Проинтегрируем обе части данного уравнения:

$$\int_{T_1}^{T_к} \frac{dT}{T} = -\frac{q}{c_в m_1 T_2} \int_0^{m_2} dm_2 ,$$

где $T_к$ – конечная температура воды в нагревателе к моменту, когда весь лед растает. После интегрирования получим

$$\ln \frac{T_к}{T_1} = -\frac{q m_2}{c_в m_1 T_2} ,$$

откуда найдем

$$T_к = T_1 \exp\left(-\frac{q m_2}{c_в m_1 T_2}\right) = 278,3 \text{ К} .$$

Теперь мы можем определить суммарное количество теплоты, полученное от нагревателя к моменту полного таяния льда:

$$Q_1 = c_в m_1 \left(T_1 - T_к\right) .$$

Суммарное количество теплоты, переданное при этом холодильнику, равно

$$Q_2 = q m_2 .$$

Следовательно, от тепловой машины можно получить максимальную работу

$$A_{max} = Q_1 - Q_2 = c_в m_1 \left(T_1 - T_к\right) - q m_2 = 61,5 \text{ кДж} .$$

**Упражнения**

**1.** Моль гелия, расширяясь в процессе *1–2* (рис.8), где его давление $p$ меняется прямо пропорционально его объему $V$, совершает работу $A$. Из состояния *2* гелий расширяется в процессе *2–3*, в котором его теплоемкость остается постоянной и равной $C = R/2$. Какую работу совершит гелий в процессе *2–3*, если температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны?

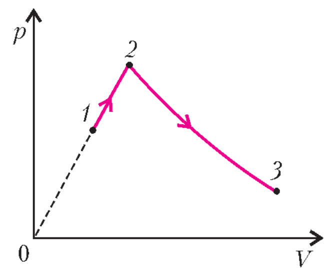

*Рис. 8*

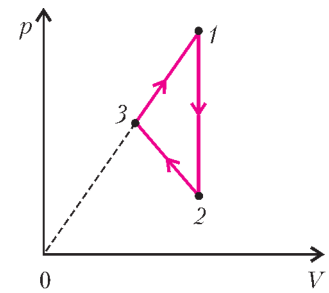

*Рис. 9*

**2.** Цикл для $\nu$ молей гелия состоит из двух участков линейной зависимости давления $p$ от объема $V$ и одной изохоры (рис.9). В изохорическом процессе *1–2* от газа было отведено количество теплоты $Q$ ($Q > 0$), и его температура уменьшилась в 4 раза. Температуры в состояниях *2* и *3* равны. Точки *1* и *3* на диаграмме $pV$ лежат на прямой, проходящей через начало координат. 1) Найдите температуру $T_1$ в точке *1*. 2) Найдите работу газа за цикл.

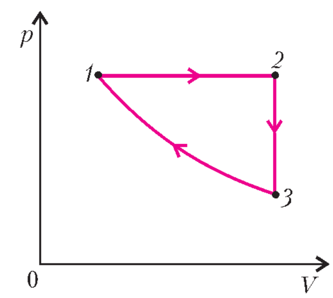

*Рис. 10*

**3.** Моль гелия совершает работу $A$ в замкнутом цикле, состоящем из изобары *1–2*, изохоры *2–3* и адиабатического процесса *3–1* (рис.10). Сколько тепла было подведено к газу в изобарическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур гелия в цикле равна $\Delta T$ ?

# Формулы геометрии помогают алгебре

**В.МИРОШИН**

В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ПРИВОДЯТСЯ ТРИ формулы, позволяющие находить:

а) расстояние между точками с координатами $x_1$ и $x_2$ на числовой прямой: это модуль их разности, т.е. $d = |x_2 - x_1|$;

б) расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ числовой плоскости: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

в) расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Довольно часто удается использовать эти формулы при решении алгебраических задач. Для этого, как правило, нужно истолковать данное алгебраическое выражение как расстояние или сумму расстояний до некоторых точек или прямых. С такими задачами мы и собираемся вас познакомить.

### Сумма расстояний

**Задача 1.** *Найдите минимум выражения*

$$f(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} .$$

**Решение.** Данное выражение представляет сумму расстояний от некоторой точки $M(x; y)$ координатной плоскости до двух точек: $K(3;4)$ и начала координат $O(0;0)$.

Используя известное «неравенство треугольника», получим, что сумма расстояний $MK + MO$ не может быть меньше расстояния $KO$, причем минимум достигается для любой точки $M$, лежащей на отрезке $KO$. Итак, $MK + MO \geq OK = 5$.

**Ответ**: 5.

*Замечание.* Для точек, лежащих на координатной оси, неравенство может быть записано в виде $|x - a| + |x - b| = |a - b| \Leftrightarrow (x - a)(x - b) \leq 0$.

**Задача 2** (МГУ, мехмат). *Найдите минимум выражения*

$$f(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x - y| .$$

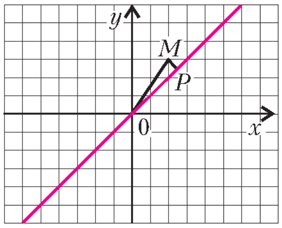


Рис. 1

**Решение.** Минимальное значение второго слагаемого достигается на прямой, заданной уравнением $y = x$. В этом случае второе слагаемое равно нулю. Осталось минимизировать первое слагаемое, которое есть расстояние от некоторой точки $(x;\ y)$ до точки $M(2;3)$ (рис.1).

Найдем на прямой $y = x$ точку, наименее удаленную от точки $M(2;3)$. Это будет основание $P$ перпендикуляра, проведенного из точки $M$ на прямую. И расстояние будет равно расстоянию от точки $M$ до прямой: $\frac{|2-3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Сумма двух слагаемых будет такой же.

Докажем, что найденное значение будет действительно наименьшим. Пусть $|x - y| = a,\ a > 0$. Имеем

$$|x-y| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x = a \\ y - x = -a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + a \\ y = x - a, \end{array}\right. \quad a > 0.$$

Данная совокупность задает пару прямых, параллельных прямой $y = x$, пересекающих ось ординат в точках $(0;a)$ и $(0;-a)$. В этом случае минимум первого слагаемого есть расстояние от точки $(2;3)$ до ближайшей из прямых $y = x + a$ или $y = x - a$. Это расстояние равно длине отрезка $MQ$ (рис. 2).

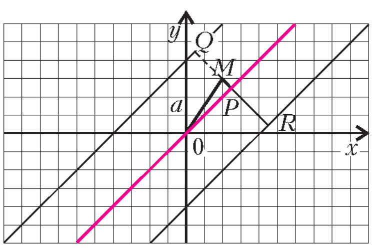


Рис. 2

Очевидно, что выполнено неравенство $a > MP + MQ$, откуда $MP < a - MQ < a + MQ$. Если же точка $Q$ лежит между точками $M$ и $P$, то в этом случае и вовсе $a > MP - MQ \Leftrightarrow MP < a + MQ$, что и требовалось доказать.

**Ответ**: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Задача 3** (МГУ, мехмат). *Найдите наименьшее значение выражения* $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x| + |y|$.

**Решение**. Решим эту задачу подобно предыдущей. Обозначим сначала $f(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x| + |y|$. Рассмотрим два последних слагаемых. Пусть $|x| + |y| = a,\ a \ge 0$.

Если $a = 0$, то

$$|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Осталось найти значение данного выражения:

$$f(0,0) = \sqrt{13}.$$

Если $a > 0$, то уравнение $|x| + |y| = a$ задает на координатной плоскости квадрат с вершинами в точках $(0;a)$, $(0;-a)$, $(a;0)$, $(-a;0)$. Найдем на указанном квадрате точку, наименее удаленную от точки $M(2;3)$.

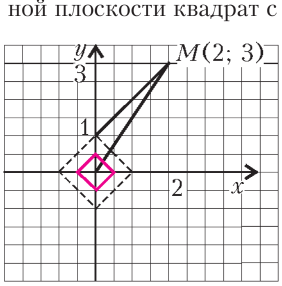


Рис. 3

Если $0 < a \le 1$, то такой точкой будет вершина квадрата $(0;a)$ (рис. 3). Но по неравенству треугольника сумма $f(x,y) = \sqrt{(2)^2 + (a-3)^2} + a$ в этом случае будет больше, чем расстояние от точки $M(2;3)$ до начала координат, т.е. больше $\sqrt{13}$.

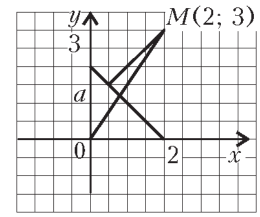


Рис. 4

Если $a > 1$, то ближайшей к точке $M(2;3)$ будет точка, являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;3)$ на отрезок прямой $x + y = a$, содержащий сторону квадрата (рис.4). В этом случае имеем

$$f(a) = \frac{|2+3-a|}{\sqrt{2}} + a = \frac{|5-a|}{\sqrt{2}} + a.$$

Если $1 < a \le 5$, то

$$f(a) = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{\sqrt{2}} > 1 + 2\sqrt{2} > \sqrt{13}.$$

Если $a > 5$, то

$$f(a) = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{\sqrt{2}} > 5 > \sqrt{13}.$$

Таким образом, $\min\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x| + |y|\right) = \sqrt{13}$.

**Ответ**: $\sqrt{13}$.

**Задача 4** (XIV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»). *Найдите наименьшее значение функции* $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$.

**Решение.** Запишем функцию в виде $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + 4} + \sqrt{(x-7)^2 + 9}$. Дадим геометрическую трактовку полученному выражению. Правая часть есть сумма расстояний от точки $(x;\ 0)$ до точек $(3;\ 2)$ и $(7;-3)$. Точка $(x;\ 0)$ лежит на оси абсцисс, а две другие точки – в разных полуплоскостях от нее. Минимум суммы расстояний, как легко видеть, будет достигаться тогда, когда точка $(x;\ 0)$ будет лежать на отрезке, соединяющем точки $(3;\ 2)$ и $(7;-3)$, и будет равен длине этого отрезка.

Итак, $\min f(x) = \sqrt{(7-3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{41}$.

**Ответ**: $\sqrt{41}$.

**Задача 5** (РГГУ). *Найдите наименьшее значение функции*

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 10x + 13}.$$

**Решение.** Вид функции свидетельствует о том, что «лобовое» решение с помощью производной приведет к вычислительным трудностям. На мысль использовать формулу для расстояния наводят одинаковые старшие коэффициенты квадратных трехчленов, а также вид первого из них.

Преобразуем подкоренные выражения, представив их в «узнаваемом» виде:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (x+1)^2} + \sqrt{x^2 + (x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (x-3)^2}.$$

Осталось заметить, что правая часть равенства есть сумма расстояний от точки $M(x;x)$ до четырех точек

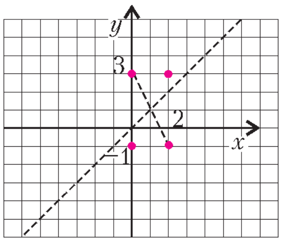

Рис. 5

$(0;-1)$, $(2;-1)$, $(0;3)$, $(2;3)$ координатной плоскости (рис.5).

Указанные точки – вершины прямоугольника, а точка, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна, – это точка пересечения его диагоналей. Сумма расстояний от любой другой точки плоскости до вершин прямоугольника будет больше. Это следует из неравенства треугольника. Осталось заметить, что прямая $y = x$ проходит через точку пересечения диагоналей, имеющую координаты $(1;1)$. Следовательно, $\min f(x) = f(1) = 4\sqrt{5}$.

**Ответ**: $4\sqrt{5}$.

**Задача 6.** *Решите систему*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-4)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2| = 2\sqrt{5}, \\ x \ge 2. \end{cases}$$

**Решение**. Пусть $(x;y)$ – координаты некоторой точки плоскости. Тогда уравнение системы – это сумма расстояний от этой точки до точки $M(0;4)$ и до прямой, заданной уравнением $x-2y-2=0$. Заметим еще, что правая часть уравнения равна расстоянию от точки $M$ до указанной прямой. Множество точек плоскости, обладающих данным свойством, – перпендикуляр, опущенный из точки $M$ на прямую (рис.6). Очевидно, что для любой точки $N$, не принадлежащей этому перпендикуляру, сумма расстояний до точки $M$ и до прямой будет больше.

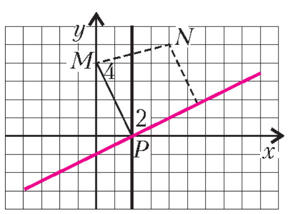

Рис. 6

Проведем перпендикуляр $MP$. Точка $P$ – основание перпендикуляра – будет иметь координаты $(2;0)$. Учитывая неравенство системы, получим, что только ее координаты будут являться искомыми решениями всей системы.

**Ответ**: $(2;0)$.

**Задача 7** (МГУ, ВМК). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104} = 2\sqrt{29}, \\ (x-7)^2+(y-5)^2 = 16. \end{cases}$$

**Решение**. Представляя подкоренные выражения в виде суммы двух квадратов, получим

$$\sqrt{(x-8)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-10)^2} = 2\sqrt{29}.$$

Левая часть равенства есть сумма расстояний от точки $M(x;y)$ координатной плоскости до точек с координатами $(8;6)$ и $(-2;10)$. Правая часть равенства – расстояние между этими точками.

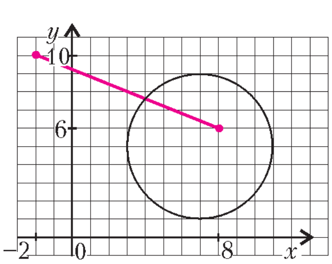

Рис. 7

Геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек есть расстояние между этими точками, – это отрезок, соединяющий данные точки (рис.7). Поэтому первое уравнение системы задает отрезок, соединяющий точки $(8;6)$ и $(-2;10)$. Составим уравнение этой прямой:

$$\frac{x+2}{8+2} = \frac{y-10}{6-10} \Leftrightarrow \frac{1}{5}(x+2) = -\frac{1}{2}(y-10) \Leftrightarrow 5y+2x-46 = 0.$$

Найдем точку пересечения этой прямой с окружностью, заданной вторым уравнением, принадлежащую указанному отрезку. Запишем систему

$$\begin{cases} 2x+5y-46 = 0, \\ (x-7)^2+(y-5)^2 = 16, \\ 6 \le y \le 10. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения переменную $x = 23-\frac{5}{2}y$ и подставив во второе уравнение, получим

$$\left(16-\frac{5}{2}y\right)^2+(y-5)^2 = $$

$$= 16 \Leftrightarrow \frac{29}{4}y^2-90y+265 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{180-2\sqrt{415}}{29} \\ y = \dfrac{180+2\sqrt{415}}{29}. \end{array}\right.$$

Учитывая ограничения системы, получим, что $y = \dfrac{180+2\sqrt{415}}{29}$. Теперь найдем абсциссу точки пересечения: $x = 23-\dfrac{5\left(90+\sqrt{415}\right)}{29} = \dfrac{217-5\sqrt{415}}{29}$.

**Ответ**: $\left(\dfrac{217-5\sqrt{415}}{29};\dfrac{180+2\sqrt{415}}{29}\right)$.

### Разность расстояний

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых присутствовали суммы расстояний. Но есть задачи, в которых рассматривается и разность расстояний между точками.

Очень часто при решении алгебраических уравнений можно встретить уравнения, содержащие следующие комбинации:

1) $|x-a|-|x-b| = b-a, \quad b > a$;
2) $|x-a|-|x-b| = a-b, \quad b > a$;
3) $|x-a|-|x-b| = |b-a|, \quad b > a$.

В этих случаях разность расстояний от некоторой точки $x$ числовой прямой до точек $a$ и $b$ в указанном порядке либо равна расстоянию между ними, либо противоположна ему.

Имеем

1) $|x-a|-|x-b| = b-a \Leftrightarrow x \ge b$;

2) $|x-a|-|x-b| = a-b \Leftrightarrow x \le a$;

3) $|x-a|-|x-b| = |b-a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge b \\ x \le a \end{array}\right. \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \ge 0$.

В первых двух случаях геометрическое место точек – луч прямой, в третьем – два луча.

В случае точек на плоскости картина не меняется.

**Задача 8** (ГФА). *Среди решений неравенства*

$$\sqrt{x^2+y^2} \ge 13+\sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}$$

*найдите те, при которых сумма $x+y$ принимает наименьшее значение.*

**Решение**. Запишем неравенство следующим образом:

$$\sqrt{x^2+y^2}-13 \ge \sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}.$$

Заметим, что $13 = \sqrt{5^2+12^2}$. Тогда левая часть неравенства есть разность расстояний от начала координат до некоторой точки $M(x;y)$ и до точки $(5;12)$. Причем это расстояние не меньше расстояния между точкой $M$ и точкой $(5;12)$.

Найдем ГМТ, заданное неравенством. Имеем

$$\sqrt{x^2+y^2}-13\ge\sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-13\ge 0,\\ x^2+y^2-26\sqrt{x^2+y^2}+169\ge x^2-10x+y^2-24y+169\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\ge 169,\\ 5x+12y\ge 0,\\ 25x^2+120xy+144y^2\ge 169x^2+169y^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\ge 169,\\ y\ge-\dfrac{5}{12}x,\\ 144x^2-120xy+25y^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\ge 169,\\ y\ge-\dfrac{5}{12}x,\\ (12x-5y)^2\le 0.\end{cases}$$

Последнее неравенство системы может быть верным только тогда, когда выражение, стоящее в его левой части, равно нулю. Получим

$$\sqrt{x^2+y^2}-13\ge\sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\ge 169,\\ y\ge-\dfrac{5}{12}x,\\ 12x-5y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\ge 169,\\ y\ge-\dfrac{5}{12}x,\\ y=\dfrac{12}{5}x.\end{cases}$$

Таким образом, геометрическое место точек, заданных неравенством, – это луч прямой $y=\frac{12}{5}x$, лежащий вне внутренней части круга радиуса 13 с центром в начале координат, а также в полуплоскости, заданной неравенством $y\ge-\frac{5}{12}x$.

Прямая $x+y=c$ пересекает луч при $c\ge 17$ (рис.8), так что наименьшее значение $c$, при котором прямая указанного вида будет иметь общую точку с лучом, будет равно 17.

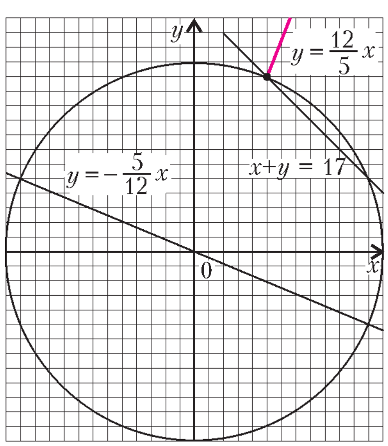


Рис. 8

**Ответ**: (5; 12).

**Задача 9.** *Найдите значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+\left(y-a^2\right)^2}=|a|\sqrt{1+a^2},\\ (x-4)^2+y^2=1\end{cases}$$

*имеет единственное решение.*

**Решение**. Записав первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+\left(y-a^2\right)^2}=\sqrt{a^2+a^4},$$

видим, что разность расстояний от точки $M(x;y)$ до начала координат, точки $O$, и точки $A\left(a;a^2\right)$ равна $AO$, отсюда следует, что точка $(x;y)$ лежит на луче прямой $y=ax$ с началом в точке $A$.

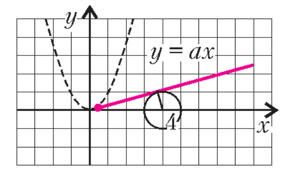


Рис. 9

Так как система описывает пересечение окружности и луча, начало которого лежит вне окружности, то система будет иметь единственное решение только в том случае, когда указанный луч прямой $y=ax$ будет касаться окружности (рис.9). Имеем

$$a=\operatorname{tg}\alpha,\text{ где }\sin\alpha=\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$a=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{4^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

**Ответ**: $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

### Сумма расстояний до вершин треугольника

**Задача 10.** *Найдите наименьшее значение выражения*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}.$$

**Решение.** В этой задаче нужно найти минимум суммы расстояний от точки $(x;y)$ до вершин треугольника с координатами $(0;0)$, $(3;0)$, $(-5;3)$ (рис. 10). Мы имеем дело с частным случаем одной из наиболее известных геометрических задач на нахождение наибольших и наименьших значений.

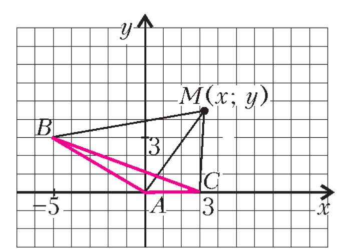


Рис. 10

Общая формулировка этой задачи такова: *Дан треугольник ABC. Найти в его плоскости точку P, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.*

Такая точка называется *точкой Торричелли.*

**Теорема**. *Если больший угол треугольника меньше* $120°$, *то точка Торричелли – точка, лежащая внутри треугольника, из которой все его стороны видны под углом* $120°$. *Если больший угол треугольника не менее* $120°$, *то точка Торричелли – вершина тупого угла.*

Существует несколько способов доказательства данной теоремы. Приведем то, которое не использует методов исследования функций.

**Лемма 1**. *Точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, не может лежать вне этого треугольника.*

**Доказательство**. Пусть некоторая точка $M$, обладающая указанными свойствами, лежит вне треугольника (рис. 11). Соединим ее с вершиной $B$ треугольника. Точку пересечения отрезков $AC$ и $BM$ обозначим $M_1$. Очевидно, что выполнено неравенство

$$MA+MB+MC>$$
$$>M_1A+M_1B+M_1C.$$

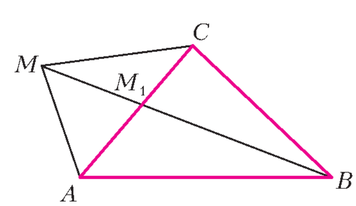


Рис. 11

Лемма доказана.

Таким образом, точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, лежит либо в плоскости треугольника, либо на одной из его сторон.

**Лемма 2**. *Если наибольший угол треугольника менее $120°$, то искомая точка – точка, лежащая внутри треугольника, из которой все вершины треугольника видны под углом $120°$.*

**Доказательство**. Выберем внутри треугольника $ABC$ произвольную точку $P$ и найдем сумму расстояний от нее до вершин треугольника, т.е. $PA + PB + PC$ (рис.12). Повернем треугольник вокруг, например, вершины $B$ на угол $60°$. При этом вершина $A$ перейдет в точку $A_1$, вершина $C$, соответственно, в точку $C_1$, а сама точка $P$ – в точку $P_1$. Треугольник $PBP_1$ – равносторонний, и поэтому $PB = P_1B = PP_1$. Получим $PA + PB + PC = P_1A_1 + P_1P + PC$. Равенство длин отрезков $PA = P_1A_1$ следует из того, что поворот – это движение плоскости. По свойству ломаной получаем, что сумма расстояний будет наименьшей, если точка $P$ будет лежать на отрезке $A_1C$. Аналогично рассуждая, получим, что искомая точка должна лежать и на отрезке $BC_1$. Таким образом, точка $P$ – пересечение отрезков $A_1C$ и $BC_1$.

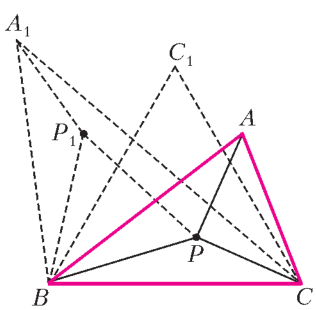

Рис. 12

Итак, если точка $P$ лежит на прямой $A_1C$, то $\angle BP_1P + \angle A_1P_1B = 180°$, откуда следует, что $\angle A_1P_1B = \angle APB = 120°$. Аналогично, $\angle APC = 120°$. Так как наибольший угол треугольника меньше $120°$, то точка $P$ лежит внутри треугольника.

Лемма доказана.

**Лемма 3**. *Если больший угол треугольника не менее $120°$, то точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, – вершина тупого угла.*

**Доказательство**. Пусть $\angle BAC > 120°$ и $P$ – произвольная точка внутри треугольника (рис.13). Построим равносторонний треугольник $PAP_1$. Рассуждая как в предыдущем случае, получим, что $\Delta APB = \Delta AP_1B_1$, $PA + PB + PC = PC + PP_1 + PB_1$. Так как $PA + PB + PC \geq AC + AB_1$ и $AB = AB_1$, то $PA + PB + PC \geq AB + AC$.

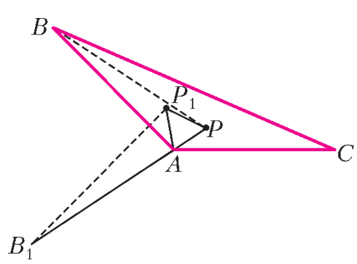

Рис. 13

Лемма доказана.

Доказательство лемм завершает доказательство теоремы.

Решим поставленную выше задачу: найдем минимум суммы расстояний от точки $(x;y)$ до вершин треугольника с координатами $(0;0)$, $(3;0)$, $(-5;3)$.

**Решение**. Вычислим косинус большего угла треугольника:

$$\cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{34+9-73}{6\sqrt{34}} = -\frac{5}{\sqrt{34}} < -\frac{1}{2}.$$

Тупой угол данного треугольника более $120°$, поэтому точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, – вершина тупого угла. Искомая сумма равна $\sqrt{34} + 3$.

**Ответ**: $\sqrt{34} + 3$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1**. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + 0{,}2\left|4y - 3x + 12\right| = 5,\\ 4x - y \leq 0.\end{cases}$$

**2**. Решите систему

$$\begin{cases}\left|y - 2x\right| + \left|\dfrac{\left|x-2\right|}{x-2} - 1\right| = 0,\\ \sqrt{x^2 + (y-10)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} \leq 10.\end{cases}$$

**3**. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + 0{,}2\left|4y - 3x + 12\right| = 5,\\ x^2 + (y+3)^2 \leq 25.\end{cases}$$

**4**. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \geq 2\sqrt{5},\\ \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \leq 2\sqrt{13}.\end{cases}$$

**5**. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \geq 5,\\ \left|y - x - 2\right| + \left|(x-4)(x-8)\right| + (x-4)(x-8) = 0.\end{cases}$$

**6**. Найдите наибольшее значение $y$, для которого существуют значения $x$ и $z$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases}yz + x\sqrt{1 - z^2} = 1,\\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-0{,}6)^2 + (y+0{,}8)^2} + 1.\end{cases}$$

**7**. Найдите наименьшее значение $x$, для которого существуют значения $y$ и $z$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases}yz + x\sqrt{1 - z^2} = 1,\\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-0{,}6)^2 + (y-0{,}8)^2} + 1.\end{cases}$$

**8**. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + \left(y - a^2\right)^2} = \left|a\right|\sqrt{1 + a^2},\\ (x-10)^2 + y^2 = 36\end{cases}$$

имеет решение.


*Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:*

*Редакция журнала «Квант»*
kvant.info

*Московский центр непрерывного математического образования*
kvant.mccme.ru

*Московский детский клуб «Компьютер»*
math.child.ru

*Костромской центр дополнительного образования «Эврика»*
ceemat.ru