Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2026» или «Ф2033». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2027–М2030, М2033 предлагалась на XXVIII Турнире городов, задача М2031 предлагалась на II Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2026 – М2035, Ф2033–Ф2042

М2026. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ выбраны, соответственно, точки P, M, N, Q так, что $\angle MAN = 45°$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что площадь треугольника AFG равна сумме площадей треугольников FMP и GNQ.

В.Произволов

М2027. На доске написаны три натуральных числа x, y, z. Петя записывает на листке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет равным нулю. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на листке?

Е.Горский, С.Дориченко

М2028. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «верно ли, что этот человек хитрец?»).

а) Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?

б) Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

Б.Гинзбург, М.Гервер

М2029. Даны две бесконечные прогрессии, состоящие из положительных чисел: арифметическая и геометрическая, причем любое число, встречающееся в геометрической прогрессии, встречается также и в арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии – целое число.

Б.Френкин

М2030. Можно ли вписать правильный октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба?

Л.Радзивиловский

М2031. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность ω в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ω второй раз в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.Заславский

М2032. а) Существует ли такое натуральное n, что для любого натурального k хотя бы одно из чисел $n^k - 1$, $n^k + 1$ имеет вид a^b для некоторых натуральных a и $b > 1$?

б*) Назовем натуральное число *антипростым*, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Два натуральных числа назовем *близнецами*, если они отличаются на 2. Конечно или бесконечно множество пар антипростых чисел-близнецов?

В.Сендеров

М2033. У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?» Один из зрителей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

А.Шаповалов

М2034. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны, соответственно, точки X, Y, Z так, что треугольник XYZ подобен треугольнику ABC ($\angle X = \angle A$, $\angle Y = \angle B$). Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ равноудален от точек пересечения высот треугольников ABC и XYZ.

Н.Николов (Болгария)

М2035. а) На окружности расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на три группы подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

б*) На отрезке расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на n групп подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

М.Малкин, И.Богданов, Г.Челноков

Ф2033. По прямой дороге бежит кролик, его скорость постоянна и равна v = 2 м/с. Кролика замечает лиса – она находится в этот момент на расстоянии L = 40 м от дороги (кролик в этот момент также находится на расстоянии L от лисы). Лиса бросается в погоню, ее скорость равна по величине скорости кролика. На каком минимальном расстоянии от кролика лиса сможет оказаться через время t = 40 с после начала погони? Считать лису и кролика материальными точками.

З.Рафаилов

Ф2034. По гладкой горизонтальной поверхности подставки скользит маленькая гантелька, состоящая из очень тонкого легкого стерженька длиной 5 см и двух маленьких массивных шариков на концах (рис.1). Скорость гантельки направлена вдоль стержня и составляет 2 м/с. Соскользнув с края подставки, гантелька продолжает движение. Оцените число оборотов, которое она совершит, падая с высоты 30 м.

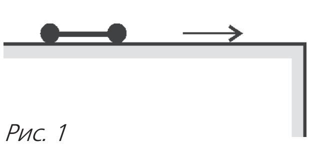


Рис. 1

А.Повторов

Ф2035. Проводится расчет броска камня через тонкую вертикальную стенку. Расчет показал, что при бросании под углом 30° к горизонту минимальная скорость составляет 100 м/с, а при броске под углом 60° – достаточно 40 м/с. Какой скорости может хватить, если разрешено подойти к стенке поближе? Бросок производят с поверхности земли.

З.Простов

Ф2036. На гладкой горизонтальной поверхности находится узкая коробка длиной L = 0,2 м и массой M = = 100 г, посредине коробки покоится маленький шарик массой m = 10 г. Коробке ударом придают скорость v = 10 см/с параллельно ее длинной стороне. Шарик может двигаться только вдоль коробки, ударяясь абсолютно упруго о ее торцы. Сколько ударов произойдет за первую минуту после начала движения коробки? Найдите смещение коробки за это время.

А.Шариков

Ф2037. В сосуде постоянного объема находится смесь гелия и кислорода. Смесь нагревают от 300 К до 400 К, при этом половина атомов гелия покидают сосуд через очень мелкие трещины в стенках, а давление газа остается прежним. Во сколько раз изменяется при этом плотность смеси? Моль кислорода имеет массу 32 г, моль гелия – 4 г.

Г.Азов

Ф2038. С порцией гелия производят циклический процесс – расширение газа при постоянном давлении, затем охлаждение газа при неизменном его объеме и, наконец, сжатие газа без подвода тепла снаружи до начального давления. Может ли термодинамический КПД такого цикла оказаться больше 50%?

А.Зильберман

Ф2039. Стрелочные вольтметры высокого класса точности имеют, как правило, очень низкое сопротивление, и включать их в цепь для измерения напряжения во многих случаях просто недопустимо – слишком сильно при этом изменится режим схемы (напряжение между исследуемыми точками при подключенном вольтметре станет совсем другим). Для измерения напряжений порядка 5 В предлагается использовать схему, состоящую из точного вольтметра V – предел измерений 10 В, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 0,2, т.е. погрешность не превосходит 0,2% от максимального значения шкалы, и микроамперметра A – ток полного отклонения 100 мкА, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 2,5, т.е. погрешность не превышает 2,5% от максимального значения его шкалы. К точкам $А$ и $Б$ схемы (рис.2) подключают измеряемое напряжение, между точками $В$ и $Г$ включают регулируемый источник напряжения – лабораторный блок питания, напряжение которого можно очень плавно изменять в широких пределах. При измерении напряжение источника плавно изменяют, добиваясь минимального тока через микроамперметр. За результат принимают показание вольтметра при «нулевом» токе через микроамперметр. Будем считать, что минимальный ток, уверенно фиксируемый микроамперметром, составляет 2 мкА. Определите погрешность измерений получившегося «вольтметра» и его сопротивление.

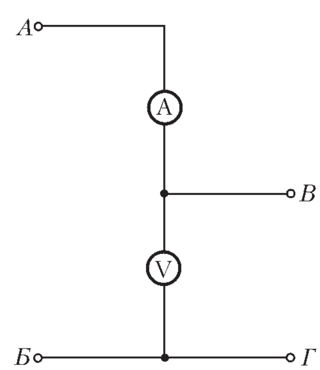


Рис. 2

З.Хитров

Ф2040. Параллельно включены катушки с индуктивностями 1 Гн и 2 Гн, резистор сопротивлением 100 Ом и конденсатор емкостью 100 мкФ. К цепи подключают внешний источник напряжения, и после нескольких переключений элементов в некоторый момент через катушки протекают равные по величине токи 0,2 А, а через резистор в этот момент течет ток 0,1 А. Затем внешний источник отключают, предоставляя параллельную цепь самой себе. Найдите полный заряд, который после этого протечет через резистор, а также полное количество теплоты, которое выделится в резисторе. Элементы цепи считать идеальными.

А.Старов

Ф2041. Источник переменного напряжения включен между точками A и $Б$ цепи (рис.3). При какой частоте источника амплитуда напряжения, измеренного между точками $В$ и $Г$, будет ровно в 10 раз больше амплитуды напряжения источника? Конденсаторы имеют емкости $C = 10$ мкФ, катушки – индуктивности $L = 1$ Гн.

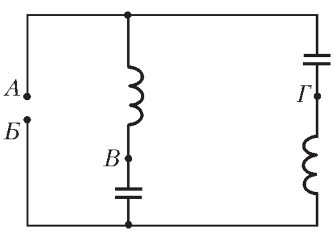


Рис. 3

Ф.Азов

Ф2042. На гладкой горизонтальной поверхности находится груз массой $M = 2$ кг, к его боковым стенкам приклеены две одинаковые пружины жесткостью $k = 100$ Н/м каждая (рис. 4). Одна из пружин прикреплена концом к стене, конец другой пружины мы перемещаем по горизонтали. Координата точки A при этом изменяется по закону $x = 0{,}02\cos 20t$ (в этой формуле время t измеряется в секундах, координата x – в метрах). Найдите амплитуду колебаний груза на этой частоте.

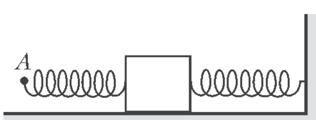


Рис. 4

М.Учителев

Решения задач М2006–М2010, Ф2018–Ф2027

М2006. *График линейной функции касается графика квадратичной функции $y = f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вниз на величину p. Найдите p.*

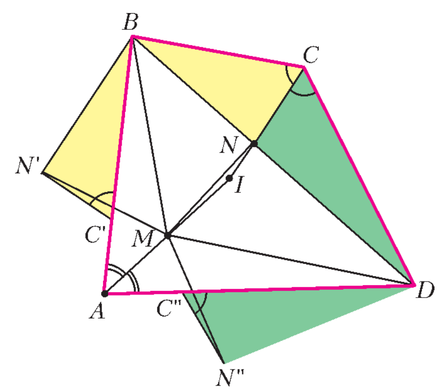
Ответ: $p = \frac{1}{4}$.

Пусть $y = l(x)$ – данная линейная функция. Тогда, из условия, $f(x) = l^2(x) + p$. Очевидно, $l(x)$ – непостоянная функция. Условие касания означает, что уравнение $l^2(x) + p = l(x)$ имеет единственное решение $x = x_0$. Но линейная функция, отличная от постоянной, каждое свое значение принимает ровно один раз. Значит, уравнение $l^2 + p = l$ должно иметь единственное решение $l = l_0$. Отсюда следует равенство нулю дискриминанта $D = 1 - 4p$, т.е. $p = \frac{1}{4}$.

Н.Агаханов

М2007. *Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. На отрезках AI и IC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC$.*

Очевидно, AI и CI – биссектрисы углов BAD и BCD соответственно. Пусть для определенности $AB \geq BC$.



Рассмотрим поворот треугольника BCN вокруг точки B, переводящий его в треугольник $BC'N'$, где C' лежит на луче BA. Также рассмотрим поворот треугольника DCN вокруг точки D, переводящий его в треугольник $DC''N''$, где C'' лежит на луче DA. Имеем $BN = BN'$, $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ABM + \angle CBN = \angle ABM + \angle C'BN' = \angle MBN'$. Отсюда следует, что треугольники MBN и MBN' равны, значит, $MN = MN'$.

Поскольку в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, $AC' = AB - BC = AD - DC = AC''$, поэтому точки C' и C'' симметричны относительно биссектрисы AM угла BAD. Далее, $C'N' = CN = C''N''$, $\angle BC'N' = \angle BCN = \angle DCN = \angle DC''N''$, значит, точки N' и N'' также симметричны относительно AM, отсюда $MN' = MN''$.

Таким образом, мы получили, что $MN = MN''$, следовательно, треугольники DMN и DMN'' равны по трем сторонам. Отсюда

$$\angle MDN = \angle MDN'' = \angle ADM + \angle C''DN'' =$$
$$= \angle ADM + \angle CDN = \angle ADC - \angle MDN,$$

т.е. $\angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC$, что и требовалось.

Вычислительное решение можно получить, применив многократно теорему синусов к треугольникам ABM, MBI и т.д.

О.Поройкова (ученица 11 кл.)

М2008. *Назовем делитель натурального числа n маленьким, если он не превосходит $n/10000$, и большим – в противном случае. Конечно ли множество*