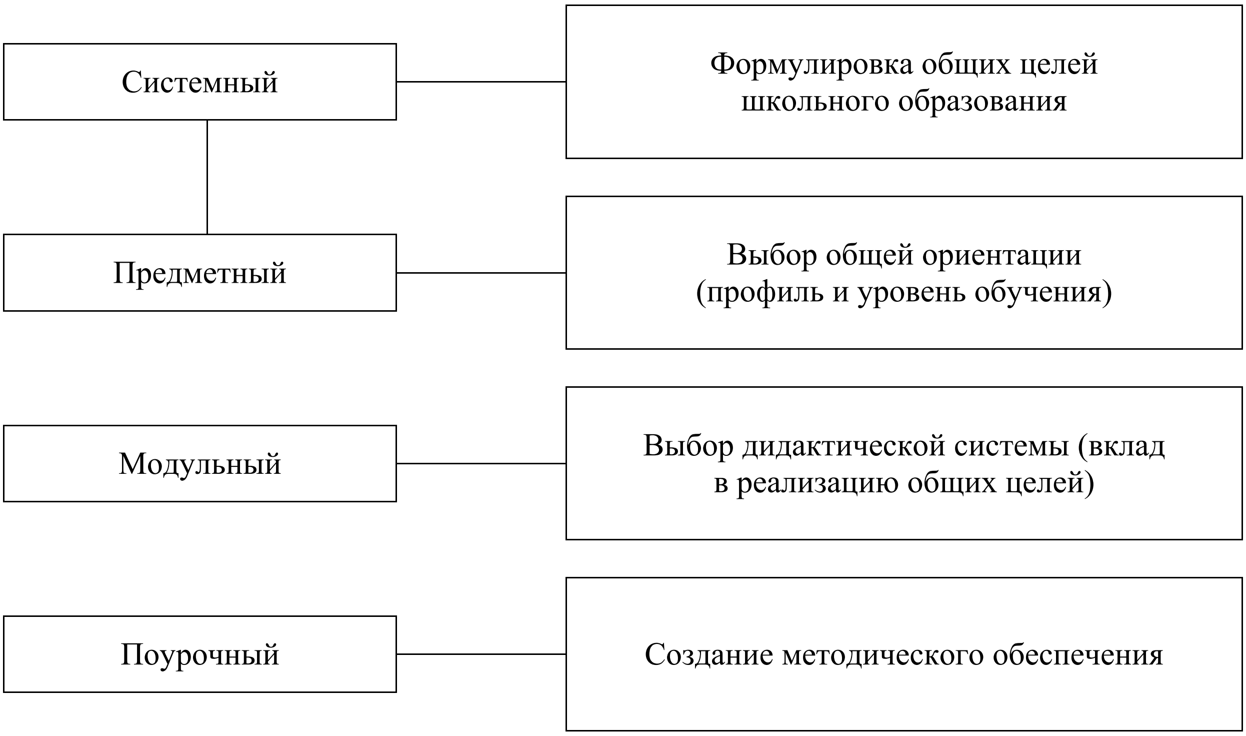
Учебный модуль – это не только раздел учебной программы, но и выбранная дидактическая система, основное место в которой занимает взаимодействие различных приемов и способов учебной деятельности, обеспечивающее вхождение этого модуля в целостную систему предметного и общего обучения и воспитания.

Основная роль учителя-практика, работающего в условиях, когда выбор дидактической системы (учебного плана, программ, технологии и т. д.) уже сделан, состоит, с одной стороны, в развитии и применении технологии, необходимой для реализации учебного модуля, и, с другой стороны, в переводе целеполагания (планирования) на поурочный уровень, учитывающий не только такие параметры, как общее состояние класса (учебной группы), индивидуальные особенности входящих в него учеников, но и свои личные педагогические особенности и пристрастия, взаимодействие с другими учителями и т. д.

Тем самым, опираясь на выбранную дидактическую систему изучения модуля, учитель должен построить методическое обеспечение, разработать дидактический комплекс, создание которого является его основной задачей при планировании своей будущей деятельности на уроке.

Сведем вместе основные уровни целеполагания вместе с обеспечением задач, которые необходимо решить на каждом из них.

Уровни целеполагания



2. Результаты обучения математике

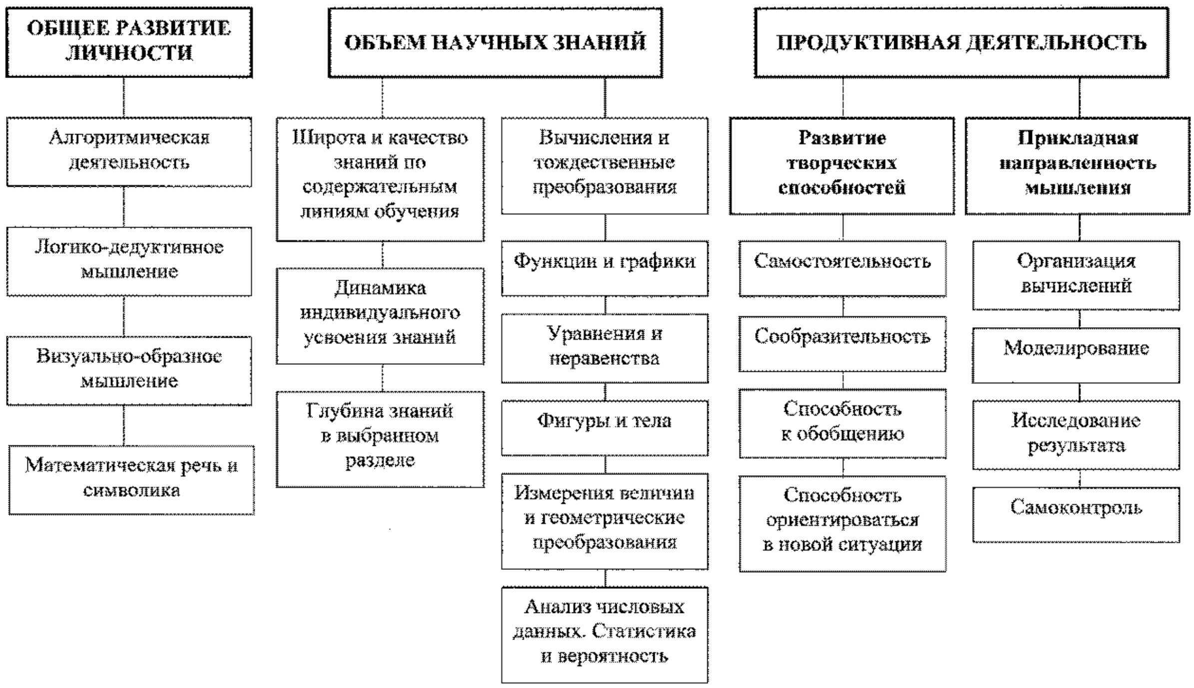
Государственный образовательный стандарт вслед за приведенной выше формулировкой целей изучения математики указывает, что «реализация указанных целей достигается в результате освоения следующего содержания образования». И далее перечисляется обязательный минимум содержания основных образовательных программ, к обсуждению которого мы вернемся позже.

Не вполне удачный оборот «достигается в результате освоения» наталкивает на абсурдную мысль, что освоение содержания (да еще и описанное по минимуму) является подтверждением или даже гарантией достижения целей. На самом деле образовательные программы определяют основу, содержательную предметную базу, на которой должен быть построен процесс обучения, что, разумеется, жизненно необходимо.

Вслед за описанием содержания Стандарт определяет требования к уровню подготовки выпускников. Опять же при невнимательном чтении Стандарта эти требования (даже отвлекаясь от зачастую неточных или мало конкретных их формулировок) можно принять за исчерпывающий критерий достижения целей изучения математики. При всей важности отчетливых формулировок уровневых требований «на выходе» выполнение этих требований никак не может быть не только единственным, но даже и ведущим ориентиром процесса обучения. Как отмечает российский психолог С. Л. Братченко, «гуманистический вариант педагогики направлен, в первую очередь, не на передачу информации, формирование знаний, усвоение способов деятельности, − это ЛИЧНОСТНО-ЦЕНТРИРОВАННЫЙ процесс, смыслом и целью которого является ПОМОЩЬ В ЛИЧНОСТНОМ РОСТЕ – в освоении и усилении самого себя, раскрытии своих способностей, в обогащении личного опыта, обретении ценностей и смыслов» [5].

Из сказанного можно сделать вывод, что, принимая за основу положения Стандарта в отношении уровневых требований (а только они могут регламентироваться официальными документами), в качестве определенного ориентира необходимо соединить эти требования с описанием разнообразных параметров результативности обучения математике, большинство из которых не поддается количественной (уровневой) оценке. Такая система параметров была разработана в Институте продуктивного обучения РАО и опубликована [6]. Приведем краткую схему этих параметров.

ПАРАМЕТРЫ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ



В основу системы положено разделение многообразных параметров, характеризующих уровень обучения математике, на три группы.

Первая из них характеризует общее развитие личности ученика, раскрывает развивающую функцию обучения. Мы выделили в эту группу такие параметры: алгоритмическая направленность, развитие дедуктивного, логического мышления, развитие пространственных геометрических и графических представлений, математическая речь, способность совершать сложные умственные действия (анализ, синтез, обобщение, конкретизация, установление аналогий и т. п.).

Вторая группа параметров объединяет более традиционные критерии результативности обучения, которые можно связать с образовательной, обучающей функцией предмета. Разработка этой группы параметров проведена в соответствии с основными содержательными линиями обучения математике.

Третья группа представляет собой продуктивную деятельность учащегося. Она наиболее сложна по своей структуре, так как тесно связана с двумя предыдущими. Выделение этой группы мы считаем принципиально важным, так как она ориентирует учителя на некоторые стороны развития ученика, внимание к которым значительно ослаблено.

Эту группу можно было бы условно разделить на две подгруппы. Одна из них выделяет параметры, относящиеся к прикладной направленности обучения. Построение математических моделей, организация вычисления, исследование результата и т. п. Вторая подгруппа связана с развитием творческих способностей, самостоятельности, индивидуальных сторон личности учащегося, тесно связана с воспитательной функцией обучения. Например, умение организовать самообразование, самостоятельно пользоваться литературой, навыки самоконтроля, а также развитие сообразительности, рост творческих навыков и т. д.

Совершенно очевидно, что положительная оценка эффективности обучения по большинству качественных параметров должна быть основана не на измерении конечного результата (эти параметры, как правило, не допускают линейной упорядоченности), а на анализе *процесса обучения*. При следовании положениям гуманистической психологии «воспитатель не стремится к определенному заранее результату. Усилия воспитателя направлены … на раскрытие (учеником) своих индивидуальных способностей, на поддержку его внутренней силы, а не на формирование конкретных нормативных способностей. Если обеспечены условия, необходимые для ПРОЦЕССА свободного развития человека, его личностного роста, то позитивные РЕЗУЛЬТАТЫ будут достигнуты самим человеком обязательно, хотя, возможно, не легко и не сразу».

Развивая идеи гуманистической психологии, современный видный психолог М. А. Холодная указывает: «Интеллектуальное воспитание, что называется по определению, исключает следующие образовательные позиции. Во-первых, позицию любых, в том числе скрытых, форм интеллектуального насилия. Это касается и традиционного содержания образования в виде системы «готовых истин», и традиционных критериев успешности обучения в виде ЗУН, и традиционного распределения познавательных ролей (учитель – в качестве ведущего впереди, ребенок – в качестве ведомого сзади) и т. д. Во-вторых, позицию элитарности образования по отношению к общеобразовательной школе. Как это ни странно, но иногда объектное отношение к ребенку инициируется именно в инновационных образовательных учреждениях при условии, если они ориентированы на внешнюю дифференциацию учащихся на основе их селекции (например, в виде отбора детей по показателям уровня интеллектуального развития в специализированные школы либо классы с разным типом обучения)»[4].

Для анализа процесса обучения и хода интеллектуального развития учащегося М. А. Холодная предложила классифицировать эту деятельность по ее *познавательным стилям*. «*Способность* характеризует уровень достижений в интеллектуальной деятельности (то есть является ее результативной характеристикой). Стиль выступает как способ выполнения интеллектуальной деятельности (то есть является ее процессуальной характеристикой). Соответственно разные стили могут обеспечивать одинаково высокую успешность решения определенной задачи» [3].

Параллельно классификации познавательных стилей с позиций психолога мы одновременно разработали классификацию стилей изучения математики.

3. Познавательные стили изучения математики

Мы выделяем следующие познавательные стили изучения математики.

1. Алгоритмический стиль
2. Визуальный стиль
3. Прикладной стиль
4. Дедуктивный стиль
5. Исследовательский стиль
6. Комбинаторный стиль
7. Игровой стиль

Дадим краткие пояснения. *Алгоритмический стиль* – это наиболее распространенный в современной школе способ действия ученика по выполнению четко сформулированных, типовых заданий обычно по известному образцу. По произведенным оценкам в действующих школьных учебниках число заданий, относящихся к алгоритмическому, или скажем более широко, репродуктивному стилю, превышает 80%. В то же время мы не хотим представить этот стиль как нечто низменное и малосодержательное. Подробнее о спектре заданий алгоритмического стиля мы поговорим при анализе учебных материалов. Скажем сейчас лишь то, что к этому стилю нужно отнести и такие задания, в которых учащийся самостоятельно знакомится с неизвестным ему ранее алгоритмом, выбирает алгоритм либо видоизменяет или адаптирует уже известный способ действия.

Название *визуальный стиль* является наиболее условным. В его основе лежит деятельность по переводу информации с одного языка на другой, овладение разными языками и прежде всего визуальным. По достаточно распространенной точке зрения при изучении математики используется три основных информационных языка – вербальный (словесное представление информации), символьный (последовательность специальных знаков, символов) и визуальный (зрительные образы). Овладение всеми этими языками – неоспоримая задача обучения математике. При этом важную роль играет умение выбрать подходящий ситуации информационный язык и при необходимости осуществить перевод с одного языка на другой. При этом надо учесть растущую актуальность визуального языка, которая и побудила нас назвать обсуждаемый стиль визуальным.

Можно снова сослаться на результаты последних десятилетий, полученные психологами. Согласно этим результатам визуальный язык «позволяет сделать смысл видимым». С его помощью можно создавать визуальные образы и оперировать с ними на таком же уровне, как это делается обычными словесно-знаковыми средствами.

В использовании *прикладного стиля* отечественным преподаванием математики заложены богатые традиции. Сюда надо отнести организацию вычислений, решение текстовых задач и в более широком смысле построение математических моделей и их исследование. В то же время практическая реализация этого стиля наталкивается на большие трудности. Обсуждение внематематической ситуации и построение модели требует много времени, что часто выглядит неоправданным по сравнению с полученными результатами. Кроме того, не всегда учитель знаком с деталями обсуждаемой ситуации и ему необходимо много времени тратить на подготовку к уроку. Все это заставило ограничиться регулярным использованием нескольких стандартных ситуаций. В то же время становится необходимым введение новых ситуаций, в частности с использованием математики в экономике, гуманитарной сфере, новых для школы разделах физики.

Дедуктивный стиль считается ведущим в изучении математики. Овладение им традиционно связывается с геометрией. Однако в последние десятилетия в использовании дедуктивного (логического) стиля произошли значительные изменения. Во-первых, считавшееся незыблемым аксиоматическое построение геометрии с четкой системой определений и теорем сильно поколеблено течением, отвергающим как необходимость, так и возможность дедуктивного построения геометрии в школе, что нашло свое отражение в ряде новых учебников. Во-вторых, элементы доказательства при решении геометрических задач отошли на второй план отчасти из-за невозможности воспитать соответствующие навыки при уменьшении числа часов, отчасти из-за повышенного внимания к вычислительным задачам.

В известной мере понижение внимания к дедуктивному стилю работы является следствием разрыва в преподавании алгебры и геометрии, упорным отказом рассмотреть вопрос слияния двух математических предметов в один, а также методическая неразработанность самого курса алгебры, который имеет неограниченные содержательные возможности использования дедуктивного стиля.

Исследовательский стиль в последние годы стал находиться в центре внимания учителей. Этому способствовало распространение задач с параметрами, широкое использование координатного метода. Вместо серий отдельных мелких задач и упражнений стали чаще предлагаться сюжетные задания, требующие длительной работы в рамках одной математической ситуации.

Однако исследования могут служить не только вкусной добавкой к традиционному блюду. Роль исследовательского стиля на всех этапах обучения математике может быть сделана ведущей, а сам стиль – доступным среднему ученику.

Если кратко упомянутые первые пять стилей являются достаточно традиционными для школьного преподавания (различия связаны прежде всего со степенью их использования и взаимосвязями между ними), то последние два – комбинаторный и игровой стили – выглядят, на первый взгляд, несколько инородными вкраплениями.

Под *комбинаторным стилем* мы понимаем широкое использование дискретных понятий и методов – натуральные и целые числа, пошаговые, индуктивные процессы и построения, последовательности, конечные ряды числовых данных, элементы логики, наконец, сама комбинаторика и элементы теории вероятностей. Может показаться, что идет речь о нескольких конкретных темах школьной программы (целые числа, последовательности, статистика и теория вероятностей), что в значительной мере справедливо, однако назрела потребность (в связи с широким использованием цифровых технологий в быту и на производстве) заботиться о воспитании дискретного стиля (мы назвали его комбинаторным) на всех этапах обучения математике.

Возможности *игрового стиля* давно исследуются его энтузиастами. Все согласны с утверждениями психологов о том, что игры могут стать основной пружиной развития интереса, а вслед за ним и успехов в учении, однако теоретических и методических разработок, помогающих включить в процесс обучения игровой стиль на равных правах с остальными стилевыми возможностями, еще явно недостаточно.

Подводя итог, обратим внимание на то, что наша концепция будет использовать многообразие познавательных стилей в трех важных направлениях: стиль выполнения учебного задания, стиль введения и развития математического понятия и стиль как средство индивидуализации обучения.

4. Профили и уровни

Уровневые характеристики (оценки) обучения весьма распространены как в бытовом, так и в профессиональном языке. Мы часто ссылаемся на *высокий уровень* школьного математического образования в России, требуем формулировки *минимального уровня* обученности, формируем классы с *углубленным уровнем* изучения математики, жалуемся на падение *уровня математической подготовки* выпускников школы и т. д. Не занимаясь подробным анализом понятия *уровень обучения*, отметим, что обычно оно имеет некоторую оценочную, количественную основу. Имеется в виду не выражение уровня конкретным числом (хотя и это иногда допустимо: если в одном классе на математику отводится 3 часа в неделю, а в параллельном – 8, то это дает числовую характеристику различия в уровне), а возможность сравнения, линейной упорядоченности при оценке уровня.

Выбор уровня обучения (опять же зачастую отождествляющийся с числом отводимых часов) диктует выбор объема изучаемого материала, количество решаемых задач, распределение форм учебной работы. В практике последних лет спонтанно сложилось представление о трех основных уровнях изучения математики – основном, или стандартном, и двух других, отступающих от него в разные стороны – минимальном и повышенном (углубленном).

Термин *профиль обучения* оказался, к сожалению, очень размытым. В профессиональном обучении этот термин имеет достаточно ясный смысл и связан с получаемой профессией. Одно из возможных направлений профилизации обучения математике идет как раз из сферы профессиональной подготовки. Хотя уже давно отказались строить отдельно «математику для токарей» и «математику для пекарей», но сохраняются представления о профилизации математики для крупных групп специальностей (математика для будущих экономистов, для электро-радиотехнических специальностей, для работников гуманитарной сферы и т. п.). Такой тип профилизации (помимо объема, который мы отнесли к уровневой категории) обычно проявляется в выборе примеров и задач, а также в добавлении (исключении) отдельных тем программы. В целом для общего среднего образования такой подход потерял свою актуальность. Мы убеждены, что это же верно и для среднего специального образования.

В годы перехода от единого стандартизованного обучения к дифференцированному появилось понятие *профильного класса* (школы). Школы математического профиля появились еще раньше под давлением ученых (физиков и математиков), к мнению которых государство вынуждено было прислушиваться. Это направление профилизации не затронуло построение курса математики «для всех», а лишь вызвало к жизни написание программ и учебников для «углубленного обучения математике». К сожалению, на этом пути почти не было методических открытий, так как за основу брались университетские представления о курсе математики и «углубление» происходило прежде всего с помощью включения элементов университетского курса. Для постановки преподавания в условиях изменения содержания курса математики в обычной школе это скорее имело отрицательные последствия, так как препятствовало поиску принципиально новых подходов, настраивало на адаптацию и вульгаризацию университетского курса как единственного средства модернизации школьного курса математики.

Происходящая в настоящее время модернизация всей системы образования выдвинула в качестве одной из своих задач профилизацию старшей школы. При этом термин *профилизация* трактуется следующим образом. Каждый класс (или способ) обучения в старшей школе является профильным. Число профилей может быть сколь угодно велико, хотя составлен список основных профилей. Каждый учебный предмет может изучаться на двух уровнях – базовом или профильном (вы видите, что уже здесь термин *профильный* стал характеристикой уровня). Для формирования профиля необходимо выбрать, какие из основных предметов изучаются на базовом, а какие на профильном уровне. Не обсуждая в целом эффективность и реализуемость такого подхода, остановимся на математике. Фактически предлагается создать программу и курс математики двух уровней и предложить школе выбирать один из них. Тем самым мы по-прежнему остаемся в рамках представлений о том, что можно выстроить по линеечке математические знания и умения, а затем отрезать их по потребности как от длинной палки колбасы. Все, что делается вокруг этой линейки, предлагается оформить в виде селективных курсов (по выбору) и использовать в качестве необязательной приправы.

Соглашаясь с принятым подходом профилизации школы, мы обращаем внимание на то, что он сосредоточен на проблеме «чему учить» и совершенно не затрагивает профилизацию с позиций «как учить». Проблема профильного обучения важна не только для старшей, но и для основной школы. Во-первых, появилось понятие предпрофильной подготовки, в ходе которой учащиеся основной школы готовятся к выбору продолжения дальнейшего обучения. Кроме того, в ряде школ реализуются свои программы обучения, различия которых также можно анализировать с позиций профиля и уровня.

Математику можно учить много и учить мало, но и то и другое можно делать по-разному. Мы в свое время разработали (и опубликовали) подход к профилизации обучения математике, основанный на следующей позиции. Профиль характеризуется выбором ведущих способов деятельности, их взаимодействием и сбалансированностью. Можно обратиться к изложенным выше стилевым различиям в изучении математики и формировать тот или иной его профиль, по-разному ориентируя на использование различных познавательных стилей.

Развиваемое нами понимание профиля обучения математике легко сопрягается с выбором будущей профессии. Среди различных классификаций спектра профессий есть и такая, которая во главу угла ставит ведущую специфику профессиональной деятельности, что поможет определить выбор ведущих познавательных стилей в обучении математике.

Наше понимание профиля легко согласуется и с распространенной «бытовой» точкой зрения, различающей, скажем, гуманитарный, технический или математический профиль. Традиционно построенные курсы и учебники математики можно в первом приближении отнести к техническому профилю (еще недавно наша школа называлась «политехнической» и была нацелена на подготовку будущих рабочих, техников и инженеров). Этому профилю соответствует преобладание алгоритмических и конструктивных способов действия. Визуальные методы используются лишь для подкрепления материала наглядными образами, очень осторожно используются логика и рассуждения, усилено внимание к приложениям и межпредметным связям.

Слова «гуманитарный профиль» понимаются по-разному. Многие видят в нем вариант «компенсированного» обучения математике, ориентированного на тех, кто математикой заниматься не хочет и/или не может. Для такого понимания вполне подойдет принцип «тех же щей, да пожиже влей». Более серьезная точка зрения ориентирована на принципиальную перестройку курса математики в сторону его общекультурной составляющей, что потребует значительного расширения визуально-образных и ассоциативных способов познания (за счет его алгоритмической составляющей), изменения характера приложений и возможного усиления логики и дедукции.

Еще 20 лет назад мы предложили выделить три названных выше профиля математического образования и сохраняем эту точку зрения по сей день. Во всяком случае, с позиций математики вряд ли можно построить больше трех-четырех различно профилированных курсов математики в старшей школе, имеющих действительно существенные различия качественного, а не количественного характера.

В рамках описанной концепции нами создано три «профилированных» комплекта учебников: учебники по алгебре и началам анализа на «профильном уровне», имеющие «политехническую» направленность (изд-во «Дрофа») [10], учебники по математике на «базовом уровне», имеющие гуманитарную направленность (изд-во «Просвещение») [11, 12] и учебники на «базовом уровне» технологической направленности (изд-во «Академия») [13, 14].

5. Смысл и язык

Математика – содержательная, конструктивная наука. Каждый шаг в ней наполнен *смыслом*, постичь который – первая важнейшая задача обучения. С другой стороны, математика часто выступает в качестве некоторого универсального языка (достаточно вспомнить часто цитируемые слова Галилея: «Природа – открытая книга, написанная на языке математики»). Для передачи своего собственного содержания математика нуждается в некотором языке. Овладение языком математики также является важной задачей обучения. Именно развитие математического языка, его упрощение, придание ему большей ясности и наглядности сделало возможным массовое обучения многим содержательным вещам, которые были получены давно, но доступны были лишь избранному кругу людей.

Не стоит останавливаться на очевидных вещах, что смысл невозможно раскрыть, не пользуясь языком, и что само развитие языка есть осмысленная задача. Читая знаменитую работу Л. Выготского [ ] «Мышление и речь», можно увидеть на стихи О. Мандельштама:

«Я словно позабыл, что я хотел сказать
И мысль бесплотная в чертог теней вернется».

Поэт совершенно точно и образно выразил связь между мыслью и словом, смыслом и языком. Еще неясный, «бесплотный» смысл исчезнет, растает, если мы не поберем адекватный ему язык. Тем не менее, при массовом обучении смысл, как правило, должен выступать впереди языка.

Мы учим первоклассников сложению чисел. Это действие имеет наглядный смысл – мы объединяем предметы, ссыпаем их из двух мешков в один и сравниваем при этом их количество. Складывая два числа, три и пять, мы получаем число восемь –

это *сумма* чисел три и пять. Коммутативность (перестановочность) действия содержится в самой сути, смысле производимого действия. Заметим, что кроме глагола *сложить* мы употребляем еще глагол *прибавить*. Когда мы к трем *прибавляем* пять, то действие перестает быть симметричным. Теперь мы должны записать производимое действие на математическом языке. Запись $3 + 5$ – это запись прибавления к числу 3 числа 5. Сама эта запись является *выражением*, т. е. элементом языка. И это выражение мы тоже называем суммой, а число 8 – его значением. Итак, мы столкнулись со следующей, очень типичной трудностью обучения: одно и то же слово (сумма) обозначает *разные* вещи. Его можно понимать как число, результат сложения, а можно понимать как выражение – символическую запись, использующую язык цифр и знаков действий. Обычный прием в таких случаях состоит в том, чтобы развести понятия, дать им разные имена. Полезно сохранять привычные термины, но помнить об их смысле и стараться не путать их. Большинство учебников старается языковой подход сделать основным. Поэтому чаще и раньше используются слова «значение суммы», «значение разности», чем сами результаты – сумма, разность.

Смешение смысла и языка, действия и выражения, записи этого действия, не столь безопасно, как это может показаться на первый взгляд. Нашей безответственностью в использовании языка мы, возможно, закладываем с самого начала обучения пренебрежение смыслом того, что мы делаем, открываем путь к формализму, а затем уже и к бессодержательности.

Методика обучения математике в начальной школе особенно щедра на пренебрежение смыслом. «На нуль делить нельзя», «действия бывают первой и второй ступени», «сначала выполняются действия в круглых скобках». Если вдуматься, то все эти привычные фразы направляют мысль учащегося по ложному пути.

Одной из центральных задач методики обучения математике является введение и конструирование новых математических понятий. Особенностью таких общих понятий как число, площадь, прямая, угол, вектор, функция, производная, многоугольник и т. п. является то, что вводить их надо достаточно рано, а смыслом они будут наполняться постепенно. Можно привести много примеров, когда, используя выкрутасы языка, введение понятия основывается на некоем «правильном определении», которое сможет вобрать в себя весь богатый объем понятия, но который абсолютно неизвестен и недоступен ученику. Чем давать «точные определения», уж лучше обойтись описательными или тавтологическими фразами типа «число – это результат счета или измерения», «функция – это правило, по которому …», «многогранник – это тело, ограниченное многоугольниками», «вектор определяется своей длиной и направлением» и т. п. Изучение в средней школе операции дифференцирования вполне могло бы ограничиться описанием его механического (вычисление скорости движущейся точки как функции времени) и геометрического (проведение в каждой точке графика касательной) смыслов. Стандартное определение значения производной в точке как некоего предела есть не что иное как объект языка, содержание и объем которого не может быть сделан доступным школьнику.

Есть, тем не менее, одно важное место в школьной математике, где полезно встать на «языковую» точку зрения, наполняя язык смыслом разумно и постепенно. Это место – изучение многочленов и рациональных дробей в курсе алгебры основной школы.

В изучении этой темы в последние несколько десятилетий произошли существенные сдвиги, которые мы оцениваем резко отрицательно. Казалось бы, сущность этих сдвигов в точности совпадает с пропагандируемым нами взглядом на то, что смысл должен предшествовать языку. В качестве смысла многочленов и рациональных дробей был выбран их *функциональный* смысл. Буквы – это переменные, многочлены и дроби – это определенным образом построенные выражения с переменными, их равенство – это совпадение задаваемых с их помощью функций, т. е. равенство значений при всех допустимых значениях переменных. Почему все это плохо? Кратко говоря, мы все-таки встаем на языковую точку зрения, выбирая язык теории функций в качестве основного, забывая о том, что сами-то функции должны по существу изучаться позже, основываясь в том числе на умении работать с многочленами и дробями. Но главное не в этом. Дело в том, что функциональный язык сильно обеднил изучение этой темы, сделал его малоинтересным, так как наиболее содержательные ее результаты не относятся к функциям. Роль многочленов далеко не исчерпывается задачами теории функций. Более того, она сильно возросла в связи с распространением информатики, где символьное исчисление важнее функционального.

Начнем с буквы. Если буква – это переменная, то мы должны знать, описать с самого начала, какие значения она может принимать. Но дело-то как раз в том и состоит, что для алгебры это делать не нужно и даже вредно. Развивая буквенное исчисление, мы не должны задумываться, какие значения мы будем подставлять вместо букв. Это в принципе неизвестно.

Посмотрите на доказательство «основного свойства дроби» в одном из распространенных учебников.

«Дробь можно сокращать на неравный нулю множитель: если $m \neq 0$, то $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$. Доказательство. Так как буква m обозначает некоторое неравное нулю число, а буквы a и b некоторые другие числа, то числовую дробь $\frac{am}{bm}$ можно сократить на m и получить равенство $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$.»

Не хочется подробно комментировать это доказательство. Оно относится к тем методическим ошибкам, которые в старших классах приводят к полной растерянности учеников при решении уравнений.

Язык теории функций не позволяет для дробей A, B и C получить свойство: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$, совершенно необходимое для преобразования дробей ($\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x^2+x} = \frac{x-1}{x^2-1}$, однако, почему $\frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1}$ при **всех** допустимых значениях x, например, $x = 0$, мы объяснить не сможем, если будем понимать равенство дробей как равенство соответствующих функций).

Можно ли иначе ввести многочлены «по смыслу»? Такие попытки можно найти в учебной литературе для университетов. Они без интереса воспринимаются даже профессионалами-математиками.

Многочлены возникли и развивались конструктивно. Проще всего эту конструкцию описать в рамках «языка выражений». Эта точка зрения распространена почти повсеместно, только не всегда она проводится достаточно ответственно.

Кратко и вполне доступно эта точка зрения описана в учебнике «Алгебра 7–9», но не при введении многочленов, а заметно позже.

В качестве исходного понятия берется понятие выражения. При формировании выражений мы должны выбрать запас операций. Это могут быть только сложение и умножение (для конструкции целых выражений); можно к ним добавить деление и получить рациональные выражения; можно еще добавлять операции для конструирования иррациональных, показательных, тригонометрических и других классов выражений.

Ограничимся для примера сложением и умножением. Степени с натуральным показателем будем использовать для краткой записи произведения нескольких одинаковых множителей.

По определению, число – это выражение; если A и B – выражения, то $A + B$ и $A \cdot B$ также являются выражениями. На этом пути мы получим целые числовые выражения. Выберем некоторое количество букв и добавим, что исходными выражениями являются числа и выбранные буквы. Теперь мы получим целые рациональные выражения. Равенство выражений сначала понимается как формальное их совпадение.

Конструкции $A + B$ и $A \cdot B$ определяют сложение и умножение выражений. Далее можно постепенно расширять понятие равенства выражений, вводя допустимые преобразования и считая два выражения равными, если от одного к другому можно перейти цепочкой допустимых преобразований. Допустимые преобразования можно определять постепенно, по мере надобности, опираясь прежде всего на свойства чисел. Фактически мы разбиваем выражения на некоторые классы эквивалентности, называя объекты одного класса равными между собой.

Далее можно выбрать в классах (т. е. среди равных выражений) некоторых представителей и присвоить им имена. Так, имея одну букву x, можно назвать многочленом выражение вида $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, где $a_n \neq 0$ (и добавить еще нулевой многочлен). Теперь станет осмысленной задача приведения выражения к виду многочлена. Заметим, что формально при этом сумма (или произведение) многочленов, определенные по правилу сложения или умножения выражений, уже не будет многочленом, а лишь выражением, которое можно привести к виду многочлена. Так как мы не меняем слово «равно», то получится, что сумма многочленов равна некоторому многочлену (однозначно определенному) и его можно взять уже определением суммы многочленов, если мы хотим определить сложение, оставаясь в множестве многочленов.

Такую точку зрения легко провести во всех подробностях (разумеется, не в классе, а для себя), чтобы выработать точку зрения на формальные упражнения, связанные с преобразованием выражений, не привлекая значения выражений, т. е. не вставая на теоретико-функциональную точку зрения.

Добавим к этому, что равенство дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$, где A, B, C, D – целые выражения (со знаменателями, не являющимися нулевыми выражениями, т. е. лежащими в том же классе, что и 0), разумно определить через равенство целых выражений $AD = BC$.

Для того чтобы понять преимущества такого подхода, надо, конечно, привести интересные, содержательные задачи. Мы нашли много таких и поместили их в нашем ИУМК.

Итак, наша конструкция, хотя и началась как формальная языковая конструкция, постепенно наполнилась смыслом, который позволит сильно раздвинуть горизонты изучаемого материала.

6. Образовательные ресурсы

К образовательным ресурсам обучения математике надо отнести, прежде всего, учителя, который остается центральной фигурой обучения, туда же следует отнести и ученика с его интеллектом и, разумеется, эти человеческие факторы, эти ресурсы являются центральными. Но мы оставляем их за рамками настоящей статьи.

Следующая группа ресурсов связана с тем обеспечением, которое традиционно подбирается для реализации целей обучения. Прежде всего, это то, что можно было бы назвать бумажными ресурсами. Сейчас эти бумажные ресурсы объединяются в понятие учебно-методического комплекта, который, как правило, состоит из учебника или серии учебников, различных вспомогательных учебных текстов, скажем, по математике это могут быть задачники, дидактические материалы, рабочие тетради и, наконец, книги для учителя, содержащие методические рекомендации и описания технологий и методик.

Новая группа ресурсов, которая в последние десятилетия развивается особенно активно, стала называться цифровыми образовательными ресурсами, к которым можно присоединить понятие сетевых ресурсов. И, тем самым, современный комплект должен обеспечить соединение традиционных бумажных, текстовых ресурсов и более современных цифровых и сетевых ресурсов. Именно такая точка зрения принята в нашем проекте по созданию инновационного учебно-методического комплекса «Алгебра 7–9».

В недавней работе Э. Гельфман и М. Холодной «Психодидактика школьного учебника» достаточно подробно проанализированы функции современного школьного учебника. На первое место поставлена его *информативная функция*. Разумеется, информативная функция учебника не сводится к тому, чтобы он был источником готовых знаний, подлежащих запоминанию. Достаточно распространена мысль о том, что учебник должен быть, прежде всего, источником познавательных задач, которые ученик должен обнаружить и решить.

Говоря об *управляющей функции* учебника, авторы считают, что выполнение этой функции требует серьезной реконструкции форм и содержания традиционного учебника. На самом деле, управляющая функция учебника часто преувеличивается. Многие учителя считают учебник чем-то вроде конспекта поурочных планов и требуют того, чтобы в нем содержалось абсолютно все, что потребуется при организации обучения.

Развивающая функция учебника труднее всего прослеживается в современных публикациях. Развитие мотивационной сферы, личностных качеств, системы ценностных отношений должно быть в центре внимания учебника.

Одной из центральных функций современного учебника является его *коммуникативная функция*. Однако развитие этой функции часто сводится к тому, что создается некий учебник-монолог, построенный на дедуктивной основе. Часто информация, представленная в учебнике, дается в предельно свернутом виде, без учета сложных процессов, которые должны происходить при его чтении.

Воспитательная функция учебника обычно связывается с развитием интереса, наличием бесед с использованием живого языка, образных запоминающихся сравнений, вызывающих яркие ассоциации. Однако специфика математики позволяет видеть эту функцию в аргументированности и объективности стиля изложения.

Новыми требованиями к современному учебнику являются требования *дифференциации и индивидуализации обучения.* Дифференциация учебного текста понимается в основном как нечто внутритекстовое, реализующееся с помощью различных выделений – использования разнообразных шрифтов, символов, пиктограмм, рамок. Разумеется, это важное направление, однако очень часто оно приводит к обеднению учебного процесса, потому что заставляет сосредоточить усилия учителя на некоем минимальном уровне. Что же касается индивидуализации обучения, то в этом направлении сделано еще очень мало. Разумеется, индивидуализация не может сводиться к выделению текстов разной сложности. Сама конструкция учебника должна способствовать организации индивидуальных траекторий обучения.

В целом можно наблюдать тенденцию, при которой современный учебник трактуется в качестве полифункциональной учебной книги.

На наш взгляд, перечисленные требования к учебнику следовало бы отнести к учебно-методическому комплексу в целом, рассматривая его как некоторое единство. Учебник вряд ли сможет полноценно удовлетворить всем требованиям. Стремление к этому может привести к возрастанию объема учебника, его перегрузке, к тому, что в нем будет трудно найти нужный материал. Одним из возможных решений противоречия между широким спектром требований к учебнику и ограниченностью возможностей его воспроизведения является передача ряда функций другим частям учебно-методического комплекса. Одной из таких попыток и является проект создания инновационного учебно-методического комплекса по курсу алгебры для основной школы, т. е.7–9 классов. В этом комплексе учебник выглядит как достаточно краткое руководство к использованию комплекта в целом. Его характерной особенностью является модульная структура. В основе этой структуры лежит разворот – 2 страницы, которые ученик или учитель воспринимает одновременно, не рассматривает как линейно расположенный текст. На этом развороте помещаются основные понятия, элементы доказательства, примеры, комментарии и, наконец, отсылки к другим частям комплекта. При этом ясно, что создание электронной версии такого учебника сопровождается возможностями гипертекстового режима, при котором включение тех или иных отсылок обеспечивается с помощью компьютера.

Особенно эффективно такая точка зрения может быть реализована для осуществления важнейшей функции учебника, связанной с индивидуальным развитием учащегося. Перегрузка учебника интересными историческими материалами, обилием иллюстраций и примеров может сделать из учебника некое подобие научно-популярной книги. В то же время возможность легкого и быстрого включения необходимых фрагментов, использующих динамику, другие современные средства позволит гораздо более полно реализовать функции учебно-методического комплекса. В значительно большей степени это относится к использованию новых форм учебной работы. Важнейшим новым элементом этого комплекса является структуризация учебных заданий не только и не столько по их уровню или сложности, сколько по стилю познавательной деятельности. Так, параллельно работающий с учебником сборник заданий структурирован в соответствии с основными познавательными стилями. При этом рабочая тетрадь позволяет организовать выполнение достаточно сложных и новых форм работы, таких как, например, исследовательские сюжеты.

Цифровая составляющая комплекса представлена несколькими видами современных ресурсов. Наиболее простой из них является система презентаций. Под этим понимается набор слайдов, текстов, примеров, иллюстрирующих основные положения учебника. Такие презентации могут помочь учителю быстро представить на экране формулировку задачи, постановку целей урока, общее задание и т. д. В своей совокупной системе презентации являются своего рода опорным конспектом курса в целом.

Более сложной формой цифрового ресурса является демонстрация, которая обычно представляет собой некую динамическую модель. Наиболее удачными получились демонстрации, относящиеся к истории математики. Другим циклом демонстраций явились демонстрации, представляющие новые способы действия. Перед учеником разворачивается последовательность операций, которая в совокупности учит его новым алгоритмам, знакомит его с новыми действиями. Для успешного выполнения более сложных заданий, таких как сюжетное исследование, которое требует в значительной степени инициативы учащегося, цифровой ресурс может не только обеспечить организацию такой работы, но предоставить в распоряжение учащегося специальные средства или, как мы их называем, манипуляторы, с помощью которых он может реализовать то, что ему требуется для выполнения такого рода исследовательской работы. Новыми цифровыми ресурсами явились всевозможные средства верификации, проверки действий. Одновременно с достаточно простыми ресурсами тестового характера в ИУМК включены такие программы, которые позволяют проверить гипотезы, высказанные учеником, не прибегая к их сравнению с заранее заданными правильными ответами, а реагируя на различные способы предъявления ответа. При этом происходит не только констатация верности или неверности высказанного утверждения, но показываются примеры, которые направляют мысль ученика, показывают либо недостаточность полученного результата, либо наоборот его неприменимость в тех или иных случаях.

Наконец, бумажные и цифровые ресурсы, предназначенные для ученика, дополняются важнейшими инструментами для учителя. Здесь и обычная книга для учителя, содержащая методические рекомендации по организации учебного процесса, здесь и генераторы новых заданий, здесь и создание портфеля для хранения информации о достигнутых результатах. Описанный способ организации новых ресурсов достаточно ограничен, хотя эта ограниченность имеет и положительную сторону, потому что позволяет компактно организовать всю необходимую информацию. Гораздо более сложным является использование внешних сетевых ресурсов. Вопрос использования возможностей Интернета, открытого поиска необходимой информации в пределах урока является недостаточно отработанным направлением и, несомненно, требует поддержки, хотя здесь опыт работы отдельных учеников часто опережает опыт работы учителя.

Завершая обсуждение проблем современного учебника, нам хочется еще раз подчеркнуть, что, решая эти проблемы, было бы неразумно ориентироваться на технические возможности, связанные с развитием современной техники. Педагогические проблемы, проблемы психодидактики являются гораздо более устойчивыми и их решение невозможно без глубокого проникновения в те изменения, которые происходят в ментальном опыте учеников. Вот почему мы посчитали важным направить эту главу в основном в сторону обсуждения ценностных ориентиров и современных тенденций математического образования.

7. Заключение

Приведем в заключение несколько кратких советов учителям, выбравшим для реализации ИУМК «Алгебра 7–9». Эти советы носят общий характер и имеют целью более выпукло изложить педагогические позиции авторов и дать учителю возможность обдумать их и сравнить со своими представлениями об обучении математике.

1) *Процесс обучения важнее результата*.

Это означает, что эффективность выбираемой системы обучения должна определяться не суммой конкретных умений и навыков, а тем, насколько полно она позволяет раскрыть и развить интеллектуальные возможности ученика. Это развитие осуществляется в процессе учебной деятельности. Приобретение учеником опыта содержательной разнообразной деятельности должно стать основной учебной целью.

2) *Учить надо не по закону*, *а по понятиям*.

Закон, т. е. принятые официальные документы (Стандарт, программы, положения о ЕГЭ и пр.), не предназначены для того, чтобы весь процесс обучения ориентировать на их выполнение. Целевые установки обучения не могут быть формализованы, а их достижение не может сводиться к суммарным количественным показателям. Эти установки определяются теми понятиями, которые вложены в нас нашими учителями, традицией и опытом предшествующих поколений. Мы знаем, чему и как надо учить, но не всегда можем дать этому четкую и исчерпывающую формулировку. Мы работаем для ученика, а не для начальства.

3) *Бедность не порок*, *но богатым быть лучше*.

Многие неплохие учебники по математике можно охарактеризовать словами «честная бедность». По ним легко и удобно работать, они гарантируют выполнение минимальных требований Стандарта, их можно изучать «от сих до сих», строчку за строчкой. Однако надо помнить, что при этом за бортом могут оказаться важнейшие математические идеи, не раскрыться внутренние силы ученика. Не нужно бояться появления в учебном комплексе трудного на Ваш взгляд материала. Учебник не рассчитан на то, что каждый ученик (и даже все ученики в классе) выполнит каждое помещенное в нем учебное задание.

4) *Учебник – это не палка колбасы, а щедро накрытый стол.*

Сложилась традиция линейного построения учебника, при котором на каждом уроке отрезается по маленькому ломтику. Такая структура оправдана, когда все учатся по единому поурочному плану и учебник используется как конспект уроков. При этом, чтобы скрыть фактическую уравниловку прибегают к различным фиговым листкам в виде разных звездочек или цветовых разделений учебного материала на обязательный и необязательный, минимальный и вариативный. Учебный комплект должен напоминать пиршественный стол. Каждое блюдо на этом столе полезно и вкусно и доступно каждому. Ни одно из них не должно быть признано строго обязательным. Все съесть нельзя. Совокупность блюд превышает возможности любого ученика, и нет нужды стремиться даже попробовать каждое из них. Составление меню обеда, т. е. поурочного плана, выбор необходимых материалов и средств обучения – прерогатива учителя. Если ему нужна методическая помощь, он должен искать ее не в авторских учебных материалах, а в соответствующих методических службах.

5) *Смысл должен стоять впереди языка*.

В обучении математике на первый план выступает понимание. Надо стремиться к тому, чтобы ученик понимал то, что он делает и о чем он говорит. Как он это называет, какие термины использует – это глубоко второстепенный вопрос. Как говорит русская пословица, «хоть горшком назови…». Многие математические термины употребляются в различных смыслах. Когда вам кажется, что ученик произносит набор слов, смысл которых неясен, лучше не говорить ему, что это неверно, а переспросить, что он имеет в виду. Особенно следует избегать «классификационных» вопросов: «что такое иррациональное уравнение» или «какая функция называется квадратичной». Пусть ученик распознает математические объекты, говоря: «это квадратичная функция», «это вектор», «это иррациональное число», а не пытается дать определение общим понятиям по типу: «вектор – это …», «иррациональное число – это …».

6) *Наши ученики умнее нас*.

Самое вредное – это ссылаться на слабость класса и неподготовленность отдельных учеников. Если наше развитие в целом затормозилось, а в ряде направлений и вовсе остановилось, то у наших учеников все еще впереди и ставить барьеры на пути их умственного развития – это брать на себя тяжелый грех. Не бойтесь давать слабому ученику трудные задания. Возьмите его за руку, сделайте с ним первые шаги, похвалите его за каждое сделанное им усилие.

Ученик оценивает каждого из нас. Учебник, как и учитель, не должен быть непогрешимым. Слово учебника, как и слово учителя, должно говорить о главном и не может быть истиной «в последней инстанции». Час, когда ученик поймет, что нами не все сказано, когда перед ним откроется путь, ведущий дальше преподанных нами премудростей, это будет часом нашей победы, а не поражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. Воспоминания и очерки. – М: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 607.

2. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. – М.: Наука, 1972. – С. 14.

3. Холодная М. А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. – СПб.: Питер, 2002.

4. Холодная М. А. Формирование персонального познавательного стиля ученика // Теория и практика продуктивного обучения: сборник. – М.: Народное образования, 2000.

5. Братченко С. Л. Гуманистическое направление образования // Вестник СЗО РАО. – СПб., 1996. – Вып. 1.

6. Башмаков М. И. Планирование учителем своей деятельности // Вестник СЗО РАО. – СПб., 1996. – Вып. 1.

7. Математика в образовании и воспитании. – М.: Фазис, 2000.

8. Роджерс К. К науке о личности // История зарубежной психологии: тексты. – М., 1986.

9. Сборник нормативных документов. Математика. – М.: Дрофа, 2007.

10. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа, 10–11 кл. – М.: Дрофа, 2002–2007.

11. Башмаков М. И. Математика: учеб. пособие для 10–11 кл. гуманит. профиля. – М.: Просвещение, 2004.

12. Башмаков М. И. Математика. Практикум: учеб. пособие для 10–11 кл. гуманит. профиля. – М.: Просвещение, 2004.

13. Башмаков М. И. Математика: учебник, 10 класс. – М.: Академия, 2007.

14. Башмаков М. И. Математика: сборник задач, 10 класс. – М.: Академия, 2007.