Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1981» или «Ф1988». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1981 и М1984 предлагались на 25-м Уральском турнире юных математиков, задача М1983 предлагалась на 26-м Турнире городов, задача М1989 – на 5-м Турнире математических боев памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М1981 – М1990, Ф1988 – Ф1997

М1981. В клетках таблицы 11×11 расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша – произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

С.Берлов

М1982. На экране написано натуральное число. Каждую секунду к написанному в данный момент числу прибавляется произведение цифр его десятичной записи. Докажите, что начиная с некоторого момента число на экране не будет изменяться.

А.Белов

М1983. Сколько существует разных способов разбить число 2006 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

А.Толпыго

М1984. На плоскости отмечены 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется не более 1000000 равнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.

С.Берлов, И.Богданов

М1985. Четырехугольник $ABCD$, у которого нет параллельных сторон, описан около окружности с центром O. Середины сторон AB, BC, CD, DA обозначены K, L, M, N соответственно. Докажите, что если точки O, K, M лежат на одной прямой, то точки O, L, N также лежат на одной прямой.

А.Заславский, М.Исаев, Д.Цветов

М1986. Докажите, что для $2n$ действительных чисел $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$ выполняется неравенство

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right)^2 \ge$$
$$\ge 4n\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right).$$

П.Самовол, М.Аппельбаум

М1987. Даны икосаэдр и додекаэдр с равными расстояниями от центра до ребра. У какого из многогранников больше объем?

А.Заславский

М1988. Для каких натуральных чисел a найдутся такие целые неотрицательные числа k, m, n, что если выписать друг за другом числа a^n и a^m в десятичной записи, то получится десятичная запись числа a^k?

В.Сендеров

М1989. В королевстве N городов и r дорог, каждая дорога соединяет два города, и из любого города можно добраться до любого по дорогам. В городах живут гонцы. В начале каждого года один из городов отправляет во все соседние (т.е. соединенные с ним дорогами) города по гонцу (в таком городе должно быть достаточное для этого количество гонцов). Если в каждом городе гонцов недостаточно, то движения гонцов прекращаются.

а) Пусть через несколько лет движение гонцов прекратилось. Докажите, что если города, отправляющие гонцов, выбирать по-другому, то движение гонцов все равно прекратится; при этом конечное количество гонцов в каждом городе не зависит от выбора городов.
б*) Пусть через несколько лет в каждом городе оказалось столько же гонцов, сколько было изначально. Какое наименьшее количество гонцов может быть в королевстве?

И.Богданов

М1990*. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны BC за точку C выбирается точка X. Окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки X.

Л.Емельянов

Ф1988. Кролик бежит по прямой с постоянной скоростью v_1, за ним по плоскости гонится лиса. Скорость лисы v_2 постоянна по величине и все время направлена в ту точку, где находится в данный момент кролик. В некоторый момент расстояние между участниками забега составляет L, а угол между векторами их скоростей равен α. Найдите ускорение лисы в этот момент.

А.Лисов

Ф1989. В системе на рисунке 1 ось верхнего блока закреплена, а сам этот блок склеен из двух блоков разных радиусов – один из радиусов ровно вдвое больше другого. Радиусы подвижных блоков подобраны так, что свисающие концы нити вертикальны. Масса маленького груза справа наверху равна M; на нити, намотанной на малый диаметр верхнего блока, закреплен груз массой $3M$; масса нижнего груза $2M$. Систему вначале удерживают, затем отпускают, и начинается движение. Найдите ускорения подвижных блоков. Во сколько раз отличаются угловые ускорения верхнего (двойного) и самого нижнего блоков?

А.Зильберман

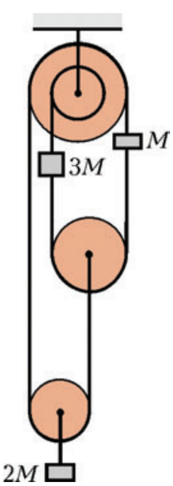


Рис. 1

Ф1990. На тонкой легкой нити к потолку подвешен маленький шарик массой M; период малых колебаний получившегося маятника равен T_0. Шарик отводят в сторону и толчком придают ему начальную скорость – такую, что он описывает окружность, лежащую в горизонтальной плоскости. Каким может быть время одного оборота шарика, если нить выдерживает натяжение не более $10\,Mg$?

П.Шаров

Ф1991. В компьютерной модели по дну квадратной коробки площадью 1 м^2 скользят две одинаковые шайбы радиусом 1 см. Скорости шайб по величине все время равны 1 м/с, а направление скоростей меняется случайным образом при столкновениях шайб со стенками коробки и между собой. Оцените, за какое время произойдет 1000 ударов между шайбами. Сколько раз за это время шайбы ударятся о все стенки коробки?

А.Ударов

Ф1992. Цикл Карно *1–2–3–4–1* (рис.2), проводимый с порцией идеального газа, имеет термодинамический КПД η_0. Цикл разделили на два – первый *1–2–4–1* и второй *4–2–3–4* (процесс *4–2* идет при повышении давления и объема газа, и зависимость давления от объема на этом участке линейная). Известен термодинамический КПД первого цикла (*1–2–4–1*), он равен η_1. Найдите аналогичный КПД η_2 второго цикла.

Ц.Карнов

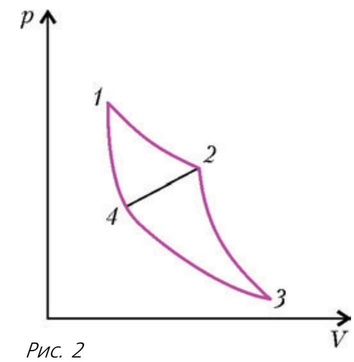


Рис. 2

Ф1993. Из очень тонкой проволоки сделали окружность, припаяли диаметр из такой же проволоки и еще один диаметр – перпендикулярно первому. Середины «диаметральных» проволочек соединили между собой. Один из выводов омметра присоединили к произвольной точке окружности, другой – к диаметрально противоположной ее точке. Во сколько раз отличаются максимальное и минимальное значения показаний прибора?

О.Простов

Ф1994. Параллельные проводящие рельсы расположены горизонтально на расстоянии d друг от друга и помещены в однородное магнитное поле, вектор индукции которого $\vec{B}_0$ направлен перпендикулярно их плоскости. Рельсы замкнуты резистором большого сопротивления R. Вдали от резистора на рельсах лежит массивный проводящий стержень, он составляет угол 45° с рельсами. С какой силой нужно действовать на стержень в горизонтальном направлении, чтобы он скользил вдоль рельсов поступательно с постоянной скоростью v_0?

З.Рафаилов

Ф1995. Параллельно друг другу подключены две катушки, индуктивности которых 1 Гн и 2 Гн, и конденсатор емкостью 100 мкФ. Конденсатор в данный момент заряжен до напряжения 200 В, а через катушки текут одинаковые (и одинаково направленные) токи по 0,1 А. Найдите максимальный ток через катушку индуктивностью 1 Гн. Оцените, через какое время напряжение конденсатора изменит знак на противоположный (можно было бы посчитать и точно, но расчет получился бы довольно громоздким). Элементы цепи считайте идеальными.

Р.Александров

Ф1996. Конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L соединены друг с другом, и в получившемся контуре происходят колебания. В тот момент, когда напряжение конденсатора составляло U_1, а через катушку тек ток I_1, параллельно контуру подключили резистор сопротивлением R. Какое количество теплоты выделится в резисторе? Какой заряд протечет через катушку, начиная с этого момента?

А.Зильберман

Ф1997. К точка A и $Б$ схемы, изображенной на рисунке 3, подключают источник переменного напряжения 36 В, 50 Гц. Что покажет вольтметр с большим внутренним сопротивлением, если включить его между точками $Б$ и $В$? Конденсаторы в схеме имеют емкости, например, 1 мкФ. Диоды можно считать идеальными. Придумайте также хорошее название для этой схемы.

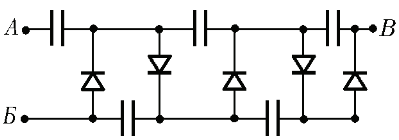


Рис. 3

У.Множителев

Решения задач М1961 – М1965, Ф1973 – Ф1982

М1961. *В параллелограмме $ABCD$ нашлась точка Q такая, что $\angle AQB + \angle CQD = 180°$. Докажите равенства углов: $\angle QBA = \angle QDA$ и $\angle QAD = \angle QCD$ (рис. 1).*

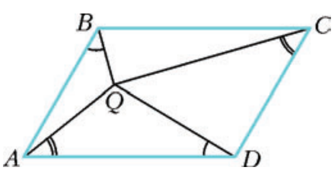


Рис. 1

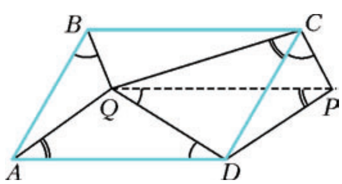


Рис. 2

Треугольник ABQ параллельно перенесем на вектор $\overline{BC}$, и новое положение точки Q обозначим через P (рис. 2). Ввиду условия задачи, около четырехугольника $QCPD$ можно описать окружность. Но тогда

$$\angle DCP (= \angle QBA) = \angle PQD = \angle QDA,$$

а также

$$\angle QCD = \angle QPD = \angle QAD,$$

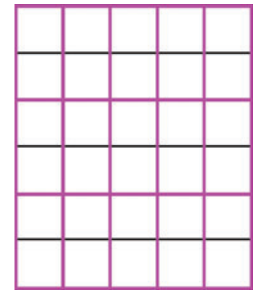
т.е. утверждение доказано.

В.Произволов

М1962. *Клетчатый прямоугольник полностью покрыт костями домино (каждая кость покрывает две соседние клетки). Назовем покрытие оригинальным, если для любого другого покрытия положение хотя бы одной кости совпадает с положением какой-либо кости оригинального покрытия. Для каких прямоугольников существует оригинальное покрытие?*

Ответ: оригинальное покрытие имеют те и только те прямоугольники, у которых вдоль одной стороны размещается четное число клеток, а вдоль другой – нечетное (иными словами – это все прямоугольники размером $2m \times (2n-1)$ клеток, где m и n – натуральные числа).

Сначала докажем, что для таких прямоугольников действительно имеется оригинальное покрытие. Для этого просто опишем такое покрытие. Оно очень простое: надо все кости расположить так, чтобы длинная их сторона была параллельна четной стороне прямоугольника (на рисунке дан пример оригинального покрытия прямоугольника 6×5). Чтобы убедиться, что это покрытие в самом деле оригинальное, расположим прямоугольник так, чтобы нечетные стороны были горизонтальны (как на рисунке). Рассмотрим любое другое покрытие этого прямоугольника костями домино и выделим кости, которые примыкают к нижней стороне прямоугольника. Так как эта сторона – нечетная, то хотя бы одна кость непременно будет расположена вертикально. Но тогда она совпадет с какой-то из костей оригинального покрытия, примыкающей к нижней стороне прямоугольника. Таким образом, указанное покрытие и впрямь оригинальное.



Осталось доказать, что если обе стороны прямоугольника – четные, то оригинального покрытия не существует. Иначе говоря, для любого покрытия можно указать другое покрытие – такое, что ни одна его кость не совпадет ни с одной костью исходного покрытия. Пусть прямоугольник с четными сторонами покрыт каким-то образом костями домино. Мысленно разобьем его на квадраты 2×2 (так как обе стороны четные, то это возможно). А теперь каждый такой квадрат покроем двумя костями. Это можно сделать двумя способами. Докажем, что хотя бы для одного из этих способов положение каждой из костей *не совпадет* ни с одной из костей исходного покрытия. Рассуждаем «от противного». Допустим, это не так и для любого из двух возможных расположений двух костей в квадрате 2×2 хотя бы одна из костей совпадет с какой-то костью исходного покрытия. Сориентируем квадрат так, чтобы одна из его сторон была горизонтальна, другая – вертикальна. Уложим на него две кости для начала *горизонтально.* Так как в исходном покрытии, согласно предположению, хотя бы одна кость совпадает с какой-то из этих двух костей, то можно сделать вывод: в исходном покрытии имеется кость, расположенная в этом квадрате *горизонтально.* Теперь уложим на тот же квадрат две кости по-иному – *вертикально.* Тогда, согласно тому же предположению, в исходном покрытии имеется кость, расположенная в этом квадрате *вертикально.* Таким образом, в одном и том же квадрате 2×2 исходного покрытия есть кость, расположенная вертикально, и есть кость, расположенная горизонтально. Но это, очевидно, невозможно. Противоречие!

Итак, для любого исходного покрытия мы можем разбить прямоугольник с четными сторонами на квадраты 2×2, а затем в каждом таком квадрате так уложить две кости, что ни одна из них не совпадет ни с одной из костей исходного покрытия. Отсюда следует, что оригинального покрытия не существует.

И.Акулич

М1963. *Натуральные числа x, y, z ($x > 2$, $y > 1$) удовлетворяют равенству $x^y + 1 = z^2$. Докажите, что число x имеет не менее 8 различных натуральных делителей.*