Методическое руководство к компьютерной версии лабораторной работы ЛР-03
(Рабочая тетрадь, глава 3, 7 класс)

Цели работы. Наряду с теми же целями, которые ставятся в печатной версии работы, компьютерная версия имеет целью знакомство учащихся с простейшими приемами работы с электронными таблицами (на примере MS Excel). Использование таблиц позволяет существенно сэкономить время на вычислениях, получить больше экспериментальных данных и посвятить освобождающееся время их анализу, формулированию и обоснованию выводов. (Следует, правда, оговориться, что на первых порах какое-то время уйдет на освоение работы с таблицей.) Отметим также то важное обстоятельство, что само построение последовательностей требует анализа их определений и превращения определений в рекуррентные формулы, что дает ключ и к доказательству обнаруживаемых закономерностей, фактически – доказательству по индукции, хотя упоминать ее явно нет необходимости.

Инструментарий работы состоит из одной «книги» Excel, имеющей два листа, – рабочий лист с краткими формулировками заданий, на котором происходит построение последовательностей, и лист результатов, где все последовательности уже построены. Второй лист можно использовать, чтобы сверить свои результаты с правильными. С другой стороны, если поместить курсор в любую его ячейку, то в строке формул под инструментальной панелью появится номер этой ячейки и записанное в нее выражение (дающее отображаемое числовое значение). Если же дважды кликнуть в ячейку, то ячейки, содержимое которых входит в это выражение, выделятся рамками. При выполнении вводных заданий требуется рабочая тетрадь.

Ход работы
Работа проводится в компьютерном классе, в малых группах (по 2-3 ученика за компьютером). Учитель контролирует ход работы на всем ее протяжении, записывает на доске важные промежуточные результаты, которые потребуются в последующих заданиях, демонстрирует на экране выполнение отдельных операций в Excel (это особенно важно в начале работы), подводит итоги. Ученики, уже знакомые с работой в Excel, могут значительную часть работы выполнять самостоятельно. Можно исходить из того, что разные ученики успеют за урок выполнить работу в разной степени: желательно, чтобы все ученики (по крайней мере, большинство) сделали все задания до задания 7 включительно, хотя бы без обоснования обнаруженных закономерностей. Более сильные ученики должны успеть выполнить и задание 8, а также, по возможности, доказать использованные соотношения (между коэффициентами a_n, b_n, …, между суммами и числами Фибоначчи и т.п.). Можно ожидать, что работа заинтересуют сильных учеников и они доделают все задания до конца самостоятельно.

Комментарии к заданиям
Вводные задания 1 и 2 (в большей своей части) выполняются в рабочей тетради.

Ответ к вводному заданию 1: $A_2 = \dfrac{x+1}{x+2}$, $A_3 = \dfrac{x+2}{2x+3}$.

Ответ к вводному заданию 2: $a' = c$, $b' = d$, $c' = a+c$, $d' = b+d$. В таблицу эти формулы вписываются просто для удобства, чтобы они были перед глазами.

Задание 1 задание знакомит с техникой автозаполнения на простейшем примере; его должны проделать все ученики. Заметим, что номера 1, …, 20 можно проставить и иначе: поставить в первую клетку диапазона число 1, выделить эту клетку и растянуть выделение, держа нажатой клавишу Ctrl.

Приемы выполнения **заданий 2, 3** описаны в тексте задания.

Задание 4. Сравнивая последовательности, легко заметить, что b_n и c_n совпадают друг с другом и с последовательностью a_n, начиная со второго ее члена, а d_n совпадет с a_n, начиная с a_3; формально, $a_{n+1} = b_n = c_n = d_{n-1}$ при $n \geq 1$. (Можно, например, посмотреть, где в последовательностях стоят числа 2, 3, 5.) Для объяснения достаточно заметить, что правило порождения последовательностей a_n и c_n ($a_{n+1} = c_n$, $c_{n+1} = a_n + c_n$) превратится в правило для b_n и d_n, если заменить в нем буквы a и c буквами b и d, а кроме того, $a_2 = b_1$ и $c_2 = d_1$. Отсюда следует, что «выращивая» по нашему правилу последовательности a_n и c_n из a_2 и c_2 и b_n и d_n из b_1 и d_1, мы получим одинаковый результат, только со сдвигом нумерации на 1.

Задания 5, 6. Предполагается, что ученики смогут непосредственно увидеть, что в любой из полученных последовательностей каждый член, начиная с 3-го, равен сумме двух предыдущих. Можно устроить коллективное угадывание закономерности, а затем ее проверить, построив последовательность Фибоначчи F_n из задания 6. Обратите внимание, что в «Рабочей тетради» последовательностью Фибоначчи не совсем точно названа последовательность a_n; на самом деле, это b_n или c_n. Угаданное соотношение $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ легко вывести из найденного в задании 4 правила, из которого получается, что $a_{n+1} = c_n = a_{n-1} + c_{n-1} = a_{n-1} + a_n$.

Задание 7. Excel позволяет вычислить сумму всех чисел в данном диапазоне специальной командой, но ей пользоваться в данном случае неудобно, т.к. число слагаемых в сумме зависит от n. Поэтому и предлагается приведенная в задании формула для вычисления S_n. Ее следует обсудить с учениками; возможно, кто-то из них сам придумает способ построения последовательности сумм. Чтобы использовать автозаполнение для вычисления S_n, нужно на рабочем листе ввести число 1 (S_1=1) в ячейку H5, затем формулу «=H5+G6» (т.е. $S_2 = S_1 + F_2$) в ячейку H6 (ср. задание 2,б), и распространить эту формулу на весь столбец H, выделив ячейку H6 и «растянув» выделенный диапазон вниз.
Последовательность сумм совпадает с последовательностью Фибоначчи, уменьшенной на 1 и сдвинутой на два номера к началу: $S_n = F_{n+2} - 1$ (n = 1, 2, …). Чтобы ученикам было легче это заметить, надо им посоветовать рассмотреть члены последовательностей с достаточно большими номерами. Проверить эту формулу можно построением последовательности $A_n = S_n + 1$. Сильным ученикам можно предложить доказать найденную формулу. Это делается так. Сложим две последовательные суммы:

$$
\begin{aligned}
S_{n-1} + S_n &= F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + \\
&\quad + F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = \\
&= F_1 + (F_1 + F_2) + (F_2 + F_3) + \ldots + (F_{n-1} + F_n) = \\
&= F_2 + F_3 + \ldots + F_{n+1} = S_{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

(мы использовали основное соотношение для чисел Фибоначчи, а также то, что $F_1 = F_2 = 1$).
Полученное соотношение между суммами можно переписать так:
$(S_{n-1} + 1) + (S_n + 1) = S_{n+1} + 1$.
Видим, что последовательность $S_n + 1$ удовлетворяет «соотношению Фибоначчи»; кроме того, $S_1 + 1 = 2 = F_2$ и $S_2 + 1 = 3 = F_3$. Поэтому и следующие числа $S_n + 1$ совпадают с числами Фибоначчи.

Задание 8. Способ построения последовательности сумм $S'_n = F_1 + F_3 + \ldots + F_n$ чисел Фибоначчи с нечетными номерами нужно обсудить с учениками, собрав их предложения. В принципе, эти суммы вычисляются так же, как в предыдущем задании 7, но сложность в том, что числа Фибоначчи, добавляемые к вычисленным суммам, нужно брать через одно. Можно это делать так: запишем на рабочем листе $S'_1 = 1$ в ячейку I5, а затем, пропустив ячейку I6, запишем $S'_3 = S'_1 + F_3$, т.е. формулу «=I5+G7», в ячейку I7 (на листе с образцом используется столбец J, а не I). Теперь выделим ячейки I6 и I7 и «растянем» выделение вниз. Образуется искомая последовательность, члены которой чередуются с пустыми ячейками. Аналогично строится и последовательность $S''_n = F_2 + F_4 + ... + F_n$ (пишем $S''_1 = 1$ в ячейку J6, затем «=J6+G8» в J8, выделяем J7 и J8 и растягиваем выделенный диапазон вниз). Формулы, связывающие эти суммы с числами Фибоначчи, выглядят так: $S'_{2k-1} = F_{2k}$, $S''_{2k} = F_{2k+1} - 1$ (они приводятся и в Рабочей тетради). Доказать их можно с помощью своеобразного «сворачивания»: поскольку $F_1=F_2$, мы имеем:

$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 +\ldots + F_n = (F_2 + F_3) + F_5 + F_7 + \ldots + F_n = (F_4 + F_5) + F_7 + \ldots + F_n =$
$= (F_6 + F_7) + \ldots + F_n = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$.

Во втором случае нужно переписать сумму в виде $-1 + F_1 + F_2 + F_4 + \ldots + F_n$ и потом применить аналогичный прием, в результате чего сумма «свернется» в $F_{n+1} - 1$.

Задание 9. Времени на это задание, скорее всего, не останется, если только не отвести на всю работу два урока. Ученики уже приобрели некоторый опыт, и можно предложить им самостоятельно построить знакопеременные суммы A_n. Укажем два способа их вычисления.

1) Запишем в первую ячейку столбца $A_1 = 1$ (ячейка K5 на рабочем листе), в ячейку под ней $A_2 = A_1-F_2$ (=K5–G6) и $A_3=A_2+F_3$ (=K6+G7); выделим две последние ячейки (K6 и K7) и растянем выделение вниз.

2) Можно использовать последовательности, вычисленные в предыдущем задании, заметив, что $A_{2k+1} = S'_{2k+1} - S''_{2k}$, $A_{2k} = -S''_{2k} + S'_{2k-1}$ (при $k = 1, 2, 3, \ldots$). Как и при первом способе, нужно вписать в таблицу значения A_2 и A_3, вычисленные по этим формулам, и использовать автозаполнение. Этот способ позволяет быстро получить короткие выражения для A_n:

$A_n = F_{n-1} + 1$ при нечетном n, $A_n = 1-F_{n-1}$ при четном n.