Закон электромагнитной индукции

В.ДРОЗДОВ

Закон электромагнитной индукции Фарадея говорит о том, что в проводящем контуре наводится электродвижущая сила (ЭДС) индукции, равная скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' . \qquad (1)$$

Знак «минус» здесь отражает правило Ленца: направление индукционного тока таково, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока. Однако при вычислении модуля ЭДС индукции, что приходится делать чаще всего, этот знак обычно опускается.

Формула (1) часто записывается в несколько ином виде:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} . \qquad (2)$$

Понятно, что формулы (1) и (2) равносильны лишь для равномерного изменения магнитного потока. В общем же случае формула (1) дает мгновенное значение ЭДС индукции, а формула (2) – ее среднее значение. Первую формулу удобно применять, когда магнитный поток легко записать как функцию времени. Второй формулой надо пользоваться для таких быстрых процессов изменения магнитного потока, когда его невозможно выразить функцией времени, в этих случаях средняя ЭДС практически совпадает с мгновенной.

Если магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ в данный момент времени одинаково в любой точке плоского контура площадью S, то магнитный поток через этот контур равен

$$\Phi = BS\cos\alpha ,$$

где α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к контуру. Очевидно, что магнитный поток может меняться при изменении любой из величин B, S, α, в реальных же задачах обычно меняется что-то одно из трех.

Переходим к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1 (МГУ, физический факультет, 1972). *Плоский виток изолированного провода перегибают, придавая ему вид «восьмерки», а затем помещают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Длина витка $l = 120$ см. Петли восьмерки можно считать окружностями с отношением радиусом 1:2. Какой ток потечет по проводу, если поле будет убывать с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = 10^{-2}$ Тл/с? Сопротивление витка $R = 10$ Ом.*

Геометрически очевидно нахождение радиусов петель восьмерки и их площадей (рис.1):

$$r = \frac{l}{6\pi} ,\ S_1 = \pi r^2 = \frac{l^2}{36\pi} ,\ 2r = \frac{l}{3\pi} ,\ S_2 = 4S_1 = \frac{l^2}{9\pi} .$$

Однако в этой, казалось бы простой, задаче есть физическая тонкость – вектор нормали к каждому контуру направлен так, что если смотреть из его конца, то ток течет по контуру против часовой стрелки. Значит, нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ антипараллельны. Следовательно, магнитный поток через восьмерку равен

$$\Phi = -\Phi_1 + \Phi_2 = -BS_1 + BS_2 = \frac{Bl^2}{12\pi} .$$

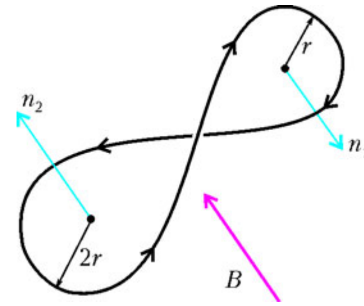

Рис. 1

Так как в задаче уже задана скорость изменения магнитного поля $\frac{\Delta B}{\Delta t}$, то применяем формулу (2):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B}{\Delta t} S = -\frac{l^2}{12\pi}\frac{\Delta B}{\Delta t} .$$

Тогда искомый ток в проводе равен

$$I = \frac{\left|\mathcal{E}_i\right|}{R} = \frac{l^2}{12\pi R}\frac{\Delta B}{\Delta t} = 4\cdot 10^{-3}\ \text{А} .$$

При решении этой и других задач рационально использовать очевидный факт: постоянный множитель можно выносить за знак приращения Δ («дельта»).

Задача 2. *Проводящая перемычка длиной l и массой m скользит в однородном магнитном поле с индукцией B по проводящим рельсам, замкнутым на резистор сопротивлением R. Какую силу F нужно приложить к перемычке, чтобы двигать ее с постоянной скоростью v? Коэффициент трения перемычки о рельсы равен μ, сопротивлением перемычки и рельсов можно пренебречь.*

Так как проводник движется с постоянной скоростью $\vec{v}$, то его ускорение равно нулю: $\vec{a} = 0$. Тогда уравнение движения перемычки, т.е. второй закон Ньютона, запишем в виде (рис.2)

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{А}} + m\vec{g} + \vec{N} = 0 ,$$

где $\vec{F}_{\text{тр}}, \vec{F}_{\text{А}}, m\vec{g}, \vec{N}$ – силы трения, Ампера, тяжести и реакции опоры соответственно. В проекциях на горизонтальное направление имеем

$$F - F_{\text{тр}} - F_{\text{А}} = 0 ,$$

а на вертикальное –

$$N - mg = 0.$$

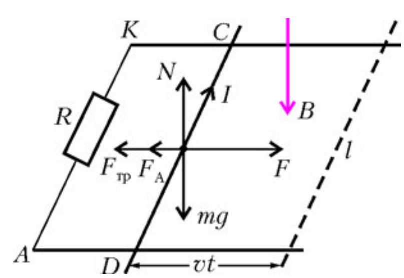

Рис. 2

Отсюда получаем

$$F = F_{\text{тр}} + F_{\text{А}} = \mu N + IBl = \mu mg + IBl ,$$

где I – сила тока в перемычке. Силу тока определим, используя закон электромагнитной индукции. ЭДС индукции в замкнутом контуре равна

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -\left(\Phi_0 + Blvt\right)' = -Blv ,$$

где $\Phi_0 = B\cdot KC\cdot CD$ – постоянный поток вектора $\vec{B}$ через контур $AKCD$. Сила тока в контуре равна

$$I = \frac{\left|\mathcal{E}_i\right|}{R} = \frac{Blv}{R} .$$

Следовательно,

$$F = \mu mg + \frac{B^2l^2v}{R}.$$

Задача 3 (МФТИ, 1993). *Квадратную проволочную рамку со стороной a и сопротивлением R протягивают с постоянной скоростью v через зазор электромагнита (рис.3). Магнитное поле в зазоре однородное, его индукция равна B и перпендикулярна плоскости рамки. Пренебрегая краевыми эффектами, определите, какое количество теплоты выделится в рамке. Сторона рамки меньше и продольного размера зазора b и его поперечного размера l.*

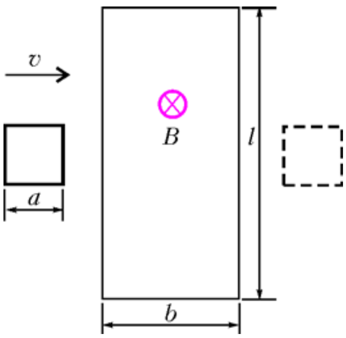

Рис. 3

Очевидно, что тепло в рамке будет выделяться во время возникновения в ней электрического тока. А он будет течь, когда рамка будет частично находиться в магнитном поле. Если такое мгновенное «погружение» равно x ($x < a$), то рамку пронизывает магнитный поток

$$\Phi = Bax = Bavt.$$

Значит, в рамке наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -Bav.$$

Тогда через нее будет течь постоянный ток

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{Bav}{R}.$$

Следовательно, по закону Джоуля – Ленца в рамке выделится количество теплоты

$$Q = 2I^2RT,$$

где $T = \frac{a}{v}$ – время частичного нахождения квадрата в поле, а коэффициент «2» вызван тем, что рамка и входит и выходит из магнитного поля. Окончательно имеем

$$Q = 2\frac{B^2a^2v^2}{R^2}R\frac{a}{v} = \frac{2B^2a^3v}{R}.$$

Задача 4. *Два проволочных кольца разных диаметров расположены в одной плоскости в однородном магнитном поле, индукция которого с течением времени равномерно возрастает. В каком кольце индуцируется больший ток, если массы колец одинаковы и изготовлены они из одного и того же материала?*

Здесь будет удобно рассмотреть одно кольцо радиусом R, а не вводить индексы «1» и «2».

По условию задачи,

$$B = B_0 + kt,$$

где B_0 и k – некоторые константы. Если α – постоянный угол между нормалью к кольцу и вектором магнитной индукции $\vec{B}$, то кольцо пронизывает магнитный поток

$$\Phi = \pi R^2 (B_0 + kt)\cos\alpha.$$

По закону электромагнитной индукции ЭДС индукции в кольце равна

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -\pi R^2 k\cos\alpha.$$

Тогда ток, текущий в кольце, равен

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{r} = \frac{\pi R^2 k\cos\alpha}{r}.$$

Здесь $r = \rho\frac{2\pi R}{S_0}$ – сопротивление кольца, где ρ – удельное сопротивление проволоки, $S_0 = \frac{m}{2\pi RD}$ – площадь поперечного сечения проволоки, D и m – плотность и масса кольца соответственно. Окончательно,

$$r = \frac{4\pi^2R^2D\rho}{m}, \text{ и } I = \frac{km\cos\alpha}{4\pi D\rho}.$$

Видно, что все величины, входящие в последнюю формулу, одинаковы для обоих колец. Следовательно, в них индуцируются равные токи.

Задача 5 (МГУ, химический факультет). *Проволочное кольцо радиусом r = 0,1 м лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца R = 1 Ом, вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_\perp = 5\cdot10^{-5}$ Тл.*

Необходимо учесть, что вместе с кольцом переворачивается и его нормаль $\vec{n}$ (рис.4), а также то обстоятельство, что детали процесса поворота нам неизвестны. Поэтому будем считать его весьма быстрым и применим формулу (2).

Начальный магнитный поток равен

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha = B_\perp S,$$

где $S = \pi r^2$ – площадь кольца. Конечный магнитный поток составляет

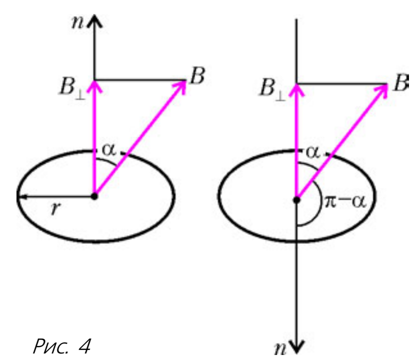

Рис. 4

$$\Phi_2 = BS\cos(\pi - \alpha) = -B_\perp S.$$

Значит, в контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\left(-\frac{2B_\perp S}{\Delta t}\right) = \frac{2B_\perp S}{\Delta t},$$

где Δt – малое время переворота кольца. Ток в кольце равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{2\pi r^2 B_\perp}{R\Delta t},$$

а искомый заряд –

$$q = I\Delta t = \frac{2\pi r^2 B_\perp}{R} = 3{,}14\cdot10^{-6}\text{ Кл} = 3{,}14\text{ мкКл}.$$

Задача 6. *В однородном магнитном поле с индукцией B вращается катушка, состоящая из N витков. Ось вращения катушки перпендикулярна ее оси и направлению магнитного поля. Период обращения катушки T, площадь поперечного сечения S. Найдите максимальную ЭДС индукции во вращающейся катушке.*

Мгновенное значение магнитного потока, пронизывающего N витков катушки, равно

$$\Phi = NBS\cos\alpha,$$

где $\alpha = \omega t$ – угол между вектором нормали к виткам катушки и вектором индукции магнитного поля (рис.5). Мгновенную ЭДС индукции определяем по формуле (1),

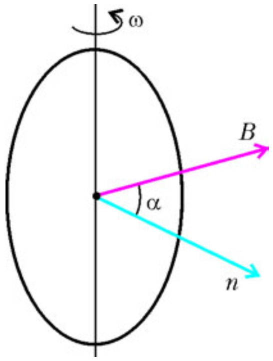

Рис. 5

применяя правило дифференцирования сложной функции:

$$\mathscr{E}_i = -NBS(\cos\omega t)' = NBS\omega\sin\omega t = \frac{2\pi NBS}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right),$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – угловая скорость вращения катушки. Ясно, что максимальное значение ЭДС индукции равно

$$\mathscr{E}_{im} = \frac{2\pi NBS}{T}.$$

Задача 7 (МГУ, механико-математический факультет, 1985). *Гибкий замкнутый проводник сопротивлением $R = 100$ кОм, образующий квадрат со стороной $a = 0,1$ м, помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5$ Тл. Плоскость квадрата перпендикулярна вектору магнитной индукции. Какой заряд протечет по проводнику, если из квадрата сделать равносторонний треугольник, не меняя плоскости его расположения?*

В этой задаче магнитный поток через контур меняется за счет изменения его площади. Применяем формулу (2), считая процесс трансформации квадрата в треугольник достаточно быстрым.

Сначала немного геометрии – определим площадь равностороннего треугольника со стороной $b = \dfrac{4}{3}a$:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}b^2\sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^2.$$

Изменение магнитного потока через контур равно

$$\Delta\Phi = BS_\Delta - BS_\square = \left(\frac{4\sqrt{3}-9}{9}\right)a^2B.$$

Значит, в проводнике возникает ЭДС индукция

$$\mathscr{E}_i = \frac{\left(9-4\sqrt{3}\right)}{9}\frac{a^2B}{\Delta t},$$

где Δt – время изменения формы контура. Индукционный ток в контуре равен

$$I = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{\left(9-4\sqrt{3}\right)a^2B}{9R\Delta t},$$

а искомый заряд составляет

$$q = I\Delta t = \frac{\left(9-4\sqrt{3}\right)a^2B}{9R} = 1,2\cdot10^{-7}\ \text{Кл}.$$

Задача 8 (МФТИ, 1995). *На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое непроводящее кольцо массой m, вдоль которого равномерно распределен заряд Q. Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Внешнее магнитное поле выключают. По какой причине (укажите механизм) кольцо начнет вращаться? Найдите угловую скорость вращения кольца после выключения магнитного поля.*

Пусть магнитное поле исчезает до нуля за время t_0 по простейшему линейному закону (рис.6). Очевидна зависимость

$$B(t) = B_0 - \frac{B_0}{t_0}t.$$

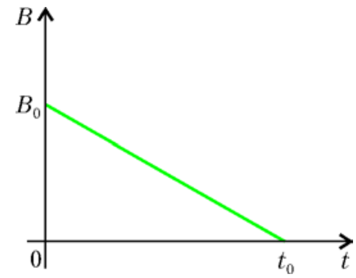

Рис. 6

Введем радиус кольца R, помня, что он нам не дан, впрочем как и величина t_0. Мгновенный магнитный поток, пронизывающий кольцо, равен

$$\Phi = BS = \pi R^2B_0\left(1-\frac{t}{t_0}\right).$$

ЭДС индукции, в силу формулы (1), равна

$$\mathscr{E}_i = \frac{\pi R^2B_0}{t_0}.$$

Физическая причина вращения кольца такова. Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого в каждой точке кольца направлены по касательной к нему. Это поле и действует на заряды кольца.

Найдем модуль напряженности электрического поля E. Поскольку по соображениям симметрии в любой точке кольца $E = \text{const}$, то, мысленно разрезав кольцо, мы вправе применить формулу $\Delta\varphi = Ed$, где $\Delta\varphi = \mathscr{E}_i$ – разность потенциалов между точками разреза, $d = 2\pi R$ – длина кольца. Значит,

$$E = \frac{\mathscr{E}_i}{2\pi R} = \frac{RB_0}{2t_0}.$$

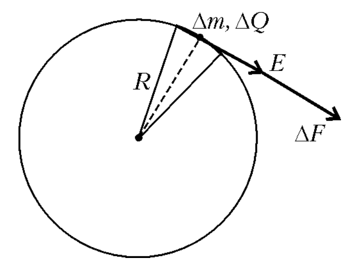

Рис. 7

Разобьем кольцо на достаточно большое число n точечных зарядов $\Delta Q = \dfrac{Q}{n}$ с массой $\Delta m = \dfrac{m}{n}$. На каждый такой заряд будет действовать сила (рис.7)

$$\Delta F = E\Delta Q = \frac{B_0Q}{2}\frac{R}{t_0n}.$$

По второму закону Ньютона модуль линейного ускорения любого элемента кольца равен

$$a = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{B_0Q}{2m}\frac{R}{t_0}.$$

Соответствующее угловое ускорение, равное

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{B_0Q}{2mt_0},$$

постоянно. Следовательно, угловая скорость вращения кольца равна

$$\omega = \varepsilon t_0 = \frac{B_0Q}{2m}.$$

Как видим, введенные неизвестные величины t_0 и R, которые нам были необходимы для решения, сократились.

Упражнения

1 (МГУ, мехмат, 1975). Катушка диаметром $d = 10$ см помещена в магнитное поле с индукцией $B = 1,256\cdot10^{-2}$ Тл так, что ее ось совпадает с направлением линий магнитной индукции. Катушка содержит $N = 500$ витков и имеет сопротивление $R = 10$ Ом. Найдите заряд, который пройдет через обмотку катушки, если магнитное поле равномерно упадет до нуля.

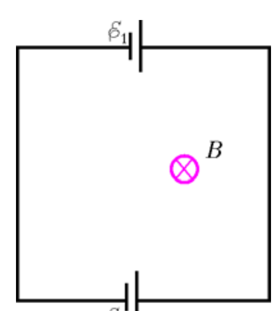

Рис. 8

2 (МГУ, мехмат, 1983). Из провода длиной $l = 2$ м, обладающего сопротивлением $R = 4$ Ом, спаян квадрат. В стороны квадрата включены источники с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 8$ В согласно схеме, приведенной на рисунке 8. Цепь помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости квадрата, направленное за чертеж и возрастающее во времени по закону $B = kt$, где $k = 16$ Тл/с. Найдите силу тока в цепи. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

3 (МГУ, мехмат, 1988). Из куска однородной проволоки длиной l и сопротивлением R спаяна фигура в виде кольца с хордой, равной диаметру кольца. Кольцо помещают в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости кольца, а модуль этого вектора меняется со временем по закону $B = kt$. Найдите выделяемую в проволоке мощность.

4 (МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 1996). В магнитном поле с индукцией, равной $B = 1$ Тл и направленной вертикально вниз, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длиной $l = 0{,}4$ м со скоростью $v = 5$ м/с (рис. 9). Концы рельсов присоединены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом. Какое количество теплоты выделится в стержне за время $t = 10$ с, если его сопротивление $R = 10$ Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.

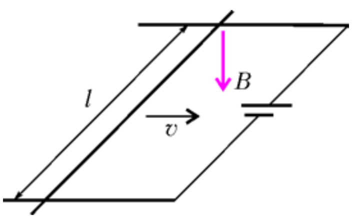

Рис. 9

5 (РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина). По П-образной рамке, наклоненной под углом 30° к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 2 мОм, индукция поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

6 (МИЭТ). Энергия магнитного поля катушки электромагнита с индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн равна $W = 5$ Дж. Определите величину ЭДС самоиндукции, возникающей к катушке при равномерном уменьшении силы тока за время $t = 0{,}1$ с.

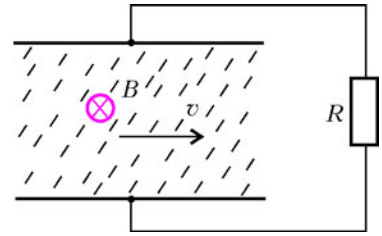

Рис. 10

7 (МФТИ, 1996). В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ, движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам (рис.10). Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией, равной B, направленной вдоль пластин и перпендикулярной скорости жидкости. Найдите полезную мощность, выделяющуюся в виде тепла на внешней нагрузке сопротивлением R.

8 (МФТИ, 2002). Металлический стержень AC одним концом (точка A) шарнирно закреплен на вертикальном диэлектрическом стержне AO (рис.11). Другой конец (точка C) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити OC длиной $l = 1$ м. Стержень AC вращается вокруг стрежня AO в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна $B = 10^{-2}$ Тл. Угловая скорость вращения стержня $\omega = 60$ с$^{-1}$. Определите разность потенциалов (по модулю) между точками A и C.

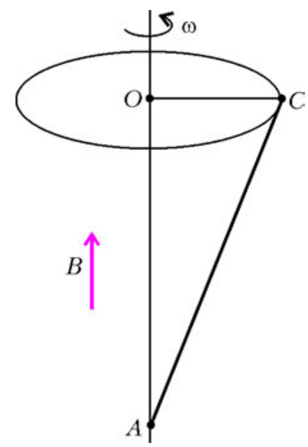

Рис. 11

Функциональные уравнения и неравенства

Г.ФАЛИН, А.ФАЛИН

Введение

В последние годы на вступительных экзаменах по математике в МГУ им. М.В.Ломоносова регулярно предлагаются задачи на решение уравнений, неравенств и систем, неизвестными в которых являются не числа, а функции. Задачи эти необычны как по внешней форме, так и по методам решения. Поэтому в настоящей статье мы решили на примерах реальных экзаменационных задач показать основные виды таких уравнений и основные методы их решения.

Некоторые задачи вступительных экзаменов формально не предполагают решения функциональных уравнений, но «простые» решения, которые публикуются после экзаменов в «официальных» сборниках, часто выглядят искусственно, в то время как более общий взгляд на задачу и использование относительно несложных понятий и методов теории функциональных уравнений позволяют дать очень естественное решение, показать взаимосвязь различных задач, повысить математическую культуру абитуриента.

Задачи на решение функциональных уравнений и неравенств полезно разобрать и при изучении общих свойств функций в классах с углубленным изучением математики.

Параметризуемые уравнения

Самыми простыми являются функциональные уравнения, в которых неизвестная функция однозначно описывается одним или несколькими числовыми параметрами (простейший и наиболее распространенный пример функции такого рода – это многочлен). В этом случае задача нахождения функции сводится к определению значений этих числовых параметров, т.е. к обычной школьной задаче (как правило, на решение систем уравнений). Рассмотрим в качестве примера следующую задачу, которая предлагалась в 2001 году на устном экзамене по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК).

Задача 1 (ВМК, устный экзамен, 2001). *Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая при всех x*