Задачи с жидкостями

В.МОЖАЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ БУДУТ РАССМОТРЕНЫ ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ жидкость, с одной стороны, является средой, где находятся твердые тела, а с другой стороны, она, как жидкий элемент, участвует в движении, подобно твердому телу. Наиболее сложными являются комбинированные задачи, в которых жидкость движется вместе с находящимся в ней твердым телом (например, разобранная ниже задача 6).

Перейдем к обсуждению конкретных задач.

Задача 1. *В цилиндрический сосуд с водой опустили кусок льда, в который вморожен осколок стекла. При этом уровень воды в сосуде поднялся на h = 11 мм, а лед остался на плаву, целиком погрузившись в воду. На сколько опустится уровень воды в сосуде после того, как весь лед растает? Плотность воды* $\rho_{\text{в}} = 1$ *г/см*^{3}*, плотность льда* $\rho_{\text{л}} = 0{,}9$ *г/см*^{3}*, стекла* $\rho_{\text{ст}} = 2{,}0$ *г/см*^{3}*.*

Обозначим первоначальный объем льда через $V_{\text{л}}$, а объем стекла – через $V_{\text{ст}}$. Когда кусок льда полностью погрузился в воду, он вытеснил объем воды, равный

$$V_{\text{выт}} = V_{\text{л}} + V_{\text{ст}} .$$

Очевидно, что этот же объем равен

$$V_{\text{выт}} = hS ,$$

где S – площадь поперечного сечения сосуда.

Теперь запишем условие плавания куска льда с вмороженным осколком стекла – суммарная сила тяжести льда и стекла равна выталкивающей силе:

$$\rho_{\text{л}} g V_{\text{л}} + \rho_{\text{ст}} g V_{\text{ст}} = \rho_{\text{в}} g \left(V_{\text{л}} + V_{\text{ст}}\right) .$$

Из совместного решения полученных уравнений найдем объемы льда и стекла:

$$V_{\text{л}} = \frac{\left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}\right) hS}{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{л}}} , \quad V_{\text{ст}} = \frac{\left(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}\right) hS}{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{л}}} .$$

Из растаявшего льда образовалась вода объемом

$$V_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{л}} V_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{\rho_{\text{л}} \left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}\right) hS}{\rho_{\text{в}} \left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{л}}\right)} .$$

Поскольку кусок стекла остается в воде, понижение уровня воды в сосуде за время таяния льда будет равно

$$\Delta h = \frac{V_{\text{л}} - V_{\text{в}}}{S} = \frac{\left(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}\right)\left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}\right)}{\rho_{\text{в}}\left(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{л}}\right)} h = 1 \text{ мм} .$$

Задача 2. *В вертикально расположенной трубке – с открытым верхним концом, с постоянным внутренним сечением и длиной 3L = 1080 мм – столбиком ртути длиной L заперт слой воздуха такой же длины. Какой длины столб ртути останется в трубке, если ее перевернуть открытым концом вниз? Внешнее давление* $p_0 = 774$ *мм рт.ст.*

Обозначим давление воздуха под ртутным столбиком в исходном положении трубки через p_1. Тогда условие равновесия столбика ртути длиной L запишется в виде

$$p_1 = p_0 + \rho g L ,$$

где ρ – плотность ртути. Предположим, что после переворота трубки и установления первоначальной температуры часть ртути выльется. Обозначим через h длину столбика оставшейся в трубке ртути. Новое условие равновесия будет иметь вид

$$p_2 + \rho g h = p_0 ,$$

где p_2 – новое давление воздуха над ртутным столбиком.

Условие сохранения количества изолированного воздуха позволяет записать

$$p_1 L = p_2 \left(3L - h\right) .$$

Подставляя сюда p_1 из первого равенства, а p_2 – из второго, получим уравнение относительно h:

$$\left(p_0 + \rho g L\right) L = \left(p_0 - \rho g h\right)\left(3L - h\right) ,$$

или, если записать атмосферное давление в виде $p_0 = \rho g H_0$, где $H_0 = 774$ мм:

$$h^2 - \left(3L + H_0\right) h + L\left(2H_0 - L\right) = 0 .$$

Для данных численных значений L и H_0 (в мм) получается, что

$$h = 270 \text{ мм}.$$

Задача 3. U-*образная трубка расположена вертикально и заполнена жидкостью. Один конец трубки открыт в атмосферу, а другой конец соединен с сосудом объемом* $V_0 = 0{,}1$ *л, заполненным гелием (рис.1). Объем всей трубки равен объему этого сосуда. В некоторый момент гелий начинают медленно нагревать. Какое минимальное количество теплоты необходимо подвести к гелию, чтобы вся жидкость вылилась из трубки? Атмосферное давление* $p_0 = 10^5$ *Па; длины трех колен трубки одинаковы; давление, создаваемое столбом жидкости в вертикальном колене, равно* $p_0/8$*.*

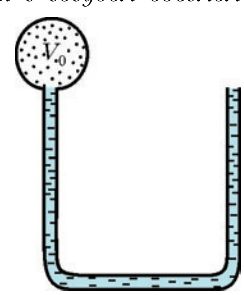

Рис. 1

Обозначим полную длину трубки через $3L$, а площадь внутреннего поперечного сечения трубки – через S. Поскольку объем трубки V_0, то длина каждого колена

$$L = \frac{V_0}{3S} .$$

Весь процесс нагрева гелия можно разбить на три участка. Первый участок – это когда жидкость еще находится в левом вертикальном колене. Рассмотрим момент времени, когда уровень жидкости в левом колене переместился на величину z, $0 \le z \le L$. Из условия равновесия жидкости в трубке найдем давление гелия:

$$p = p_0 + \rho_{\text{ж}} g z ,$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости. На втором участке, для которого $L \le z \le 2L$, давление гелия

$$p = p_0 + \rho_{\text{ж}} g L = \text{const} ,$$

а на третьем участке, для $2L \le z \le 3L$, –

$$p = p_0 + \rho_{\text{ж}} g \left(3L - z\right) .$$

На рисунке 2 изображен график зависимости давления

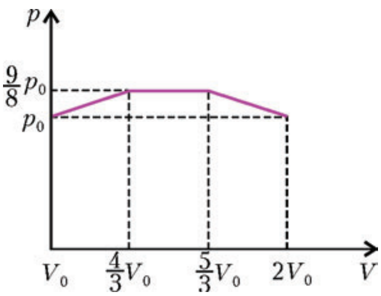

Рис. 2

гелия от его объема V, который связан со смещением z простым соотношением:

$$V = V_0 + Sz\ .$$

На первых двух участках тепло необходимо подводить к гелию – это однозначно: здесь газ, расширяясь, совершает работу и одновременно нагревается. А вот третий участок неоднозначен: здесь газ также совершает работу, но при этом он может и охлаждаться. Убедимся, что и на этом участке тепло тоже подводится.

Учитывая, что $\rho_{ж} gL = p_0/8$, запишем уравнение процесса для третьего участка в виде

$$p = \frac{p_0}{8}\left(14 - 3\frac{V}{V_0}\right).$$

Рассмотрим малое изменение объема ΔV. Тогда работа, совершенная гелием, равна

$$\Delta A = p\Delta V = \frac{p_0}{8}\left(14 - 3\frac{V}{V_0}\right)\Delta V\ .$$

Запишем уравнение состояния гелия как идеального газа:

$$pV = \nu RT\ ,$$

где ν – количество вещества, T – температура газа. Подставим в это уравнение выражение для давления на третьем участке процесса и получим

$$\frac{p_0}{8}\left(14V - 3\frac{V^2}{V_0}\right) = \nu RT\ .$$

Продифференцируем обе части этого уравнения:

$$\frac{p_0}{8}\left(14 - 6\frac{V}{V_0}\right)\Delta V = \nu R\Delta T\ .$$

Теперь найдем изменение внутренней энергии гелия при изменении объема на ΔV:

$$\Delta U = C_V\nu\Delta T = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3p_0}{16}\left(14 - 6\frac{V}{V_0}\right)\Delta V\ .$$

Согласно первому началу термодинамики, подведенное количество теплоты равно сумме изменения внутренней энергии газа и совершенной им работы:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{p_0}{8}\left(35 - 12\frac{V}{V_0}\right)\Delta V\ .$$

Легко убедиться, что при $\frac{5}{3} \le \frac{V}{V_0} \le 2$ и $\Delta V > 0$

$$\Delta Q > 0\ .$$

Итак, на всех участках тепло подводится, поэтому полное подведенное к гелию количество теплоты Q найдем как сумму полного изменения внутренней энергии и полной работы, которую совершил гелий:

$$Q = \left(U_{к} - U_{н}\right) + A\ .$$

Поскольку начальная и конечная температуры равны, соответственно,

$$T_{н} = \frac{p_0V_0}{\nu R} \ \text{ и } \ T_{к} = \frac{2p_0V_0}{\nu R}\ ,$$

то изменение внутренней энергии равно

$$U_{к} - U_{н} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_{к} - T_{н}\right) = \frac{3}{2}p_0V_0\ .$$

Полную работу найдем как площадь под кривой на рисунке 2:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}p_0 + p_0\right)\frac{V_0}{3} + \frac{9}{8}p_0\frac{V_0}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}p_0 + p_0\right)\frac{V_0}{3} = \frac{13}{12}p_0V_0\ .$$

Тогда окончательно

$$Q = \left(\frac{3}{2} + \frac{13}{12}\right)p_0V_0 = \frac{31}{12}p_0V_0 \approx 26\ \text{Дж}\ .$$

Задача 4. *«Тройник» с двумя открытыми в атмосферу вертикальными трубками и одной закрытой (горизонтальная трубка) полностью заполнен водой (рис.3). После того, как тройник начали двигать по горизонтали в плоскости рисунка влево с некоторым постоянным ускорением, из него вылилась 1/16 массы всей воды. Чему при этом стало равно давление в жидкости у закрытого конца – в точке A? Трубки имеют одинаковые внутренние сечения. Длину L считать заданной. Диаметр трубок мал по сравнению с длиной L.*

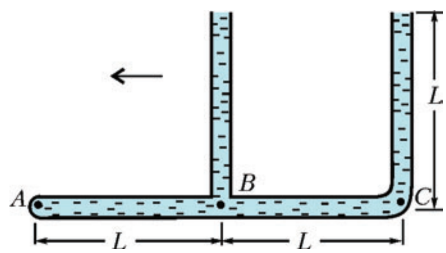

Рис. 3

При движении тройника влево с ускорением a гидростатические давления в точках A, B и C (см. рис.3) связаны между собой уравнением движения воды в горизонтальной трубке:

$$\rho La = p_B - p_A\ ,\ \ 2\rho La = p_C - p_A\ ,$$

где ρ – плотность воды. Давление в точке C больше давления в точке B, поэтому вода будет выливаться из правой вертикальной трубки. Из условия неразрывности струи жидкость при этом будет отсасываться из левой вертикальной трубки. В установившемся режиме правая трубка будет полностью заполнена водой, а левая – частично. Поскольку вылилась $1/16$ массы всей воды, что соответствует массе воды в части трубки длиной $L/4$, то в левой трубке останется столбик воды высотой $\frac{3}{4}L$. Поэтому давления в точках B и C будут равны

$$p_B = p_0 + \frac{3}{4}\rho gL \ \text{ и } \ p_C = p_0 + \rho gL\ ,$$

где p_0 – атмосферное давление.

Исключая из всех уравнений p_B и p_C, получим систему двух уравнений относительно p_A и a:

$$\begin{cases} p_A + \rho La = p_0 + \frac{3}{4}\rho gL, \\ p_A + 2\rho La = p_0 + \rho gL. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно p_A, найдем

$$p_A = p_0 + \frac{1}{2}\rho gL\ .$$

Задача 5. *Тонкая, запаянная с одного конца и изогнутая под прямым углом трубка заполнена ртутью и закреплена*

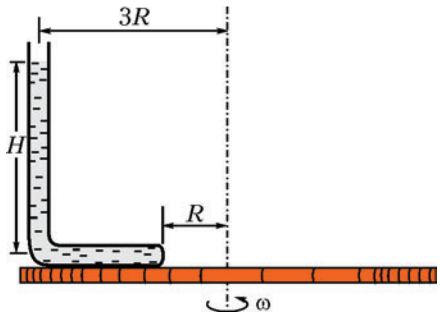

Рис. 4

на горизонтальной платформе, которая вращается с угловой скоростью ω *вокруг вертикальной оси (рис.4). При вращении платформы ртуть не выливается и полностью заполняет горизонтальное колено. Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке; атмосферное давление* p_0*; плотность ртути* ρ*. Найдите давление ртути у запаянного конца трубки.*

Выделим в горизонтальной части трубки небольшой элемент ртути длиной dr, расположенный на произвольном расстоянии r от оси вращения (рис.5). Этот элемент вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Запишем уравнение движения выделенного элемента:

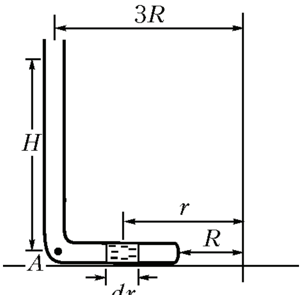

Рис. 5

$$\rho S\omega^2 r\,dr = S dp,$$

где S – площадь поперечного сечения трубки, dp – разность давлений между левым концом элемента ртути и правым. После сокращения на S получим связь между малыми приращениями dp и dr:

$$dp = \rho\omega^2 r\,dr.$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения и получим

$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + \text{const}.$$

Константу определим из условия, что при $r = 3R$ (точка A) давление равно $p_0 + \rho g H$:

$$p_0 + \rho g H = \frac{9\rho\omega^2 R^2}{2} + \text{const},$$

и получим зависимость $p(r)$:

$$p(r) = p_0 + \rho g H - \frac{9\rho\omega^2 R^2}{2} + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}.$$

Отсюда найдем давление ртути у запаянного конца трубки ($r = R$):

$$p(R) = p_0 + \rho g H - 4\rho\omega^2 R^2.$$

Задача 6. *Стеклянный шар объемом* V *и плотностью* ρ *находится в сосуде с водой (рис.6). Угол между стенкой сосуда и горизонтальным дном* α*, внутренняя поверхность сосуда гладкая, плотность воды* ρ_0*. Найдите силу давления шара на дно сосуда в двух случаях: 1) сосуд неподвижен; 2) сосуд движется с постоянным горизонтальным ускорением* a*.*

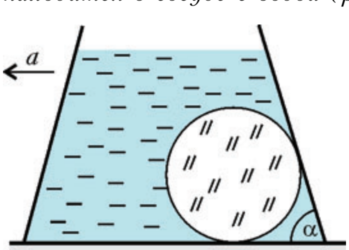

Рис. 6

Сначала рассмотрим движущийся по горизонтали с постоянным ускорением a сосуд с водой. Введем систему координат XY, связанную с сосудом, как это изображено на рисунке 7. Наша задача – найти уравнение свободной поверхности жидкости $y = f(x)$ в сосуде, который движется с горизонтальным ускорением a. Для этого выделим маленький элемент жидкости на оси X, длина которого dx, а площадь поперечного сечения равна единице. С левого торца этого элемента давление равно

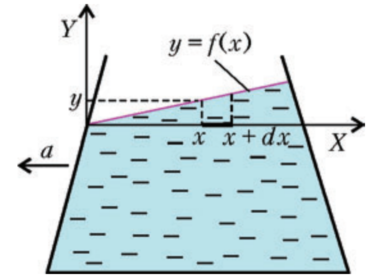

Рис. 7

$$p(x) = p_{\text{атм}} + \rho_0 g y,$$

а с правого торца оно равно

$$p(x+dx) = p_{\text{атм}} + \rho_0 g (y + dy),$$

где y – высота столба жидкости в точке x, а $y + dy$ – аналогичная высота в точке $x + dx$. Так как наш элемент жидкости движется с ускорением a, его уравнение движения имеет вид

$$\rho_0\,dx\,a = \rho_0 g (y + dy) - \rho_0 g y.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{g},$$

или в интегральном виде –

$$y = \frac{a}{g}x + \text{const}.$$

Поскольку при $x = 0$ $y = 0$, константа тоже равна нулю, а уравнение свободной поверхности жидкости выглядит так:

$$y = \frac{a}{g}x.$$

Линии, параллельные свободной поверхности, внутри жидкости являются линиями постоянного давления. Таким образом, жидкость, движущаяся с горизонтальным ускорением a, эквивалентна неподвижной жидкости, находящейся в новом поле тяжести с эффективным «ускорением свободного падения», равным $g_э = \sqrt{a^2 + g^2}$ и направленным под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{g}$ к вертикали (рис.8). Вертикальная составляющая этого эффективного ускорения равна обычному ускорению свободного падения g, а горизонтальная составляющая численно равна ускорению сосуда и направлена в противоположную сторону.

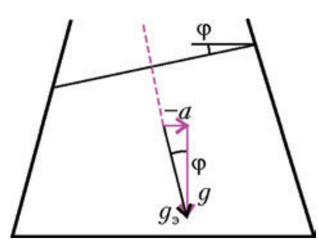

Рис. 8

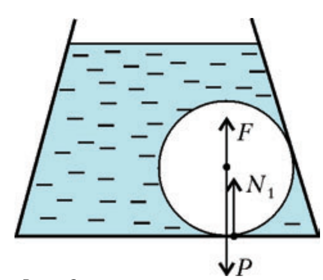

Рис. 9

В том случае, когда сосуд неподвижен ($a = 0$), эффективное ускорение равно g и направлено по вертикали. Силы, действующие на стеклянный шар в этом случае, показаны на рисунке 9. Здесь $P = \rho V g$ – вес (точнее – сила тяжести) шара, $F = \rho_0 V g$ – выталкивающая сила, а N_1 – сила реакции дна сосуда на шар. Из условия равновесия шара найдем, что

$$N_1 = (\rho - \rho_0) V g .$$

Очевидно, что сила давления шара на дно численно равна силе реакции дна и направлена в противоположную сторону.

В случае движущейся с горизонтальным ускорением a жидкости или неподвижной жидкости, но находящейся в поле с новым «ускорением свободного падения» $g_э$, на шар будут действовать следующие силы (рис.10): вертикальная составляющая нового веса шара $P_1 = \rho V g$, горизонтальная составляющая этого веса $P_2 = \rho V a$, вертикальная составляющая выталкивающей силы $F_1 = \rho_0 V g$, ее горизонтальная составляющая $F_2 = \rho_0 V a$, реакция опоры T со стороны боковой стенки и, наконец, сила N_2 – сила реакции на шар со стороны дна сосуда. Запишем условие равновесия шара, т.е. равенство нулю всех сил, действующих на шар по вертикали:

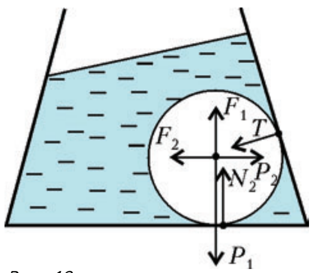

Рис. 10

$$F_1 + N_2 - P_1 - T\cos\alpha = 0$$

и по горизонтали:

$$F_2 + T\sin\alpha - P_2 = 0 .$$

Исключая из этих уравнений T, найдем искомую силу N_2:

$$N_2 = P_1 - F_1 + (P_2 - F_2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha = (\rho - \rho_0) V (g + a\,\mathrm{ctg}\,\alpha) .$$

Разумеется, и в этом случае сила давления шара на дно сосуда численно равна силе реакции дна, но направлена в противоположную сторону.

Упражнения

1. В цилиндрическом сосуде с водой плавает деревянная дощечка. Если на нее сверху положить стеклянную пластинку, то дощечка с пластинкой останутся на плаву, а уровень воды в сосуде повысится на Δh_1. На сколько изменится уровень воды в сосуде с плавающей дощечкой, если ту же стеклянную пластинку бросить на дно сосуда? Плотность стекла $\rho_{ст}$, плотность воды $\rho_в$.

2. U-образная трубка состоит из трех одинаковых колен, расположена вертикально и заполнена жидкостью (см. рис.1). Один конец трубки соединен с баллоном, заполненным водородом, другой конец открыт в атмосферу. Водород в баллоне медленно нагревают, и он постепенно вытесняет жидкость из трубки. К моменту, когда из трубки вылилось $2/3$ всей массы жидкости, водород получил количество теплоты Q = 30 Дж. Найдите объем баллона. Известно, что объем всей трубки равен объему баллона; атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па; давление, создаваемое столбом жидкости в вертикальном колене трубки, равно $p_0/9$.

3. «Тройник» из трех вертикальных открытых в атмосферу трубок полностью заполнен водой (рис.11). После того, как тройник начали двигать в горизонтальном направлении в плоскости рисунка с некоторым ускорением, из него вылилось $9/32$ всей массы воды. Чему равно ускорение тройника? Внутренние сечения трубок одинаковы, длина каждой трубки L.

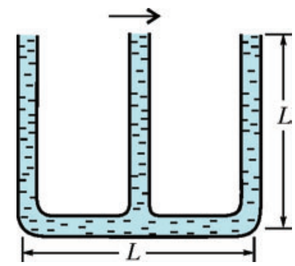

Рис. 11

4. Тонкая, запаянная с одного конца и изогнутая под прямым углом трубка заполнена жидкостью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис.12). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке; атмосферное давление p_0; плотность жидкости ρ. Найдите давление жидкости у запаянного конца трубки.

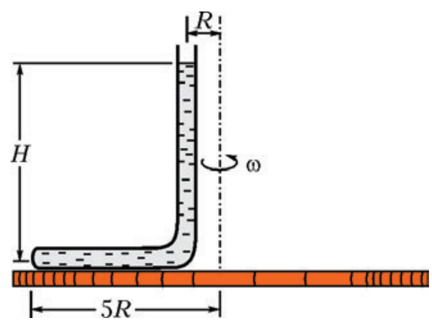

Рис. 12

ИНФОРМАЦИЯ

В 2005 году в издательстве «КолосС» вышла книга «Механика. Задачи и решения», подготовленная коллективом авторов – преподавателей кафедры общей и экспериментальной физики Московского педагогического государственного университета А.Б.Казанцевой, М.С.Каменецкой, В.Н.Александровым, Е.А.Коротаевой, И.А.Васильевой и А.Н.Елантьевым.

Решение задач – неотъемлемая часть полноценного изучения физики. Это эффективное средство усвоения физических понятий и законов. Задачи прививают навыки пользования этими законами, помогают понять явления, происходящие в реальном мире, развивают культуру мышления, формируют физическое мировоззрение и целостную физическую картину мира.

Новое учебное пособие «Механика. Задачи и решения» содержит около 700 надлежащим образом подобранных вопросов и задач, охватывающих все разделы механики. Уровень сложности включенных в него задач различен и дает возможность выбора в зависимости от этапа изучения темы и уровня подготовленности учащихся. Условные обозначения уровня сложности (С1, С2 и С3) облегчают ориентировку читателя при самостоятельной работе.

Каждый раздел книги содержит теоретическое введение, в котором имеются необходимые для решения задач законы и формулы, подробный методический разбор решений основных типов задач (количество разобранных задач составляет примерно четвертую часть от их общего числа), к некоторым задачам даются указания к решению, к остальным приводятся ответы. Отличительной особенностью данного пособия является детальное структурирование учебного материала и тщательно продуманная последовательность предлагаемых задач и решений.

Книга рекомендуется в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности физика, но может быть полезной и преподавателям, и школьникам старших классов, интересующимся физикой и готовящимся к поступлению в вуз.