Национальный фонд подготовки кадров (НФПК)
Проект «Информатизация системы образования» (ИСО)

Конкурс на разработку
информационных источников сложной структуры (ИИСС)

Методика работы с ИИСС «Среда верификации конструктивных гипотез и решений логически сложных математических задач» Задачник и редакторы задач по основам математического анализа для 11 класса

Москва
2008

Содержание

1. Методические замечания по работе с системой ученика

Рассмотрим пример, демонстрирующий различные возможности системы для поддержки диалога в процессе построения решений задач, требующих построения логически сложных ответов.

При каких условиях уравнение

$$9^x + b3^x + c = 0 \tag{1.1}$$

не имеет корней?

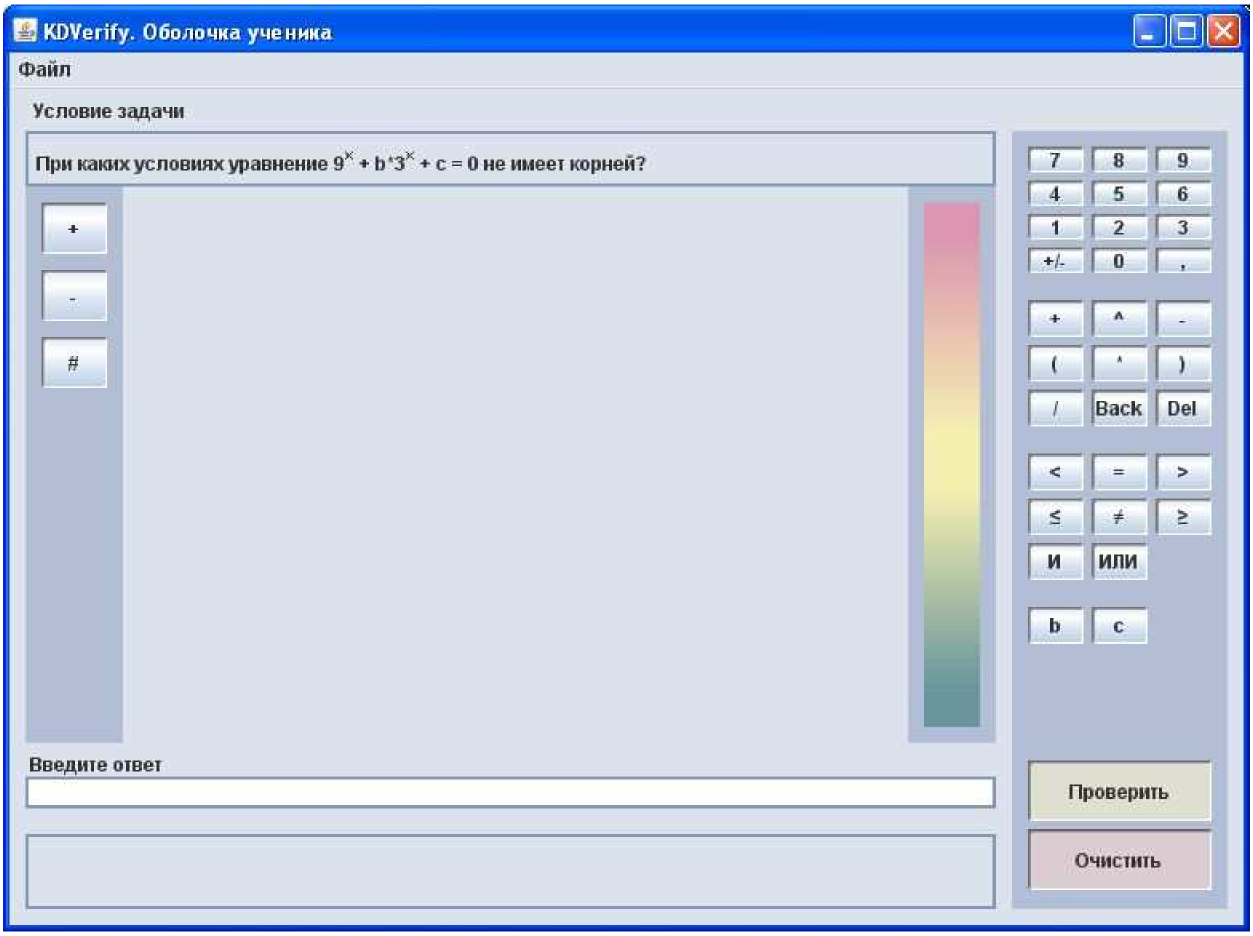

Рис. 1

На рис. 1 показано исходное состояние системы ученика после выбора и загрузки задачи.

- **Первая попытка**. Ученик вводит предикат

$$c < 0.$$

Реакция системы (см. рис. 2): „*В Вашем ответе есть ошибка: приведённый пример удовлетворяет введённому условию, но не удовлетворяет условию задачи*“.

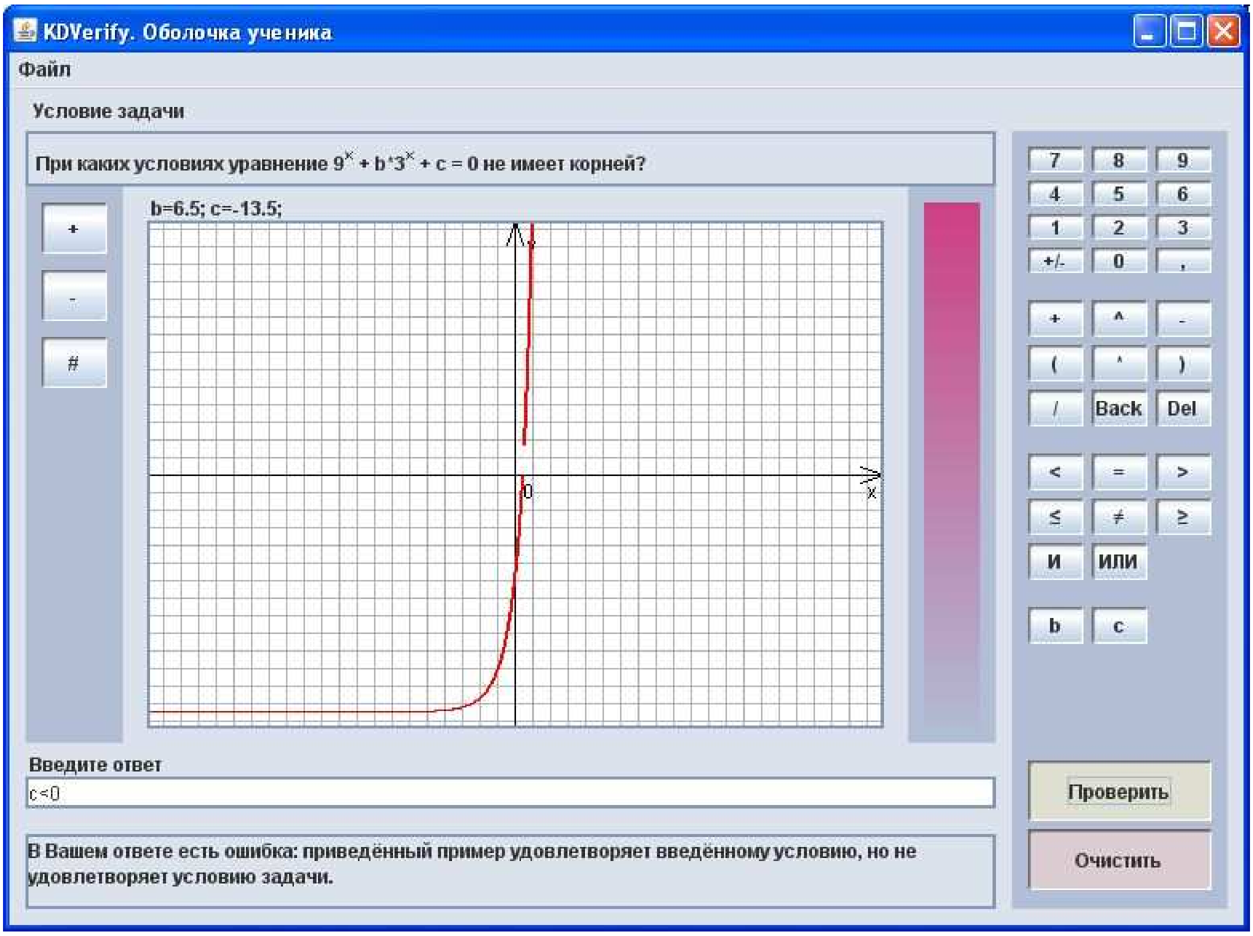

Рис. 2

Красный цвет индикатора означает ошибочный ответ. При этом в графическом окне (красным цветом) показан контрприрмер для данного предиката, а над окном указан соответствующий набор параметров из базы. Действительно, параметры $b = 6.5$ и $c = -13.5$ удовлетворяют введенному предикату, но решение уравнения существет, что визуально видно на картинке.

• **Вторая попытка**. Ученик понимает, что если сделать замену переменной

$$y = 3^x, \tag{1.2}$$

то исходное уравнение преобразуется к виду:

$$y^2 + by + c = 0, \tag{1.3}$$

т. е. к хорошо знакомому ему частному случаю квадратного трехчлена. Основную роль в разрешимости квадратного уравнения (1.3) играет значение его дискриминанта (D). Ученик вводит новый предикат

$$D = b^2 - 4c < 0.$$

Реакция системы (см. рис. 3): *„В Вашем ответе есть ошибка: приведённый пример удовлетворяет условию задачи, но не описывается введённым условием“.*

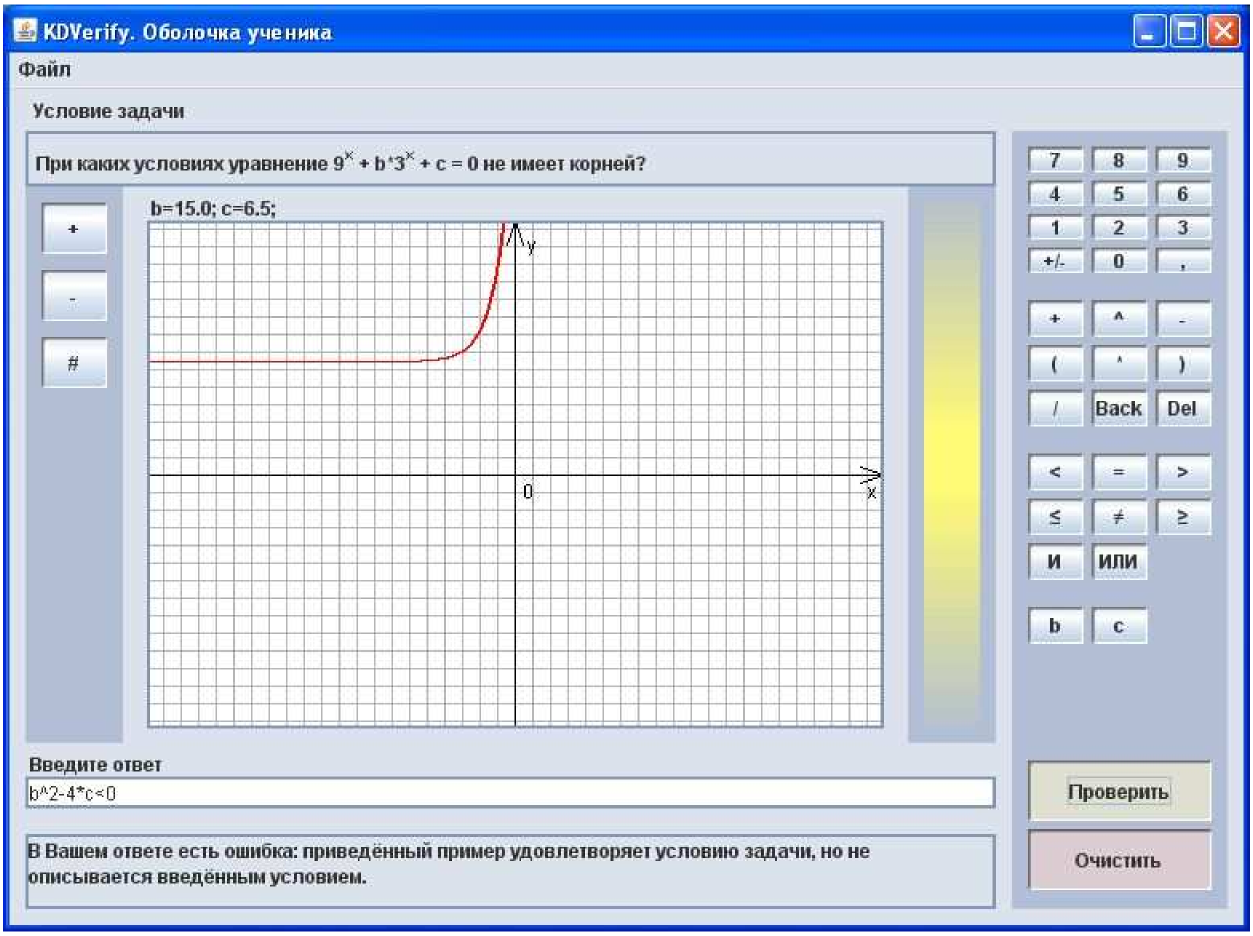

Рис. 3

Желтый цвет индикатора означает, что ответ не полный. То есть имеются значения параметров, не удовлетворяющих введенному предикату, при которых уравнение (1.1) неразрешимо. Действительно, при параметрах $b = 15$ и $c = -6.5$, приведенных системой, дискриминант

$$D = b^2 - 4c = 15^2 - 4 \cdot 6.5 = 199 > 0,$$

однако исходное уравнение (1.1) при этих параметрах решений не имеет, что иллюстрируется графиком функции при данных параметрах.

Что же произошло? Получается, что при указанных системой значениях параметров b и c уравнение (1.3) разрешимо, однако исходное уравнение (1.1) корней не имеет.

Замечание 1.1. *Заметим, что при решении задачи, повторно нажимая кнопку проверить, ученик может получить другие контрпримеры, которые могут дать дополнительный толчок в решении данной задачи.*

Нажимая кнопку проверки еще раз, получаем новый контрпример $b = 12$, $c = 9$. Здесь легко вычислить корни уравнения (1.3):

$$y_{1,2} = -12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 9} = -12 \pm 6\sqrt{3}.$$

Заметим, что так как $\sqrt{3} < 2$, то $y_2 < y_1 < 0$.

Нажмем кнопку проверки еще раз и проверим еще один контрпример, приведенный системой $b = 8$, $c = 15$. Тогда

$$y_{1,2} = -8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15} = -8 \pm 2.$$

И в этом случае получаем

$$y_2 = -10 < y_1 = -6 < 0.$$

Получается, что во всех приведенных контрпримерах хотя уравнение (1.3) и разрешимо, но его корни отрицательны. Это соображение заставляет нас вернуться к замене переменной (1.2) и более внимательно изучить, что же произошло при этом действии и как связаны корни исходного уравнения (1.1) и (1.3).

Сделав замену в (1.2) легко заметить, что для нахождения решения (1.1) мы должны искать только положительные корни уравнения (1.3), то есть получаем условие

$$y_1 > y_2 > 0. \tag{1.4}$$

Как получить из этих неравенств условия на параметры b и c? Воспользуемся теоремой Виета для уравнения (1.3):

$$\begin{cases} y_1 y_2 &= c, \\ y_1 + y_2 &= -b. \end{cases} \tag{1.5}$$

Из (1.5) получаем условия отрицательности корней уравнения (1.3):

$$b > 0, \ c > 0. \tag{1.6}$$

• **Третья попытка**. Ученик вводит новый предикат, состящий из трех условий
$$D = b^2 - 4c < 0 \text{ ИЛИ } c > 0 \text{ И } b > 0.$$

Однако к нашему удивлению реакция системы такая же, как в предыдущей попытке (см. рис. 4): *„В Вашем ответе есть ошибка: приведённый пример удовлетворяет условию задачи, но не описывается введённым условием“*.

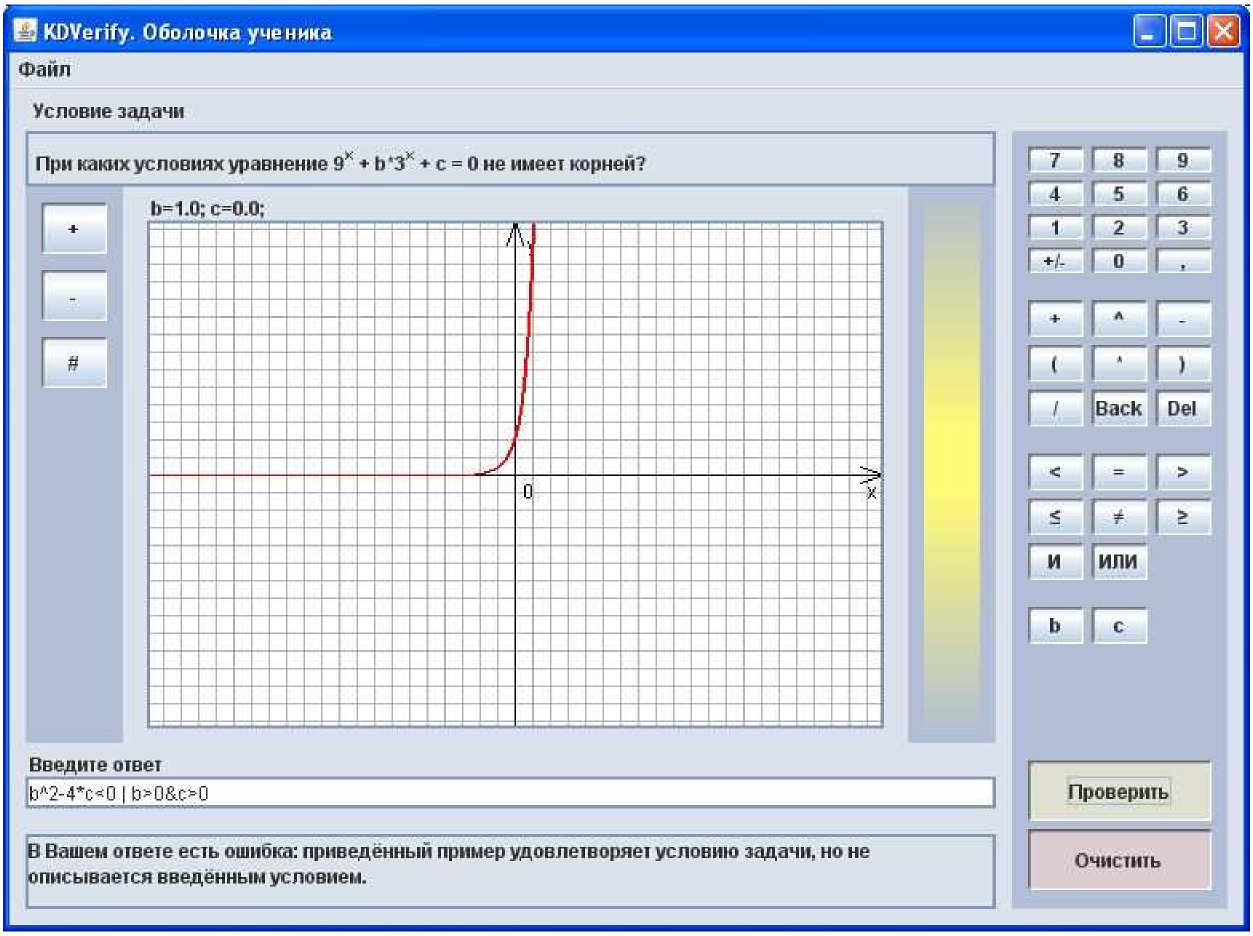

Рис. 4

При этом система приводит нам контрпример $b = 1$, $c = 0$. Действительно, мы забыли что корни уравнения (1.3) могут быть равны нулю, в этом случае исходное уравнение также неразрешимо. Условие (1.4) в действительности нужно записать в виде

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Тогда из (1.5) получаем условия неположительности корней уравнения (1.3):

$$b \geqslant 0, \ c \geqslant 0. \tag{1.8}$$

• **Четвертая попытка**. Ученик вводит исправленный предикат предыдущей попытки:

$$D = b^2 - 4c < 0 \text{ ИЛИ } c \geqslant 0 \text{ И } b \geqslant 0.$$

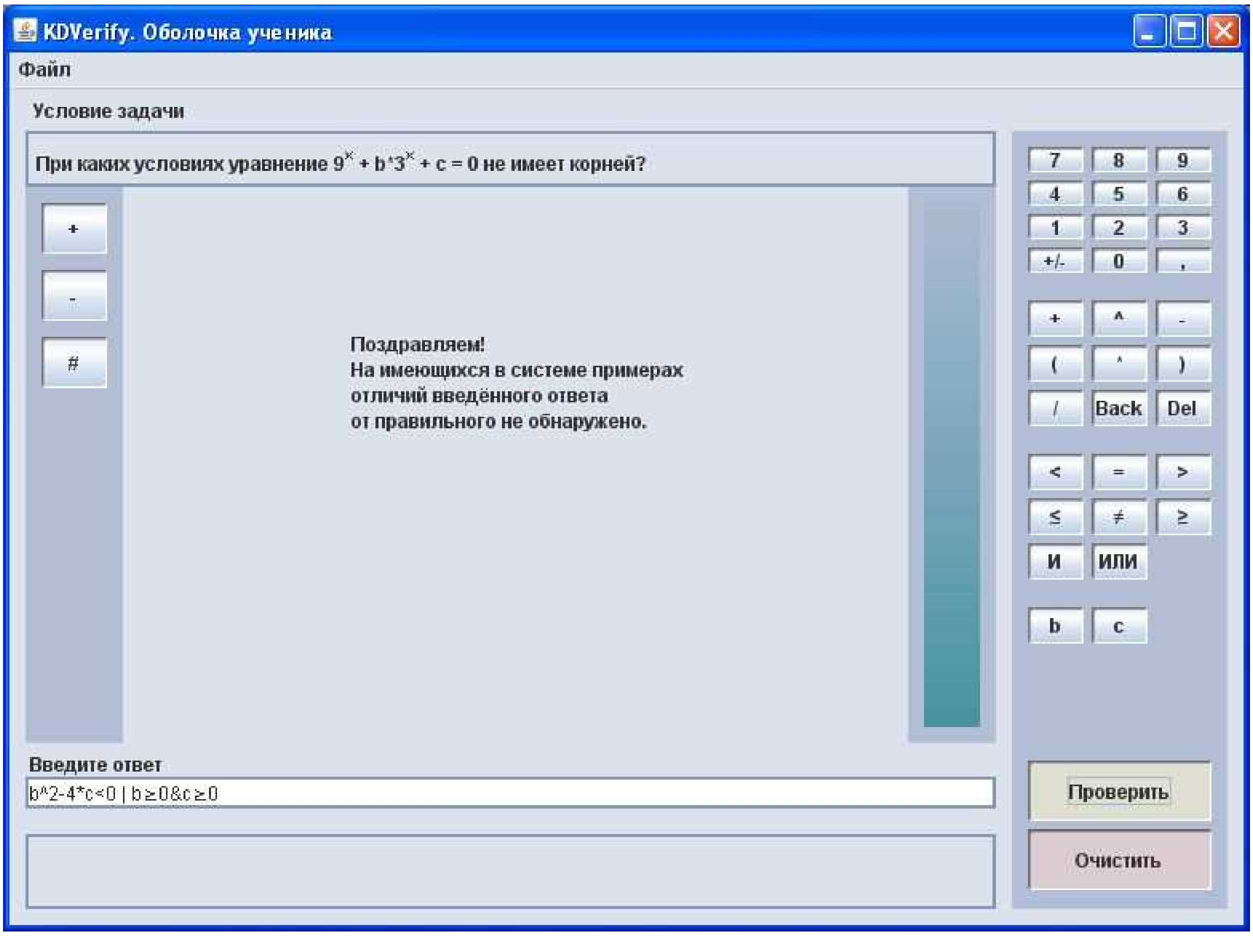

Рис. 5

Ура! Система сообщает нам (см. рис. 5): „*Поздравляем! На имеющихся в системе примерах отличий введенного ответа от правильного не обнаружено.*“. Задача решена.

Рассмотрим еще один пример возможного диалога ученика с системой.

При каких условиях уравнение

$$(x-1)(x^2+b+c) = 0 \tag{1.9}$$

имеет не менее двух корней?

Ученик понимает, что один корень $x_1 = 1$ уравнение (1.9) имеет при любых значениях параметров. Поэтому для положительного ответа на вопрос квадратный трехчлен $x^2 + b + c$ должен иметь корни. Таким образом его дискриминант должен быть положителен.

- **Первая попытка**. Ученик вводит предикат

$$D = b^2 - 4c > 0. \tag{1.10}$$

Реакция системы (см. рис. 6): „*В Вашем ответе есть ошибка: приведённый пример удовлетворяет введённому условию, но не удовлетворяет условию задачи*“.

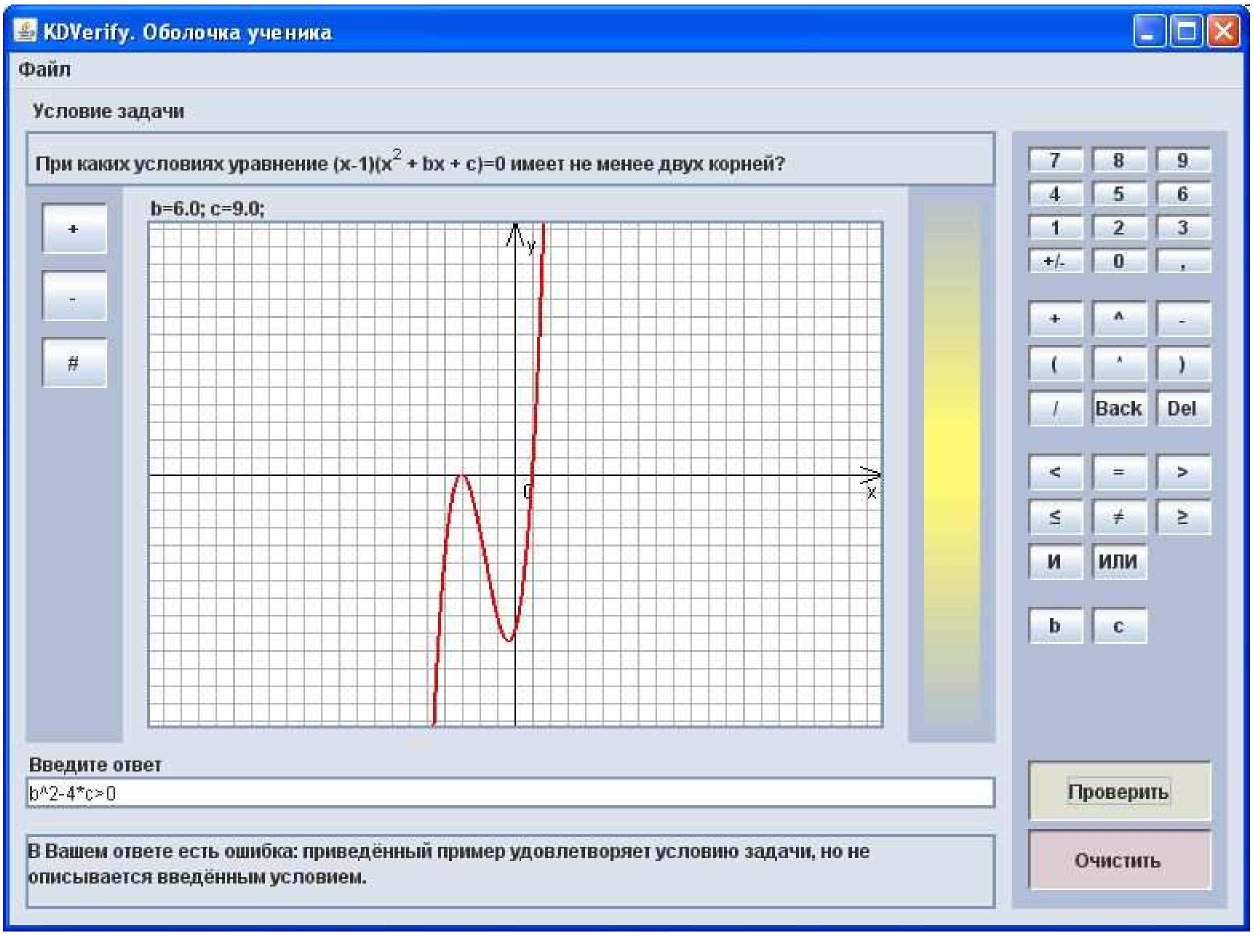

Рис. 6

Получаем неполный ответ. Контрпример, приведенный системой подсказывает ученику его ошибку: при $b = 6$ и $c = 9$ дискриминант $D = 0$, однако уравнение (1.9) имеет два корня, что визуально видно на картинке. Данный системой контрпример показывает, что корни квадратного трехчлена могут быть и совпадающими.

- **Вторая попытка**. Ученик исправляет предикат

$$D = b^2 - 4c \geqslant 0.$$

Однако реакция системы снова отрицательная (см. рис. 7): „*В Вашем ответе есть ошибка: приведённый пример удовлетворяет введённому условию, но не удовлетворяет условию задачи*“.

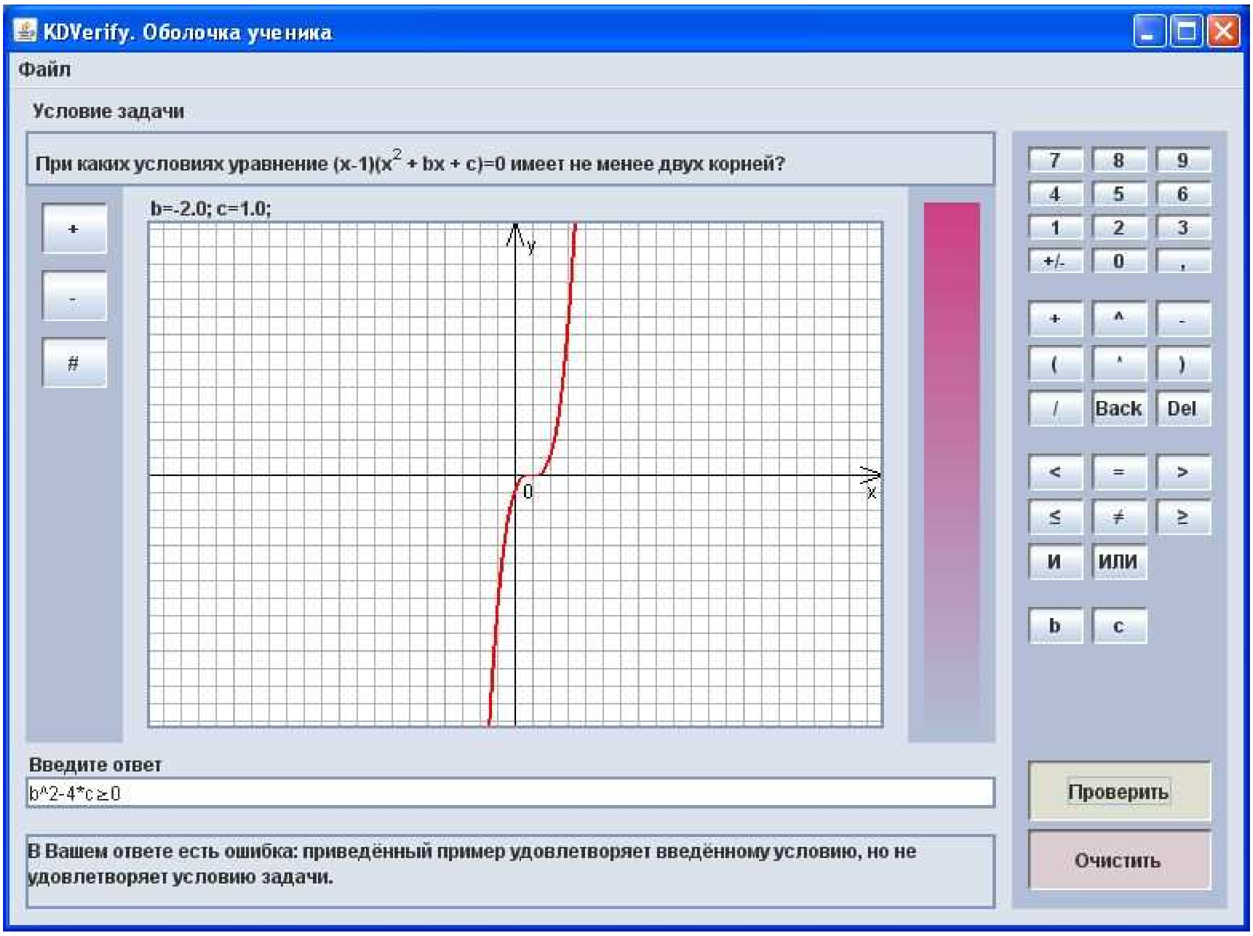

Рис. 7

Что же произошло? Смотрим контрпример, приведенный системой $b = -2$ и $c = 1$. При этих параметрах уравнение (1.9) имеет три совпадающих корня

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

Действительно на картинке визуально виден один корень кратности три. Таким образом, своими контрпримерами система подталкивает ученика к решению отдельно рассмотреть случай кратных корней квадратного трехчлена.

Если квадратный трехчлен имеет совпадающие корни ($D = 0$), нужно исключить ситуацию, когда $x = 1$ является корнем квадратного трехчлена. Получаем условие на параметры в этом случае:

$$D = b^2 - 4c = 0, \quad 1 + b + c \neq 0. \tag{1.11}$$

- **Третья попытка**. Ученик вводит предикат, описывающий оба случая (1.10) и (1.11):

$$b^2 - 4c > 0 \text{ ИЛИ } D = b^2 - 4c = 0 \text{ И } 1 + b + c \neq 0.$$

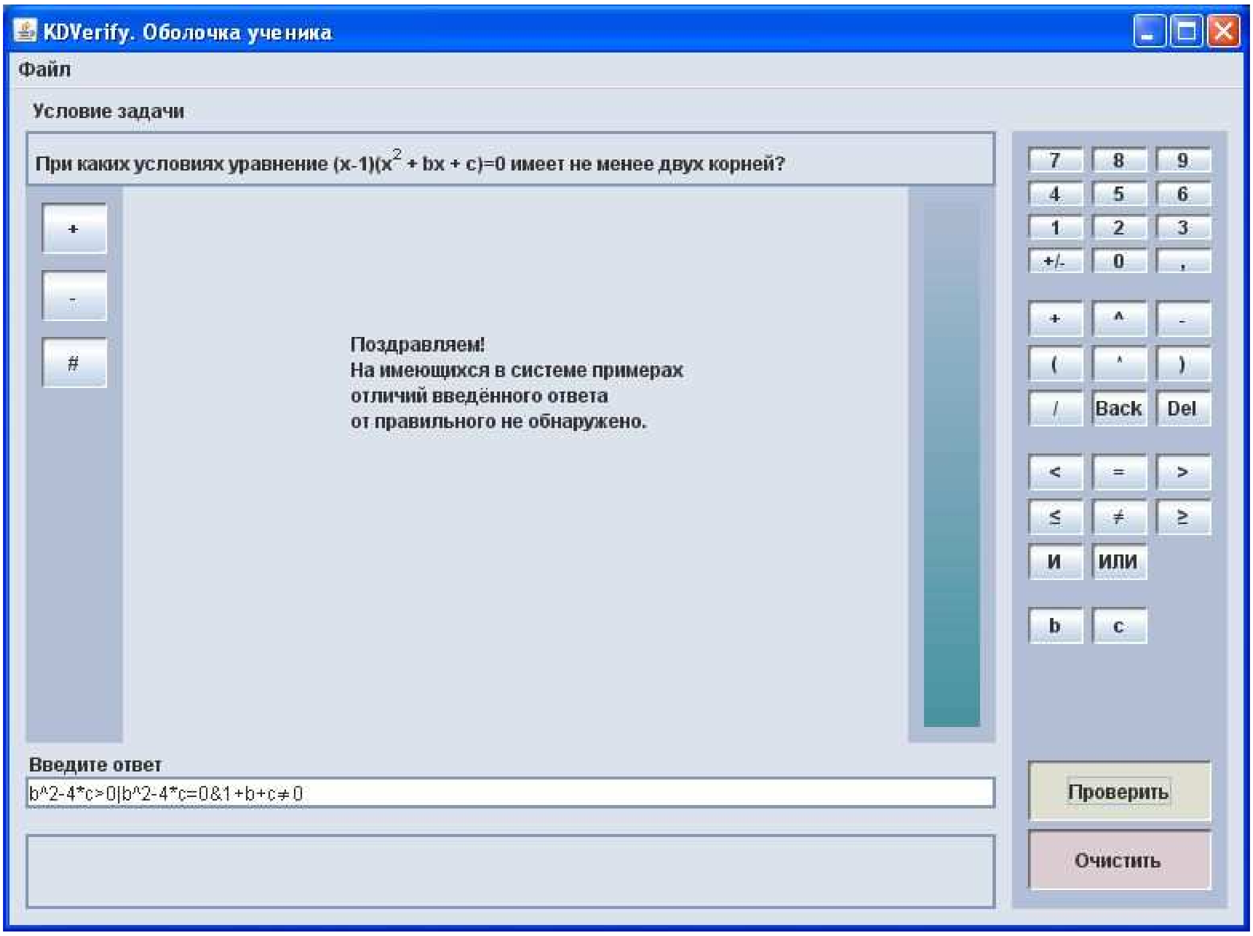

Рис. 8

Ура! Система сообщает нам (см. рис. 8): „*Поздравляем! На имеющихся в системе примерах отличий введенного ответа от правильного не обнаружено.*“. Задача решена.

2. Разбор трудных задач

2.1. Методические замечания

Задачи с параметрами — по сути тест на проверку уровня математической культуры, на ее присутствие или отсутствие. Причем возникают они не только в алгебре или геометрии. Изучение физических, химических, экономических и многих других закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами, к исследованию процессов в зависимости от параметра. Практически каждая задача из учебника физики или экономики - это текстовая алгебраическая задача с параметрами.

Спецификой задач с параметрами является то, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи и форму ответа. Ответ в задачах с параметрами, как правило, имеет развернутый вид: при конкретных значениях параметра ответы могут значительно различаться.

Решение задач с параметрами требует особой тщательности и глубины анализа. Решить уравнение с параметром - это значит для каждого значения параметра выяснить, имеет ли уравнение корни или нет; если уравнение имеет корни, то найти их. Аналогично трактуется вопрос о решении уравнений или неравенств, или систем с одним или несколькими параметрами.

Необходимо четко сформулировать в решении задачи с параметрами условия, указывающие область допустимых значений уравнения или неравенства, область допустимых значений параметров. Учет области применимости формулы часто является ядром задания задачи с параметром. При этом надо учитывать свойства участвующих функций. От них зависят условия, обеспечивающие равносильность преобразований. Такие условия особенно важны при решении неравенств.

2.2. Квадратные уравнения и системы

Пример 2.2.1. *При каких значениях параметра a все корни уравнения*

$$ax^2 - 2(a+1)x + a - 3 = 0$$

больше 1*?*

Решение. Опишем общий способ решения подобных задач. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

были больше числа d, необходимо и достаточно выполнения следующих условий относительно его дискриминанта (D) и вершины $\hat{x}$:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ \hat{x} = -\dfrac{b}{2a} > d, \\ af(d) > 0 \end{cases}$$

Аналогично, требование того, чтобы корни были меньше числа d, означает выполнение условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ \hat{x} = -\dfrac{b}{2a} < d, \\ af(d) > 0 \end{cases}$$

В данной задаче условия записываются в виде

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geqslant 0, \\ \dfrac{2a+1}{2a} > 1, \\ a(a - 2a - 1 + 3a - 1) > 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что

$$a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$$

Замечание 2.1. *Очевидно, что тот же результат мы получили бы и решая неравенство $x_1 > 1$, где x_1 — меньший корень уравнения, однако такой способ является более сложным.*

Пример 2.2.2. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

Решение. Исходя их условия задачи, областью допустимых значений для x и a является множество всех вещественных чисел. Графиком уравнения $x^2 + a^2 = 4$ является окружность с центром в начале координат и радиусом 2.

Рассмотрим квадратный трехчлен, соответствующий неравенству системы. Составим уравнение $F(x,a) = 0$ и решим его относительно a. Получим

$$a = -x, \ a = \frac{-x-2}{4}. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение $F(x,a) = 0$ можно записать в виде

$$4(a+x)\left(a + \frac{x+2}{4}\right) = 0.$$

Известно, что произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Исходя из этого, графиком уравнения $F(x,a) = 0$ является объединение двух пересекающихся прямых (2.1).

Пусть M — точка пересечения этих прямых, а точки A, B, C и D — точки пересечения соответственно прямых (2.1) и окружности $x^2 + a^2 = 4$. График уравнения $F(x,a) = 0$ разбивает координатную плоскость на четыре области. Согласно условию задачи нас будут интересовать лишь те из них, в которых квадратный трехчлен $F(x,a) = 0$ принимает отрицательные значения. Для определения знака выражения достаточно подставить координаты одной точки из рассматриваемой области плоскости. При этом получаем, что решение неравенства $F(x,a) < 0$ являются области плоскости, заключенные внутри углов $\angle AMC$ и $\angle BMD$. Дуги AC и BD, исключая их концы представляют собой ничто иное, как множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют исходной системе.

Теперь легко дать ответ на вопрос задачи: значения параметра a, удовлетворяющие условию, есть совокупность всех a, заключенных между ординатами точек B и D, C и A. Найдем ординаты этих точек. Для этого решим две системы уравнений

$$\begin{cases} a = -x, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{-x-2}{4}, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

Таким образом, точки пересечения графиков уравнений $F(x,a) = 0$ и $x^2 + a^2 = 4$ имеют координаты:

$$A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ C = (-2, 0),\ D = \left(\frac{30}{17}, -\frac{16}{17}\right).$$

Окончательно получаем

$$-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17} \quad \text{и} \quad 0 < a < \sqrt{2}.$$

Пример 2.2.3. *При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения*

$$(3a+2)x_2 + (a-1)x + 4a + 3 = 0$$

удовлетворяют условиям

$$x_1 < -1 < x_2 < 1?$$

Решение. Задача равносильна следующей: при каких значениях параметра a только один (больший) корень квадратного трехчлена

$$f(x) = (3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3$$

принадлежит интервалу $(-1;1)$, а другой корень меньше -1? Очевидно, что условием выполнения требований задачи является система

$$\begin{cases}(3a+2)f(-1)<0,\\(3a+2)f(1)>0,\end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases}(3a+2)(3a+2-a+1+4a+3)<0,\\(3a+2)(3a+2+a-1+4a+3)>0.\end{cases}$$

Решением последней системы является интервал $a \in (-1;-2)$.

2.3. Уравнения и неравенства с модулем

Пример 2.3.1. *При каких значениях параметра a неравенство*

$$x^2+4|x-a| \geqslant a^2$$

справедливо для всех значений x?

Решение. При $x \geqslant a$ неравенство равносильно неравенству

$$(x-a)(x-(-a-4)) \geqslant 0,$$

которое справедливо для всех значений x из рассматриваемого промежутка тогда и только тогда, когда $a \geqslant -a-4$, т. е. когда $a \geqslant -2$.

Если $x<a$, то по аналогии с предыдущим случаем приходим к неравенству

$$(x-a)(x-(4-a)) \geqslant 0,$$

которое справедливо для всех рассматриваемых x при $a \leqslant -a+4$, т. е. когда $a \leqslant -2$.

Таким образом, $-2 \leqslant a \leqslant 2$.

Пример 2.3.2. *В зависимости от значений параметра a решить неравенство*

$$a-x>1-|x|.$$

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде

$$a>x+|x|-1.$$

Обозначим правую часть неравенства через $g(x)$. Эту функцию, раскрывая модули, можно записать так:

$$g(x)=\begin{cases}-1, & x<-1,\\2x+1, & -1 \leqslant x<0,\\1, & 0 \leqslant x<1,\\2x-1, & x \geqslant 1.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что при $a \leqslant -1$ решений нет, при $a \in (-1;1)$ — это точки вида $a > 2x+1$, т. е. $x < \dfrac{a-1}{2}$; при $a = 1$ решением является промежуток $x < 0$, а при $a > 1$ решения получаются из неравенства $a > 2x-1$, откуда $x < \dfrac{a-1}{2}$. Окончательно имеем:

$$\begin{cases} a \leqslant -1, & \text{решений нет,} \\ -1 < a \leqslant 1, & x < \dfrac{a-1}{2}, \\ a > 1, & x < \dfrac{a+1}{2}. \end{cases}$$

Пример 2.3.3. *При каких значениях параметра a все решения уравнения*

$$2\sqrt{x^2 - 2ax + a^2} + a - 4 + x = 0$$

удовлетворяют неравенству $0 < x < 4$?

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$2|x-a| + x + a - 4 = 0.$$

Очевидно, что решением последнего являются значения

$$\begin{cases} x = 3a - 4, & \text{при } x < a, \\ x = \dfrac{a+4}{3}, & \text{при } x \leqslant a. \end{cases}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к решению двух систем неравенств

$$\begin{cases} 3a - 4 < a, \\ 3a - 4 \geqslant 0, \\ 3a - 4 \leqslant 4, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} \dfrac{a+4}{3} \geqslant a, \\ \dfrac{a+4}{3} \geqslant 0, \\ \dfrac{a+4}{3} \leqslant 4. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$a \in \left[\frac{4}{3}, 2\right), \ a \in [-4; 2].$$

Взяв пересечение этих множеств, и учитывая, что при $a = 2$ исходное уравнение имеет один корень $x = 2$, удовлетворяющий условию, окончательно получаем

$$a \in \left[\frac{4}{3}, 2\right].$$

2.4. Системы уравнений и неравенств

Пример 2.4.1. *В зависимости от значений параметра a определить количество решений системы*

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

Решение. С геометрической точки зрения количество решений системы - это число точек пересечения при каждом фиксированном значении параметра a кривых, заданных уравнениями системы. Рассматривая в первом уравнении 4 случая и раскрывая модули, получим, что это урав- нение задает квадрат. Второе уравнение — это семейство окружностей радиуса $\sqrt{a}, (a > 0)$ с центром в начале координат.

При $a = 0$ окружность вырождается в точку. Очевидно, что когда окружность касается квадрата изнутри, т.е. при

$$\sqrt{a} = 2\sqrt{2}(a = 8) \text{ и при } \sqrt{a} = 4(a = 16)$$

(окружность проходит через вершины квадрата) система имеет 4 решения. При $8 < a < 16$ общих точек у окружности и квадрата 8. При $a < 8$ и $a > 16$ решений нет. Окончательно:

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 8) \cup (4; \infty), & \text{решений нет,} \\ a = 8; a = 16, & \text{четыре решения,} \\ a \in (8; 16), & \text{восемь решений} \end{cases}$$

Пример 2.4.2. *При каких значениях параметра a система*

$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy), \\ 2 + x + y + xy = 0. \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

Решение. Поскольку $x = -1$ не является решением системы (проверка подстановкой), полагаем $x \neq -1$. Тогда из второго уравнения системы получаем

$$y = -\frac{x + 2}{x + 1}.$$

Подставляя выражение для y в первое уравнение системы, получим квадратное уравнение на переменную x:

$$x^2(a + 1) + x(a + 2) + 2 - a = 0.$$

Последнее уравнение будет иметь единственное решение в том случае, когда оно является линейным, т. е. $a + 1 = 0$. При $a = -1$ решением системы являются: $x = -3; y = -2$. Квадратное уравнение также будет иметь единственное решение, когда его дискриминант равен нулю, т. е.

$$D = (a+2)^2 - 4(a+1)(2-a) = 0.$$

Отсюда

$$a = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

При этих значениях параметра a находим решения системы:

$$x = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2 \pm \sqrt{5}}, \quad y = -3 \pm \sqrt{5}.$$

Наконец, исходная система будет иметь ровно одно решение, когда квадратное уравнение на переменную x хотя и имеет два решения, но одно из них является "запрещенным"для системы, т. е. $x = -1$. Подставляя $x = -1$ в квадратное уравнение, находим, что такой корень будет при $a = 1$. Второеt решение при этом значении a имеет вид

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -3.$$

Пример 2.4.3. *При каких значениях параметра а решение системы*

$$\begin{cases} x + y = 2(a+1), \\ xy = a^2 + 3a - 1. \end{cases}$$

удовлетворяет условиям $|x| < 1, |y| > 1$*?*

Решение. Рассмотрим уравнение

$$f(t) = t^2 - 2(a+1)t + a^2 + 3a - 1 = 0.$$

Тогда по теореме Виета пары корней этого уравнения t_1, t_2 будут являться решениями системы. При таком подходе задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра a один из корней квадратного трехчлена $f(t)$ принадлежит интервалу $(-1; 1)$, а второй корень расположен на числовой оси вне этого интервала?

Из геометрической интерпретации решение последней задачи сводится к решению неравенства

$$f(-1)f(1) < 0, \quad \text{или} \quad \left(a^2 + 5a + 2\right)\left(a^2 + a - 2\right) < 0.$$

Решая последнее неравество получаем ответ:

$$a \in \left(\frac{-5 - \sqrt{17}}{2}; -2\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{2}; 1\right).$$

2.5. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Пример 2.5.1. *В зависимости от значений параметра a решить уравнение*

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=x.$$

Решение. Из вида уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Если $a = 0$, то $x = 0$. Справедливо и обратное. Предположим, что $x > 0$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$2\sqrt{a^2-x^2}=x^2-2a,$$

которое может быть справедливым только при условиях

$$0 < x \leqslant a, \quad x^2 \geqslant 2a.$$

Повторное возведение в квадрат и сокращение (с учетом $x > 0$) приводит к значению

$$x = 2\sqrt{a-1},\ a > 1.$$

Очевидно, что условие $0 < x \leqslant a$ выполняется при всех $a > 1$, а вот второе условие $x^2 \geqslant 2a$ возможно только при $a \geqslant 2$. Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2), & \text{решений нет,} \\ a = 0, & x = 0, \\ a \in [2; \infty), & x = 2\sqrt{a-1}. \end{cases}$$

Пример 2.5.2. *При каком значении параметра a имеет единственное решение уравнение*

$$a2^x + 2^{-x} = 5?$$

Решение. Очевидно, что при $a = 0$ уравнение имеет единственное решение $x = -\log_2 5$. Пусть $a \neq = 0$. Замена $t = 2x, t > 0$, приводит уравнение к виду

$$at^2 - 5t + 1 = 0.$$

Если $25 - 4a < 0$, то корней нет. Если $25 - 4a \geqslant 0$, то корни этого квадратного уравнения существуют и вычисляются по формулам

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4a}}{2a}.$$

При $25 - 4a = 0$ уравнение имеет единственное решение $t = 2/5$. Уравнение $2x = 2/5$ также имеет единственное решение $x = 1 - \log_2 5$.

При положительном дискриминанте в ответ надо включать те значения параметра, для которых один корень положителен, а другой отрицателен. Рассмотрим системы

$$\begin{cases} \dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{2a} < 0, \\ \dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{2a} > 0, \\ 25-4a > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{2a} < 0, \\ \dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{2a} > 0, \\ 25-4a > 0. \end{cases}$$

При $0 < a < 25/4$ корни положительны и системы не имеют решений. Если $a < 0$, то $\sqrt{25-4a} > 5$ — вторая система имеет решение. Окончательно:

$$a \in (-\infty; 0) \cup \{\frac{25}{4}\}.$$

Пример 2.5.3. *Решить уравнение*

$$|a-9|3^{x-2} + a9^{x-1} = 1.$$

Решение. При $a = 0$ есть решение $x = 0$; далее имеем, при $a = -9$ решение $x = 0$ и при $a = 9$ решение $x = 0$.

Пусть $a \neq 0$, тогда уравнение примет вид:

$$3^x = \frac{(-|a-9| \pm (a+9))}{2a}.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x = 0, x = 2 - \log_3(-a), & a < 0, a \neq -9, \\ x = 0, & a = -9, 0 \leqslant a \leqslant 9, \\ x = 1 - \log_3 a, & a > 9. \end{cases}$$

Пример 2.5.4. *В зависимости от значений параметра а решить неравенство*

$$a^{x+2} - 8a^{x+1} - \frac{4}{a} > a + 2.$$

Решение. Допустимыми значениями параметра являются все $a > 0$. Преобразуем неравенство, используя свойства показательной функции

$$a^x\left(a^2 - \frac{8}{a}\right) > a + \frac{4}{a} + 2, \quad a^x\frac{(a-2)\left(a^2+2a+4\right)}{a} > \frac{\left(a^2+2a+4\right)}{a}.$$

Так как $a > 0$ и квадратный трехчлен $a^2 + 2a + 4 > 0$ при всех значениях параметра a, то после сокращения получаем неравенство:

$$a^x(a-2) > 1.$$

Пусть $a > 2$. Показательная функция с основанием $a > 2$ монотонно возрастает, поэтому получаем $x > -\log_a(a-2)$. Очевидно,что при $a \leqslant 2$ решений нет.

Пример 2.5.5. *При каких значениях параметра a имеет решение система*

$$\begin{cases} \sqrt{y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \\ y = ax + 1. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим область допустимых значений данной системы: $x > 0, y \geqslant 0$. При $a = 0$ система имеет единственное решение

$$x = 1, y = 1.$$

В дальнейшем считаем $a \neq 0$. Подставив во второе уравнение $y = 1/x$, получим

$$\frac{1}{x} = ax + 1, \quad ax^2 + x - 1 = 0,$$

Откуда

$$x_{1,2} = \frac{-1}{\pm}\sqrt{1+4a}2a.$$

Если $a = -1/4$, то система имеет единственное решение

$$x = 2, y = \frac{1}{2}.$$

Если $a \neq 0$ и $a \neq -1/4$, то нас интересуют значения а, для которых корни имеют разные знаки. Это возможно при $a > 0$. Окончательно:

$$a = \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup [0; +\infty).$$

2.6. Тригонометрические уравнения и неравенства

Пример 2.6.1. *При каких значениях параметра a значение выражения*

$$1 + \cos x(5\cos x + a\sin x)$$

будет равно нулю хотя бы при одном значении x?

Решение. Исходное уравнение после преобразований приводится к однородному
$$\sin^2 x + a\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0,$$
которое после деления на $\cos x$ и замены $t = \operatorname{tg} x$ превращается в квадратное:
$$t^2 + at + 6 = 0.$$
Так как $t = \operatorname{tg} x$ может принимать любые значения, это уравнение будет иметь решения при условии неотрицательности дискриминанта:
$$D = a^2 - 24 \geqslant 0.$$
Следовательно
$$a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{6}}; +\infty\right).$$

Пример 2.6.2. *В зависимости от параметра a решить уравнение*
$$x\sin ax = |x|.$$

Решение. Очевидно, что $x = 0$ будет всегда решением. Если $x > 0$, то получим уравнение
$$\sin ax = 1.$$
Если $a = 0$, то решений нет, если $a \neq 0$, то
$$ax = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad x = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi l\right), \ l \in \mathbb{Z}.$$
Учитывая, что $x > 0$ получаем:
$$\left\{\begin{array}{ll} x = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l\right), & a > 0, \\ x = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\pi l\right), & a < 0, \end{array}\right. \quad l \in \mathbb{N}.$$

Аналогично рассуждая для случая $x < 0$ получаем:
$$\left\{\begin{array}{ll} x = \dfrac{1}{a}\left(-\dfrac{\pi}{2} - 2\pi l\right), & a > 0, \\ x = \dfrac{1}{a}\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l\right), & a < 0, \end{array}\right. \quad l \in \mathbb{N}.$$

Пример 2.6.3. *При каких значениях параметра a уравнение*
$$\log_a\left(\cos^2 x + 1\right) + \log_a\left(\cos^2 x + 5\right) = 1$$
имеет хотя бы одно решение?

Решение. Допустимыми значениями параметра являются все значения $a > 0, a \neq 1$. Из исходного уравнения получим, что

$$\left(\cos^2 x + 1\right)\left(\cos^2 x + 5\right) = a.$$

Введем обозначения

$$\cos^2 x = t, 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

тогда уравнение примет вид

$$f(t) = t^2 + 6t + (5 - a) = 0.$$

Условия задачи будут выполнены, если последнее уравнение будет иметь хотя бы один корень из отрезка $[0; 1]$. В данном случае исследование только дискриминанта недостаточно. Ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $t^* = -3$, следовательно, на отрезке $[0; 1]$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Для того, чтобы на отрезке $[0; 1]$ существовал корень, в силу непрерывности необходимо и достаточно, чтобы на его концах функция $f(t)$ имела разные знаки

$$f(0)f(1) \leqslant 0 \text{ или } (5 - a)(1 + 6 + 5 - a) \leqslant 0.$$

Решая последнее неравенство, получаем $a \in [5; 12]$.

Пример 2.6.4. *При каких значениях параметра a функция*

$$f(x) = 8ax - a\sin 6x - 7x - \sin 5x$$

является возрастающей на всей числовой оси и не имеет критических точек?

Решение. Функция $f(x)$ дифференцируема при любом значении a и

$$f'(x) = 8a - 6a\cos 6x - 7 - 5\cos 5x.$$

Задачу можно переформулировать так: при каких a неравенство

$$6a\cos 6x + 5\cos 5x < 8a - 7$$

справедливо для любого x?

Так как последнее неравенство должно выполняться для любого значения x, оно должно быть справедливо и для $x = 0$, откуда

$$6a + 5 < 8a - 7 \text{ или } a > 6.$$

Учитывая теперь, что

$$6a\cos 6x + 5\cos 5x \leqslant 6|a| + 5 < 8a - 7,$$

приходим к выводу, что при $a > 6$ неравенство справедливо для любого x.

2.7. Модельные задачи

Пример 2.7.1. *Двум рабочим для выполнения работы требуется a дней. Работа была выполнена за b дней, причем треть всей работы выполнил первый рабочий, а завершил работу второй. Сколько времени требуется каждому рабочему в отдельности на выполнение всей работы?*

Решение. Пусть первый рабочий выполняет работу за x дней, а второй за y дней. Очевидно,что

$$x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ b > a.$$

Из условий задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{3} = b. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$\begin{cases} a(x+y) = xy, \\ x + 2y = 3b, \end{cases} \qquad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 3b - 2y, \\ 2y^2 - (a+3b)y + 3ab = 0. \end{cases}$$

Для дискриминанта квадратного уравнения с учетом того, что $b > a$ имеем

$$(a+3b)^2 - 24ab = a^2 + 9b^2 - 18ab \geqslant 0,$$

откуда

$$0 < a \leqslant (9 - 6\sqrt{2})b.$$

В этом случае

$$y_{1,2} = \frac{a + 3b \pm \sqrt{a^2 + 9b^2 - 18ab}}{4}, \quad x_{1,2} = \frac{3b - a \mp \sqrt{a^2 + 9b^2 - 18ab}}{2}.$$

Окончательно имеем:

$$\begin{cases} \text{нет решений }, & \begin{cases} a \leqslant 0, \\ b < 0, \\ a > \left(9 - 6\sqrt{2}\right) b, \end{cases} \\ \dfrac{3b \pm \left(a + \sqrt{a^2 + 9b^2 - 18ab}\right)}{2}, & b > 0, \\ \dfrac{3b \pm \left(a - \sqrt{a^2 + 9b^2 - 18ab}\right)}{2}, & 0 < a < \left(9 - 6\sqrt{2}\right) b. \end{cases}$$

3. Состав ИИСС.

В состав ИИСС входит

• среда учителя: среда подготовки конструктивных и параметрических задач, предполагающий неограниченное число правильных ответов (проверка по признакам) и диалог с учеником;

• среда ученика: среда верификации конструктивных гипотез и решений логически сложных математических задач;

• среда проверки знаний - пересечение сред ученика и учителя;

• комплект электронных задачников конструктивных гипотез и логически сложных математических задач по курсу алгебры и анализа;

• комплект контрольных работ;

• учебное пособие в печатной форме;

• методические рекомендации в печатной форме.

Схематично взаимодействие отдельных модулей ИИСС представлено на следующей диаграмме (рис.9.)

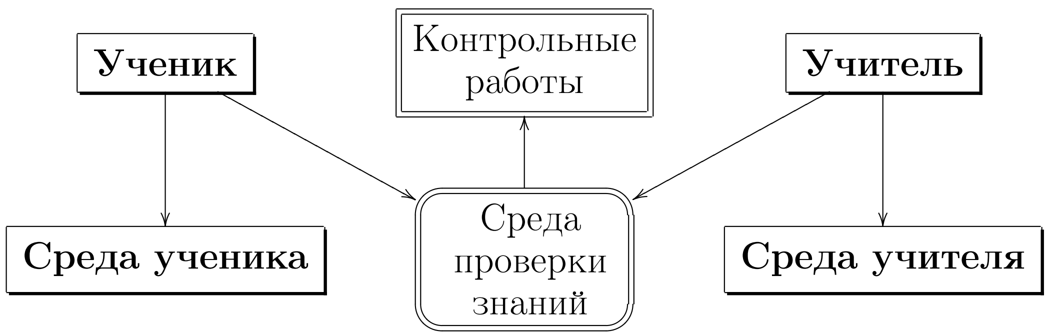

Рис. 9

3.1. Среда проверки знаний

В системе предусмотрен контроль знаний ученика на основе решения им контрольных работ. Система (среда) проверки знаний является „точкой пересечения“ деятельности ученика и учителя. Для ученика это решение контрольных, для учителя – проверка результатов.

В среде проверки знаний происходит работа с материалом, созданным в системе учителя, с „базой знаний“ из системы ученика. Ученик в этой среде имеет возможность открыть и загрузить предустановленные (по умолчанию в системе) контрольные работы.

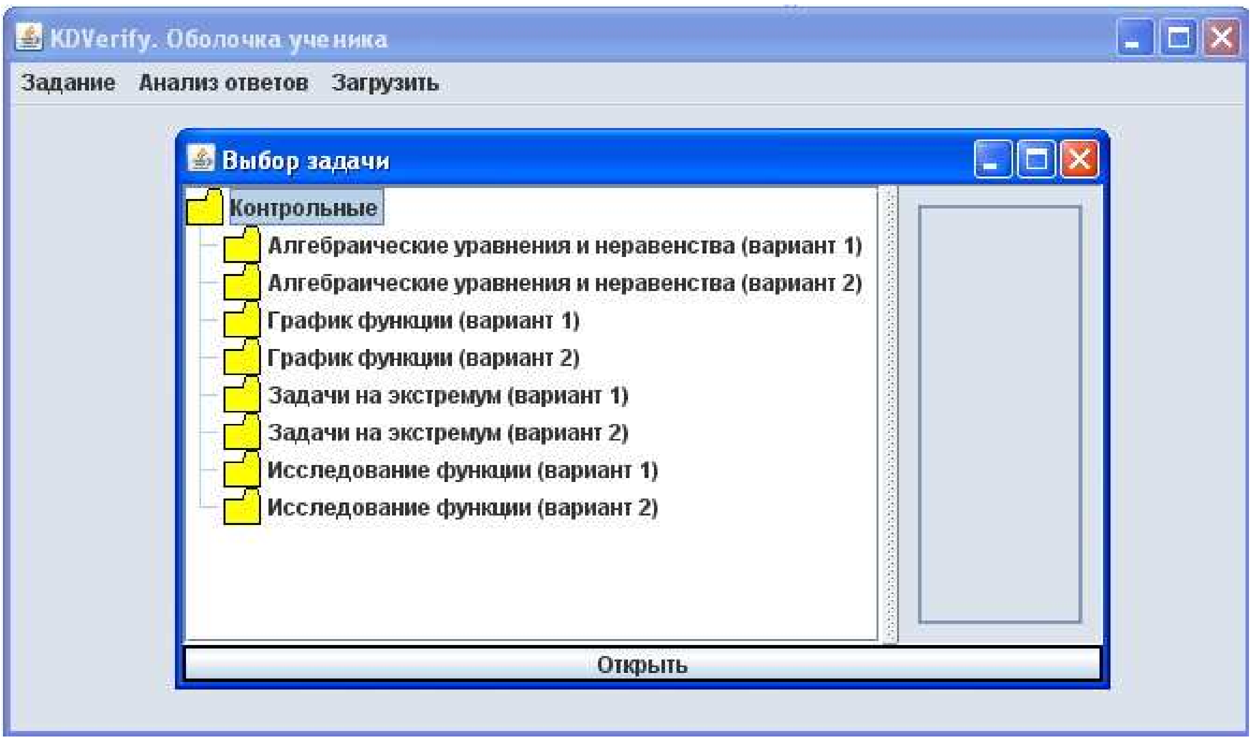

Рис. 10

Последовательность действий ученика при решении контрольной работы следующая:

- Ученик должен загрузить контрольную работу. Для этого ему нужно нажать последовательность клавиш

$$\boxed{\text{ЗАДАНИЕ}} \rightarrow \boxed{\text{ОТКРЫТЬ}}$$

Кроме того, ученик можнет осуществить импорт созданных учителем контрольных работ из внешних ресурсов – для этого нужно нажать клавишу

$$\boxed{\text{ЗАГРУЗИТЬ}}$$

При этом импортируемые контрольные работы скопируются в общий каталог среды проверки знаний. Вид окна среды проверки знаний в этом случае показан на рис. 10.

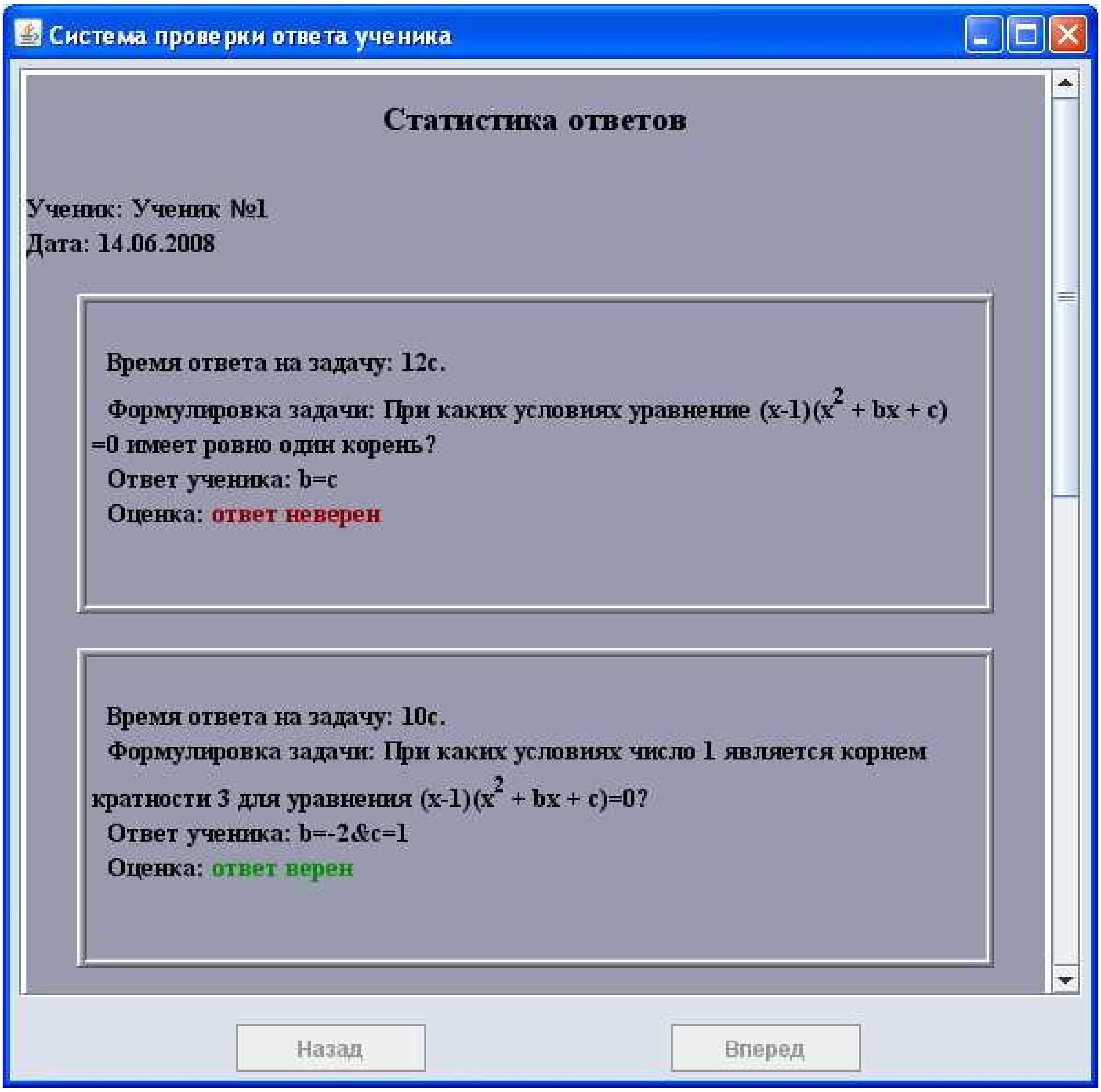

Рис. 11

• Перед тем, как начать решать контрольную работу, нужно ввести свою фамилию.

• Отвечать на задачи можно не более одного раза. В случае неправильного ответа система приведет контрпример, но исправить ответ не позволит.

• По окончании выполнения контрольной работы ученику нужно нажать клавишу

$\boxed{\textbf{ЗАКОНЧИТЬ}}$

и убедиться в том, что появилось сообщение

$\boxed{\textbf{КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ЗАКОНЧЕНА}}$

Учитель может просматривать результаты контрольной работы, нажав клавишу

$\boxed{\textbf{АНАЛИЗ ОТВЕТОВ}}$

Появится диалоговое окно (рис. 11) в котором нужно ввести пароль 123456789.

4. Задачи и ответы

4.1. Алгебраические уравнения и метод интервалов

Задача 4.1.1. *При каких условиях уравнение*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

имеет три корня?

Ответ: $b^2-4c>0$ И $1+b+c\neq 0$.

Задача 4.1.2. *При каких условиях уравнение*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

имеет не более двух корней?

Ответ: $b^2-4c\leqslant 0$ ИЛИ $1+b+c=0$.

Задача 4.1.3. *При каких условиях уравнение*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

имеет не менее двух корней?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$ И $1 + b + c \neq 0$).

Задача 4.1.4. *При каких условиях уравнение*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

имеет меньше двух корней?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$ ИЛИ ($b = -2$ И $c = 1$).

Задача 4.1.5. *При каких условиях уравнение*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

имеет ровно один корень?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ ИЛИ ($b = -2$ И $c = 1$).

Задача 4.1.6. *При каких условиях уравнение*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

имеет более одного корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$ И $1 + b + c \neq 0$).

Задача 4.1.7. *При каких условиях количество корней уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

отличается от одного?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$ И $1 + b + c \neq 0$).

Задача 4.1.8. *При каких условиях число* 1 *является корнем кратности* 2 *для уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $1 + b + c = 0$ И ($b \neq -2$ ИЛИ $c \neq 1$).

Задача 4.1.9. *При каких условиях число* 1 *является корнем кратности* 1 *для уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.1.10. *При каких условиях число* 1 *является корнем кратности* 3 *для уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $b = -2$ И $c = 1$.

Задача 4.1.11. *При каких условиях число* 1 *не является корнем кратности* 3 *для уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $b \neq -2$ ИЛИ $c \neq 1$.

Задача 4.1.12. *При каких условиях число* 1 *является кратным корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $1 + b + c = 0$.

Задача 4.1.13. *При каких условиях число* 1 *не является кратным корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.1.14. *При каких условиях число* 0 *является корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $c = 0$.

Задача 4.1.15. *При каких условиях число* 0 *не является корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $c \neq 0$.

Задача 4.1.16. *При каких условиях число* 0 *является корнем кратности* 1 *для уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $c = 0$ И $b \neq 0$.

Задача 4.1.17. *При каких условиях число* 0 *является корнем кратности* 2 *для уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c) = 0$$

Ответ: $c = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.1.18. *При каких условиях число* 0 *не является корнем кратности* 2 *для уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

Ответ: $c \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.1.19. *При каких условиях число* 0 *является кратным корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

Ответ: $c=0$ И $b=0$.

Задача 4.1.20. *При каких условиях число* 0 *не является кратным корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

Ответ: $c \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.1.21. *При каких условиях число* 2 *является корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

Ответ: $4+2b+c=0$.

Задача 4.1.22. *При каких условиях число* 2 *не является корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

Ответ: $4+2b+c \neq 0$.

Задача 4.1.23. *При каких условиях число* 2 *является кратным корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

Ответ: $c=4$ И $b=-4$.

Задача 4.1.24. *При каких условиях число* 2 *не является кратным корнем уравнения*

$$(x-1)(x^2+bx+c)=0$$

Ответ: $c \neq 4$ ИЛИ $b \neq -4$.

Задача 4.1.25. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$(x-1)(x^2+bx+c)\geqslant 0$$

является объединением непересекающихся отрезка и луча?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.1.26. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$(x-1)(x^2+bx+c) \geqslant 0$$

не является объединением непересекающихся отрезка и луча?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$ ИЛИ $1 + b + c = 0$.

Задача 4.1.27. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$(x-1)(x^2+bx+c) \leqslant 0$$

является объединением непересекающихся отрезка и луча?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.1.28. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$(x-1)(x^2+bx+c) \leqslant 0$$

не является объединением непересекающихся отрезка и луча?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$ ИЛИ $1 + b + c = 0$.

Задача 4.1.29. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$(x-1)(x^2+bx+c) > 0$$

является объединением непересекающихся отрезка и луча, у которых конец луча не является концом интервала?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.1.30. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$(x-1)(x^2+bx+c) > 0$$

не является объединением непересекающихся отрезка и луча, у которых конец луча не является концом интервала?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$ ИЛИ $1 + b + c = 0$.

Задача 4.1.31. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$(x-1)(x^2+bx+c) < 0$$

является объединением непересекающихся отрезка и луча, у которых конец луча не является концом интервала?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.1.32. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$(x-1)(x^2+bx+c) < 0$$

не является объединением непересекающихся отрезка и луча, у которых конец луча не является концом интервала?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$ ИЛИ $1 + b + c = 0$.

4.2. График функции

Задача 4.2.1. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

целиком расположен в верхней полуплоскости?

Ответ: $(b^2 - 4a < 0$ И $a > 0)$ ИЛИ $(a = 0$ И $b = 0)$.

Задача 4.2.2. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

симметричен относительно оси ординат?

Ответ: $b = 0$.

Задача 4.2.3. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

не имеет общих точек с осью абсцисс?

Ответ: $b^2 - 4a < 0$ ИЛИ $(a = 0$ И $b = 0)$.

Задача 4.2.4. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

имеет ровно одну общую точку с осью абсцисс?

Ответ: $b^2 - 4a = 0$.

Задача 4.2.5. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

имеет ровно две общие точки с осью абсцисс?

Ответ: $b^2 - 4a > 0$ И $a \neq 0$.

Задача 4.2.6. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

не симметричен относительно оси ординат?

Ответ: $b \neq 0$.

Задача 4.2.7. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

имеет хотя бы одну общую точку с осью абсцисс?

Ответ: $(a = 0$ И $b \neq 0)$ ИЛИ $(a \neq 0$ И $b^2 - 4a \geqslant 0)$.

Задача 4.2.8. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является прямой?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.2.9. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

не является прямой?

Ответ: $a \neq 0$.

Задача 4.2.10. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является горизонтальной прямой?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.2.11. *При каких условиях график функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

не является горизонтальной прямой?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.2.12. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит в первой четверти?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} < 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 > 0.$

Задача 4.2.13. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и не лежит в первой четверти?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} \geqslant 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 \leqslant 0.$

Задача 4.2.14. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит во второй четверти?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} > 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 > 0.$

Задача 4.2.15. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и не лежит во второй четверти?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} \leqslant 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 \leqslant 0.$

Задача 4.2.16. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит в третьей четверти?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} > 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 < 0.$

Задача 4.2.17. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и не лежит в третьей четверти?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} \leqslant 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 \geqslant 0$.

Задача 4.2.18. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит в четвертой четверти?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} < 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 < 0$.

Задача 4.2.19. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и не лежит в четвертой четверти?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} \geqslant 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 \geqslant 0$.

Задача 4.2.20. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит в верхней полуплоскости?

Ответ: $a \neq 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 > 0$.

Задача 4.2.21. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит в нижней полуплоскости?

Ответ: $a \neq 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 < 0$.

Задача 4.2.22. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит в левой полуплоскости?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} > 0$.

Задача 4.2.23. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит в правой полуплоскости?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} < 0$.

Задача 4.2.24. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит на одной из координатных осей?

Ответ: $a \neq 0$ И $(\dfrac{b}{2a} = 0$ ИЛИ $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 = 0)$.

Задача 4.2.25. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и не лежит ни на одной из координатных осей?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} \neq 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 \neq 0$.

Задача 4.2.26. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит на оси абсцисс?

Ответ: $a \neq 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 = 0$.

Задача 4.2.27. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует не и лежит на оси абсцисс?

Ответ: $a \neq 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 \neq 0$.

Задача 4.2.28. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит на оси ординат?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} = 0.$

Задача 4.2.29. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и не лежит на оси ординат?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} \neq 0.$

Задача 4.2.30. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит на верхней части оси ординат?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} \neq 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 > 0.$

Задача 4.2.31. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит на нижней части оси ординат?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} \neq 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 < 0.$

Задача 4.2.32. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит на правой части оси абсцисс?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} < 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 = 0.$

Задача 4.2.33. *При каких условиях вершина графика функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

существует и лежит на левой части оси абсцисс?

Ответ: $a \neq 0$ И $\dfrac{b}{2a} > 0$ И $a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{2a} + 1 = 0.$

4.3. Задачи на экстремум

Задача 4.3.1. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

не имеет экстремумов?

Ответ: $b^2 - 3c \leqslant 0$.

Задача 4.3.2. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет хотя бы один экстремум?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$.

Задача 4.3.3. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$.

Задача 4.3.4. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два положительных экстремума?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.3.5. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два отрицательных экстремума?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.3.6. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума разных знаков?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.3.7. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой положителен?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b < 0$ И $c = 0$.

Задача 4.3.8. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой отрицателен?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b > 0$ И $c = 0$.

Задача 4.3.9. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, хотя бы один из которых равен 0*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $c = 0$.

Задача 4.3.10. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а второй не равен* 0*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \neq 0$ И $c = 0$.

Задача 4.3.11. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой неположителен?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \geqslant 0$ И $c = 0$.

Задача 4.3.12. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой неотрицателен?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \leqslant 0$ И $c = 0$.

Задача 4.3.13. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой больше* 1*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b < -1$ И $c = 0$.

Задача 4.3.14. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой не больше* 1*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \geqslant -1$ И $c = 0$.

Задача 4.3.15. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой меньше* 1*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b > -1$ И $c = 0$.

Задача 4.3.16. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой не меньше* 1*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \leqslant -1$ И $c = 0$.

Задача 4.3.17. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой больше* -1*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b < 1$ И $c = 0$.

Задача 4.3.18. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0*, а другой не больше* -1*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \geqslant 1$ И $c = 0$.

Задача 4.3.19. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0, *а другой меньше* -1*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b > 1$ И $c = 0$.

Задача 4.3.20. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, один из которых равен 0, *а другой не меньше* -1*?*

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \leqslant 1$ И $c = 0$.

Задача 4.3.21. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, значения которых противоположны?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b = 0$.

Задача 4.3.22. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, значения которых не противоположны?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \neq 0$.

Задача 4.3.23. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, значения которых обратны?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $c = 1$.

Задача 4.3.24. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два экстремума, значения которых не являются обратными?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $c \neq 1$.

Задача 4.3.25. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

хотя бы одну точку, подозрительную на экстремум (точку, в которой касательная к графику горизонтальна)?

Ответ: $b^2 - 3c \geqslant 0$.

Задача 4.3.26. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

хотя ровно одну точку, подозрительную на экстремум (точку, в которой касательная к графику горизонтальна)?

Ответ: $b^2 - 3c = 0$.

Задача 4.3.27. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

хотя ровно одну точку, подозрительную на экстремум (точку, в которой касательная к графику горизонтальна), причём абсцисса этой точки положительна?

Ответ: $b^2 - 3c = 0$ И $b < 0$.

Задача 4.3.28. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

хотя ровно одну точку, подозрительную на экстремум (точку, в которой касательная к графику горизонтальна), причём абсцисса этой точки отрицательна?

Ответ: $b^2 - 3c = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.3.29. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

хотя ровно одну точку, подозрительную на экстремум (точку, в которой касательная к графику горизонтальна), причём абсцисса этой точки неположительна?

Ответ: $b^2 - 3c = 0$ И $b \geqslant 0$.

Задача 4.3.30. *При каких условиях функция*

$$x^3 + bx^2 + cx + 1$$

хотя ровно одну точку, подозрительную на экстремум (точку, в которой касательная к графику горизонтальна), причём абсцисса этой точки неотрицательна?

Ответ: $b^2 - 3c = 0$ И $b \leqslant 0$.

4.4. Определенный интеграл

Задача 4.4.1. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от -1 *до* 1 *положителен?*

Ответ: $a(\cos(b - 1) - \cos(b + 1)) > 0$.

Задача 4.4.2. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от -1 *до* 1 *отрицателен?*

Ответ: $a(\cos(b - 1) - \cos(b + 1)) < 0$.

Задача 4.4.3. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 0 *до* 2 *отрицателен?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b + 2)) < 0$.

Задача 4.4.4. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 0 *до* 2 *положителен?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b + 2)) > 0$.

Задача 4.4.5. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 0 *до* 2 *равен нулю?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b + 2)) = 0$.

Задача 4.4.6. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 0 *до* 2 *не равен нулю?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b + 2)) \neq 0$.

Задача 4.4.7. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 0 *до* 2 *неотрицателен?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b+2)) \geqslant 0$.

Задача 4.4.8. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 0 *до* 2 *неположителен?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b+2)) \leqslant 0$.

Задача 4.4.9. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от -1 *до* 1 *равен нулю?*

Ответ: $a(\cos(b-1) - \cos(b+1)) = 0$.

Задача 4.4.10. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от -1 *до* 1 *не равен нулю?*

Ответ: $a(\cos(b-1) - \cos(b+1)) \neq 0$.

Задача 4.4.11. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от -1 *до* 1 *неположителен?*

Ответ: $a(\cos(b-1) - \cos(b+1)) \leqslant 0$.

Задача 4.4.12. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от -1 *до* 1 *неотрицателен?*

Ответ: $a(\cos(b-1) - \cos(b+1)) \geqslant 0$.

Задача 4.4.13. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от -1 *до* 1 *не меньше* 0 *и не больше* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b-1) - \cos(b+1)) > 0$ И $a(\cos(b-1) - \cos(b+1)) < 1$.

Задача 4.4.14. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 0 *до* 2 *не меньше* 0 *и не больше* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b+2)) > 0$ И $a(\cos(b) - \cos(b+2)) < 1$.

Задача 4.4.15. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *больше интеграла от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) > a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.16. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *меньше интеграла от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) < a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.17. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *не больше интеграла от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \leqslant a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.18. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x + b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *не меньше интеграла от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \geqslant a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.19. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *в два раза превосходит интеграл от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = 2a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.20. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *равен интегралу от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.21. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *не равен интегралу от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \neq a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.22. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *противоположен интегралу от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = -a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.23. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *не противоположен интегралу от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \neq -a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.24. *При каких условиях модуль определенного интеграла от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *равен интегралу от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b+1)) \neq 0$ И
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = a(\cos(b) - \cos(b+1))$ ИЛИ
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = -a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.25. *При каких условиях модуль определенного интеграла от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *не равен интегралу от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b+1)) < 0$ ИЛИ
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \neq a(\cos(b) - \cos(b+1))$ И
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \neq -a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.26. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *равен модулю интеграла от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b+1)) \geqslant 0$ И
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = a(\cos(b) - \cos(b+1))$ ИЛИ
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = -a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.27. *При каких условиях определенный интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *не равен модулю интеграла от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b) - \cos(b+1)) < 0$ ИЛИ
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \neq a(\cos(b) - \cos(b+1))$ И
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \neq -a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.28. *При каких условиях модуль определенного интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *равен модулю интеграла от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = a(\cos(b) - \cos(b+1))$ ИЛИ
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) = -a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.29. *При каких условиях модуль определенного интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *не равен модулю интеграла от этой же функции в пределах от* 0 *до* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \neq a(\cos(b) - \cos(b+1))$ И
$a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \neq -a(\cos(b) - \cos(b+1))$.

Задача 4.4.30. *При каких условиях модуль определенного интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *не превосходит* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \leqslant 1$ И $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) \geqslant -1$.

Задача 4.4.31. *При каких условиях модуль определенного интеграл от функции*

$$y = a\sin(x+b)$$

в пределах от 1 *до* 2 *превосходит* 1*?*

Ответ: $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) > 1$ ИЛИ $a(\cos(b+1) - \cos(b+2)) < -1$.

4.5. Исследование функции

Задача 4.5.1. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

всюду возрастает?

Ответ: $b^2 - 3c \leqslant 0$.

Задача 4.5.2. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не всюду возрастает?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$.

Задача 4.5.3. *При каких условиях график функции*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

проходит через начало координат?

Ответ: $d = 0$.

Задача 4.5.4. *При каких условиях график функции*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не проходит через начало координат?

Ответ: $d \neq 0$.

Задача 4.5.5. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

нечетная?

Ответ: $b = 0$ И $d = 0$.

Задача 4.5.6. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не является нечётной?

Ответ: $b \neq= 0$ ИЛИ $d \neq 0$.

Задача 4.5.7. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

имеет хотя бы один экстремум?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$.

Задача 4.5.8. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

имеет два экстремума?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$.

Задача 4.5.9. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не имеет ни одного экстремума?

Ответ: $b^2 - 3c \leqslant 0$.

Задача 4.5.10. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

имеет два экстремума при положительных x?

Ответ: $b^2 - 3c \leqslant 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.5.11. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не имеет ни одного экстремума при положительных x?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \geqslant 0$ И $c \geqslant 0$ ИЛИ $b^2 - 3c \leqslant 0$.

Задача 4.5.12. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

имеет два экстремума при отрицательных x?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.5.13. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не имеет ни одного экстремума при отрицательных x?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $b \leqslant 0$ И $c \geqslant 0$ ИЛИ $b^2 - 3c \leqslant 0$.

Задача 4.5.14. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

имеет один экстремум при отрицательных x и один экстремум при положительных x?

Ответ: $b^2 - 3c > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.5.15. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

выпукла вниз на всей положительной полуоси?

Ответ: $b \geqslant 0$.

Задача 4.5.16. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не выпукла вниз на всей положительной полуоси?

Ответ: $b < 0$.

Задача 4.5.17. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

выпукла вверх на всей положительной полуоси?

Ответ: $b \leqslant< 0$.

Задача 4.5.18. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не на всей отрицательной полуоси выпукла вверх?

Ответ: $b > 0$.

Задача 4.5.19. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

возрастает в некоторой окрестности $x = 0$?

Ответ: $c > 0$ ИЛИ ($c = 0$ И $b = 0$).

Задача 4.5.20. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не является возрастающей в некоторой окрестности $x = 0$?

Ответ: $c \leqslant 0$ И ($c \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$).

Задача 4.5.21. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

убывает в некоторой окрестности $x = 0$*?*

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.5.22. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не является убывающей в некоторой окрестности $x = 0$*?*

Ответ: $c \geqslant 0$.

Задача 4.5.23. *При каких условиях график функции*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

симметричен относительно начала координат?

Ответ: $b = 0$ И $d = 0$.

Задача 4.5.24. *При каких условиях график функции*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

не симметричен относительно начала координат?

Ответ: $b \neq 0$ ИЛИ $d \neq 0$.

Задача 4.5.25. *При каких условиях число* $x = 1$ *является корнем функции*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d,$$

а график функции при этом симметричен относительно начала координат?

Ответ: $b = 0$ И $d = 0$ И $c = -1$.

Задача 4.5.26. *При каких условиях число* $x = 1$ *является корнем функции*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d,$$

а график функции при этом не симметричен относительно начала координат?

Ответ: $(b \neq 0$ ИЛИ $d \neq 0)$ И $c = -1$.

Задача 4.5.27. *При каких условиях график функции*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

проходит через начало координат, и при этом симметричен относительно начала координат?

Ответ: $b = 0$ И $d = 0$.

Задача 4.5.28. *При каких условиях график функции*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

проходит через начало координат, и при этом не симметричен относительно начала координат?

Ответ: $b \neq 0$ ИЛИ $d = 0$.

Задача 4.5.29. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

нечётна, и при этом её график проходит через точку $(-1, 0)$*?*

Ответ: $b = 0$ И $d = 0$ И $c = -1$.

Задача 4.5.30. *При каких условиях функция*

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

нечётна, и при этом её график не проходит через точку $(-1, 0)$*?*

Ответ: $b = 0$ И $d = 0$ И $c \neq -1$.

4.6. Квадратные уравнения и неравенства

Задача 4.6.1. *При каких значениях параметра a неравенство*

$$ax > x^2$$

не имеет решений?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.6.2. *При каких значениях параметра a все решения неравенства*

$$ax > x^2$$

отрицательны?

Ответ: $a < 0$.

Задача 4.6.3. *При каких значениях параметра а все решения неравенства*

$$ax > x^2$$

положительны?

Ответ: $a > 0$.

Задача 4.6.4. *При каких условиях множество решений уравнения*

$$ax^2 + 4x + c = 0$$

пусто?

Ответ: $4 - ac < 0$.

Задача 4.6.5. *При каких условиях множество решений уравнения*

$$ax^2 + 4x + c = 0$$

не пусто?

Ответ: $4 - ac \geqslant 0$ ИЛИ $a = 0$.

Задача 4.6.6. *При каких условиях множество решений уравнения*

$$ax^2 + 4x + c = 0$$

состоит ровно из одной точки?

Ответ: $4 - ac = 0$ ИЛИ $a > 0$.

Задача 4.6.7. *При каких условиях множество решений уравнения*

$$ax^2 + 4x + c = 0$$

состоит ровно из двух точек?

Ответ: $4 - ac > 0$ И $a \neq 0$.

Задача 4.6.8. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

пусто?

Ответ: $4 - ac \leqslant 0$ И $a < 0$.

Задача 4.6.9. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

не пусто?

Ответ: $4 - ac > 0$ ИЛИ $a \geqslant 0$.

Задача 4.6.10. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

состоит из всей числовой прямой без одной точки?

Ответ: $4 - ac = 0$ ИЛИ $a > 0$.

Задача 4.6.11. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

является ограниченным интервалом?

Ответ: $4 - ac > 0$ И $a < 0$.

Задача 4.6.12. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей?

Ответ: $4 - ac \geqslant 0$ И $a > 0$.

Задача 4.6.13. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

является всей числовой прямой?

Ответ: $4 - ac < 0$ И $a > 0$.

Задача 4.6.14. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей, один из которых целиком лежит на положительной полуоси, другой на отрицательной?

Ответ: $c < 0$ И $a > 0$.

Задача 4.6.15. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c < 0$$

является интервал, целиком расположенный на отрицательной полуоси?

Ответ: $c > 0$ И $a > 0$ И $4 - 4ac > 0$.

Задача 4.6.16. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c < 0$$

является интервал, имеющим точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $c < 0$ И $a > 0$.

Задача 4.6.17. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей, один из которых расположен на отрицательной полуоси, а другой имеет точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $c > 0$ И $a > 0$ И $4 - 4ac > 0$.

Задача 4.6.18. *При каких условиях неравенство*

$$ax^2 + 4x + c > 0$$

верно для всех положительных x?

Ответ: $a > 0$ И $(4 - 4ac < 0$ ИЛИ $(4 - 4ac \geqslant$ И $c \geqslant 0))$.

Задача 4.6.19. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c < 0$$

является непустым подмножеством отрицательной полуоси абсцисс?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac > 0$ И $c \geqslant 0$.

Задача 4.6.20. *При каких условиях неравенство*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac < 0$.

Задача 4.6.21. *При каких условиях неравенство*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a \leqslant 0$ ИЛИ $4 - 4ac \geqslant 0$.

Задача 4.6.22. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

является точкой?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac = 0$.

Задача 4.6.23. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \geqslant 0$$

является точкой?

Ответ: $a < 0$ И $4 - 4ac = 0$.

Задача 4.6.24. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

является отрезком ненулевой длины?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac > 0$.

Задача 4.6.25. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \geqslant 0$$

является отрезком ненулевой длины?

Ответ: $a < 0$ И $4 - 4ac > 0$.

Задача 4.6.26. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \geqslant 0$$

является объединением двух лучей, не имеющих общих точек?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac > 0$.

Задача 4.6.27. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

является объединением двух лучей, не имеющих общих точек?

Ответ: $a < 0$ И $4 - 4ac > 0$.

Задача 4.6.28. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \geqslant 0$$

является вся прямая?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac \leqslant 0$.

Задача 4.6.29. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

является вся прямая?

Ответ: $a < 0$ И $4 - 4ac \leqslant 0$.

Задача 4.6.30. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

является отрезок ненулевой длины, целиком расположенный на отрицательной полуоси?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.6.31. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

является отрезок ненулевой длины, имеющий точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $a > 0$ И $c < 0$.

Задача 4.6.32. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

является луч?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.6.33. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \geqslant 0$$

является объединением двух лучей, не имеющих общих точек, один из которых расположен на положительной полуоси, другой - на отрицательной?

Ответ: $a > 0$ И $c < 0$.

Задача 4.6.34. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \geqslant 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей, один из которых расположен на отрицательной полуоси, а другой имеет точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.6.35. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$ax^2 + 4x + c \leqslant 0$$

является непустым подмножеством отрицательной полуоси абсцисс?

Ответ: $a > 0$ И $4 - 4ac > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.6.36. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 - 2ax - 1| = a + 3$$

не имеет решений?

Ответ: $a < -3$.

Задача 4.6.37. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 - 2ax - 1| = a + 3$$

имеет два решения?

Ответ: $a < -3$ ИЛИ $(a > -1$ И $a < 2)$.

Задача 4.6.38. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 - 2ax - 1| = a + 3$$

имеет три решения?

Ответ: $a = -1$ ИЛИ $a = 2$.

Задача 4.6.39. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 - 2ax - 1| = a + 3$$

имеет четыре решения?

Ответ: $(a > -3$ И $a < -1)$ ИЛИ $a > 2$.

Задача 4.6.40. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 - 2ax - 1| = a + 3$$

имеет не менее двух решений?

Ответ: $a \geqslant -3$.

Задача 4.6.41. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 - 2ax - 1| = a + 3$$

имеет больше двух решений?

Ответ: $a \geqslant 2$ ИЛИ $(a > -3$ И $a \leqslant 1)$.

Задача 4.6.42. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 + 5x + 4| + |x^2 + 5x + 6| = a$$

не имеет решений?

Ответ: $a < 2$.

Задача 4.6.43. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 + 5x + 4| + |x^2 + 5x + 6| = a$$

имеет бесконечно много решений?

Ответ: $a = 2$.

Задача 4.6.44. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 + 5x + 4| + |x^2 + 5x + 6| = a$$

имеет два решения?

Ответ: $a > 5/2$.

Задача 4.6.45. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 + 5x + 4| + |x^2 + 5x + 6| = a$$

имеет три решения?

Ответ: $a = 5/2$.

Задача 4.6.46. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|x^2 + 5x + 4| + |x^2 + 5x + 6| = a$$

имеет четыре решения?

Ответ: $a > 2$ И $a < 5/2$.

Задача 4.6.47. *При каких значениях параметра уравнение*

$$(a - 1)x^2 + 2x + a - 1 = 0$$

имеет ровно один корень?

Ответ: $a = 0$ ИЛИ $a = 1$ ИЛИ $a = 2$.

4.7. Комплексные числа

Задача 4.7.1. *При каких условиях число $a + bi$ находится на расстоянии не меньше 3 от начала координат?*

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 9$.

Задача 4.7.2. *При каких условиях число $a + bi$ находится на расстоянии не меньше 2 от числа i?*

Ответ: $a^2 + (b - 1)^2 \geqslant 4$.

Задача 4.7.3. *При каких условиях число модуль числа $a + bi$ больше 2?*

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 4$.

Задача 4.7.4. *При каких условиях аргумент числа $a + bi$ определен и находится в пределах от 0 до $\pi/2$?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a > 0$ И $b > 0$.

Задача 4.7.5. *При каких условиях аргумент числа $a + bi$ определен и находится в пределах от $\pi/2$ до π?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a < 0$ И $b > 0$.

Задача 4.7.6. *При каких условиях аргумент числа $a + bi$ определен и находится в пределах от π до $3\pi/2$?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a < 0$ И $b < 0$.

Задача 4.7.7. *При каких условиях аргумент числа $a + bi$ определен и находится в пределах от $3\pi/2$ до 2π?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a > 0$ И $b < 0$.

Задача 4.7.8. *При каких условиях модуль числа $a+bi$ положителен и меньше 3?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 0$ И $a^2 + b^2 < 9$.

Задача 4.7.9. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 1 и меньше 3?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 1$ И $a^2 + b^2 < 9$.

Задача 4.7.10. *При каких условиях аргумент числа $a+bi$ определен и находится в пределах от 0 до $\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a > 0$ И $b > 0$ И $a > b$.

Задача 4.7.11. *При каких условиях аргумент числа $a+bi$ определен и находится в пределах от $\pi/4$ до $\pi/2$?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a > 0$ И $b > 0$ И $a < b$.

Задача 4.7.12. *При каких условиях аргумент числа $a+bi$ определен и находится в пределах от $\pi/2$ до $3\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a < 0$ И $b > 0$ И $-a < b$.

Задача 4.7.13. *При каких условиях аргумент числа $a+bi$ определен и находится в пределах от $3\pi/4$ до π?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a < 0$ И $b > 0$ И $-a > b$.

Задача 4.7.14. *При каких условиях аргумент числа $a+bi$ определен и находится в пределах от π до $5\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a < 0$ И $b < 0$ И $-a > b$.

Задача 4.7.15. *При каких условиях аргумент числа $a+bi$ определен и находится в пределах от $5\pi/4$ до $3\pi/2$?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a < 0$ И $b < 0$ И $-a < b$.

Задача 4.7.16. *При каких условиях аргумент числа $a + bi$ определен и находится в пределах от $3\pi/2$ до $7\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a > 0$ И $b < 0$ И $a < -b$.

Задача 4.7.17. *При каких условиях аргумент числа $a + bi$ определен и находится в пределах от $7\pi/4$ до 2π?*

Ответ: $a^2 + b^2 \neq 0$ И $a > 0$ И $b < 0$ И $a > -b$.

Задача 4.7.18. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2, а его аргумент находится в пределах от 0 до $\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a > 0$ И $b > 0$ И $a > b$.

Задача 4.7.19. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2, а его аргумент находится в пределах от $\pi/4$ до $\pi/2$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a > 0$ И $b > 0$ И $a < b$.

Задача 4.7.20. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2, а его аргумент находится в пределах от $\pi/2$ до $3\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a < 0$ И $b > 0$ И $-a < b$.

Задача 4.7.21. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2, а его аргумент находится в пределах от $3\pi/4$ до π?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a < 0$ И $b > 0$ И $-a > b$.

Задача 4.7.22. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2, а его аргумент находится в пределах от π до $5\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a < 0$ И $b < 0$ И $-a > -b$.

Задача 4.7.23. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2, а его аргумент находится в пределах от $5\pi/4$ до $3\pi/2$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a < 0$ И $b < 0$ И $-a < -b$.

Задача 4.7.24. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2, а его аргумент находится в пределах от $3\pi/2$ до $7\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a > 0$ И $b < 0$ И $a < -b$.

Задача 4.7.25. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2, а его аргумент находится в пределах от $7\pi/4$ до 2π?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a > 0$ И $b < 0$ И $a > -b$.

Задача 4.7.26. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2 и меньше 4, а его аргумент находится в пределах от 0 до $\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a^2 + b^2 < 16$ И $a > 0$ И $b > 0$ И $a > b$.

Задача 4.7.27. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2 и меньше 4, а его аргумент находится в пределах от $\pi/4$ до $\pi/2$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a^2 + b^2 < 16$ И $a > 0$ И $b > 0$ И $a < b$.

Задача 4.7.28. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2 и меньше 4, а его аргумент находится в пределах от $\pi/2$ до $3\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a^2 + b^2 < 16$ И $a < 0$ И $b > 0$ И $-a < b$.

Задача 4.7.29. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2 и меньше 4, а его аргумент находится в пределах от $3\pi/4$ до π?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a^2 + b^2 < 16$ И $a < 0$ И $b > 0$ И $-a > b$.

Задача 4.7.30. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2 и меньше 4, а его аргумент находится в пределах от π до $5\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a^2 + b^2 < 16$ И $a < 0$ И $b < 0$ И $-a > -b$.

Задача 4.7.31. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2 и меньше 4, а его аргумент находится в пределах от $5\pi/4$ до $3\pi/2$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a^2 + b^2 < 16$ И $a < 0$ И $b < 0$ И $-a < -b$.

Задача 4.7.32. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2 и меньше 4, а его аргумент находится в пределах от $3\pi/2$ до $7\pi/4$?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a^2 + b^2 < 16$ И $a > 0$ И $b < 0$ И $a < -b$.

Задача 4.7.33. *При каких условиях модуль числа $a + bi$ больше 2 и меньше 4, а его аргумент находится в пределах от $7\pi/4$ до 2π?*

Ответ: $a^2 + b^2 > 4$ И $a^2 + b^2 < 16$ И $a > 0$ И $b < 0$ И $a > -b$.

4.8. Кривые на плоскости

Задача 4.8.1. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт окружность?

Ответ: $a = 1$ И $b > 0$.

Задача 4.8.2. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт окружность?

Ответ: $a \neq 1$ И $b \leqslant 0$.

Задача 4.8.3. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт точку?

Ответ: $a > 0$ И $b = 0$.

Задача 4.8.4. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт точку?

Ответ: $a \leqslant 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.8.5. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт прямую?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.8.6. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт прямую?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.8.7. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт горизонтальную прямую?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.8.8. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт горизонтальную прямую?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.8.9. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт две параллельные прямые?

Ответ: $a = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.8.10. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт две параллельные прямые?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \leqslant 0$.

Задача 4.8.11. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт две пересекающиеся прямые?

Ответ: $a < 0$ И $b = 0$.

Задача 4.8.12. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт две пересекающиеся прямые?

Ответ: $a \geqslant 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.8.13. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт пустое множество?

Ответ: $a > 0$ И $b < 0$.

Задача 4.8.14. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт непустое множество?

Ответ: $a \leqslant 0$ ИЛИ $b \geqslant 0$.

Задача 4.8.15. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт эллипс (окружность и точку в этой задаче считаем частными случаями эллипса)?

Ответ: $a > 0$.

Задача 4.8.16. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт эллипс (окружность и точку в этой задаче считаем частными случаями эллипса)?

Ответ: $a \leqslant 0$.

Задача 4.8.17. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой)?

Ответ: $a > 0$ И $a \neq 1$ И $b > 0$.

Задача 4.8.18. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой)?

Ответ: $a \leqslant 0$ ИЛИ $a = 1$ ИЛИ $b \leqslant 0$.

Задача 4.8.19. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), вытянутый вдоль оси абсцисс?

Ответ: $a > 0$ И $a < 1$ И $b > 0$.

Задача 4.8.20. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), вытянутый вдоль оси абсцисс?

Ответ: $a \leqslant 0$ ИЛИ $a \geqslant 1$ ИЛИ $b \leqslant 0$.

Задача 4.8.21. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), вытянутый вдоль оси ординат?

Ответ: $a > 0$ И $a > 1$ И $b > 0$.

Задача 4.8.22. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), вытянутый вдоль оси ординат?

Ответ: $a \leqslant 0$ ИЛИ $a \leqslant 1$ ИЛИ $b \leqslant 0$.

Задача 4.8.23. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), большая полуось которого в два раза больше малой полуоси?

Ответ: $a > 0$ И ($a = 4$ ИЛИ $4a = 1$) И $b > 0$.

Задача 4.8.24. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), большая полуось которого находится на оси абсцисс?

Ответ: $a > 0$ И $a > 1$ И $b > 0$.

Задача 4.8.25. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), большая полуось которого находится на оси абсцисс и в три раза превышает малую полуось?

Ответ: $a = 9$ И $b > 0$.

Задача 4.8.26. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), большая полуось которого находится на оси ординат?

Ответ: $a > 0$ И $a < 1$ И $b > 0$.

Задача 4.8.27. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт невырожденный эллипс (не являющийся окружностью или точкой), большая полуось которого находится на оси ординат и в три раза превышает малую полуось?

Ответ: $9a = 1$ И $b > 0$.

Задача 4.8.28. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт гиперболу?

Ответ: $a < 0$ И $b \neq 0$.

Задача 4.8.29. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

не задаёт гиперболу?

Ответ: $a \geqslant 0$ ИЛИ $b = 0$.

Задача 4.8.30. *При каких условиях уравнение*

$$ax^2 + y^2 = b$$

задаёт вырожденный случай гиперболы — две пересекающиеся прямые?

Ответ: $a < 0$ И $b = 0$.

4.9. Линейные уравнения и неравенства

Задача 4.9.1. *При каких значениях параметра неравенство*

$$|x + 2| - |2x + 8| \geqslant a$$

не имеет решений?

Ответ: $a > 2$.

Задача 4.9.2. *При каких значениях параметра неравенство*

$$|x + 2| - |2x + 8| \geqslant a$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a = 2$.

Задача 4.9.3. *При каких значениях параметра неравенство*

$$|x + 2| - |2x + 8| \geqslant a$$

имеет больше одного решения?

Ответ: $a < 2$.

Задача 4.9.4. *При каких значениях параметра неравенство*

$$a - x > |1 - |x||$$

имеет больше одного решения?

Ответ: $a \leqslant -1$.

Задача 4.9.5. *При каких значениях параметра все решения неравенства*

$$a - x > |1 - |x||$$

не положительны?

Ответ: $a > -1$ И $a \leqslant 1$.

Задача 4.9.6. *При каких значениях параметра неравенство*

$$\sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{x-a}$$

не имеет решений?

Ответ: $a < 2$.

Задача 4.9.7. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|2x+3| + |2x-3| = ax + 6$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a \geqslant 4$ ИЛИ $a \leqslant -4$.

Задача 4.9.8. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|2x+3| + |2x-3| = ax + 6$$

имеет два решения?

Ответ: $a \neq 0$ И $a < 4$ И $a > -4$.

Задача 4.9.9. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|2x+3| + |2x-3| = ax + 6$$

имеет бесконечно много решений?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.9.10. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|5x+2| + |5x-2| = ax - 2$$

не имеет решений?

Ответ: $a > -5$ И $a < 5$.

Задача 4.9.11. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|5x+2| + |5x-2| = ax - 2$$

имеет одно решение?

Ответ: $a \geqslant 10$ ИЛИ $a \leqslant -10$.

Задача 4.9.12. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|5x+2|+|5x-2|=ax-2$$

имеет одно отрицательное решение?

Ответ: $a \leqslant -10$.

Задача 4.9.13. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|5x+2|+|5x-2|=ax-2$$

имеет одно положительное решение?

Ответ: $a \geqslant 10$.

Задача 4.9.14. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|5x+2|+|5x-2|=ax-2$$

имеет два решения?

Ответ: $(a < 10$ И $a > -10)$ И $(a \geqslant 5$ И $a \leqslant -5)$.

Задача 4.9.15. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|5x+2|+|5x-2|=ax-2$$

имеет два положительных решения?

Ответ: $a \geqslant 5$ И $a < 10$.

Задача 4.9.16. *При каких значениях параметра уравнение*

$$|5x+2|+|5x-2|=ax-2$$

имеет два решения разных знаков?

Ответ: $a > -10$ И $a \leqslant -5$.

Задача 4.9.17. *При каких значениях параметра c уравнение*

$$|x-a|+|x-b|=c$$

не имеет решений при любых значениях параметров a *и* b*?*

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.9.18. *При каких значениях параметра уравнение*

$$\sqrt{a-x} = 2-x$$

не имеет решений?

Ответ: $a < 7/4$.

Задача 4.9.19. *При каких значениях параметра уравнение*

$$\sqrt{a-x} = 2-x$$

имеет одно решение?

Ответ: $a = 7/4$ ИЛИ $a > 2$.

Задача 4.9.20. *При каких значениях параметра уравнение*

$$\sqrt{a-x} = 2-x$$

имеет два решения?

Ответ: $a > 7/4$ И $a \leqslant 2$.

Задача 4.9.21. *При каких значениях параметра уравнение*

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$$

не имеет решений?

Ответ: $a < 0$ ИЛИ ($a > 0$ И $a < 2$).

Задача 4.9.22. *При каких значениях параметра уравнение*

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$$

имеет нулевое решение?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.9.23. *При каких значениях параметра уравнение*

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$$

имеет положительное решение?

Ответ: $a \geqslant 2$.

4.10. Модельные задачи

Задача 4.10.1. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет меньше 45 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} < 1.$

Задача 4.10.2. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет не меньше 45 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} \geqslant 1.$

Задача 4.10.3. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет больше 45 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} > 1.$

Задача 4.10.4. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет не больше 45 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} \leqslant 1.$

Задача 4.10.5. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет меньше 30 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} < 0.578.$

Задача 4.10.6. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет не меньше 30 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} \geqslant 0.578.$

Задача 4.10.7. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет больше 30 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} > 0.578.$

Задача 4.10.8. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет не больше 30 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} \leqslant 0.578.$

Задача 4.10.9. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет меньше 60 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} < 1.73.$

Задача 4.10.10. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет не меньше 60 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} \geqslant 1.73.$

Задача 4.10.11. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет больше 60 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} > 1.73$.

Задача 4.10.12. *Платформа движется с ненулевой скоростью V, перпендикулярно относительно платформы движется со скоростью U находящееся на ней тело. При каких условиях угол между движением платформы относительно земли и движением тела относительно земли будет не больше 60 градусов?*

Ответ: $\dfrac{U}{V} \leqslant 1.73$.

Задача 4.10.13. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн когда-нибудь наполнится?*

Ответ: $a > b$.

Задача 4.10.14. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн никогда не наполнится?*

Ответ: $a \leqslant b$.

Задача 4.10.15. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн наполнится в течение минуты или быстрее?*

Ответ: $a - b \geqslant V$.

Задача 4.10.16. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн не наполнится в течение минуты или быстрее?*

Ответ: $a - b < V$.

Задача 4.10.17. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн наполнится в течение часа или быстрее?*

Ответ: $60(a-b) \geqslant V$.

Задача 4.10.18. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн не наполнится в течение часа?*

Ответ: $60(a-b) < V$.

Задача 4.10.19. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн наполнится в течение суток или быстрее?*

Ответ: $1440(a-b) \geqslant V$.

Задача 4.10.20. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн не наполнится в течение суток?*

Ответ: $1440(a-b) < V$.

Задача 4.10.21. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн наполнится в течение недели или быстрее?*

Ответ: $10080(a-b) \geqslant V$.

Задача 4.10.22. *В бассейн объёмом V литров вливается вода со скоростью a литров в минуту и вытекает со скоростью b литров в минуту. Первоначально бассейн пустой. При каких условиях бассейн не наполнится в течение недели?*

Ответ: $10080(a-b) < V$.

4.11. Неравенства с параметрами

Задача 4.11.1. *При каких условиях неравенство*

$$x^2 + bx + c < 0$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$.

Задача 4.11.2. *При каких условиях неравенство*

$$x^2 + bx + c < 0$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$.

Задача 4.11.3. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c < 0$$

является интервалом?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$.

Задача 4.11.4. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c > 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей?

Ответ: $b^2 - 4c \geqslant 0$.

Задача 4.11.5. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c > 0$$

является вся прямая?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$.

Задача 4.11.6. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c < 0$$

является интервал, целиком расположенный на положительной полуоси?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.7. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c < 0$$

является интервал, целиком расположенный на отрицательной полуоси?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.8. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c < 0$$

является интервал, имеющим точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.11.9. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c > 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей, один из которых расположен на положительной полуоси, другой - на отрицательной?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.11.10. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c > 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей, один из которых расположен на положительной полуоси, а другой имеет точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.11. *При каких условиях множеством решений неравенства*

$$x^2 + bx + c > 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей, один из которых расположен на отрицательной полуоси, а другой имеет точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.12. *При каких условиях неравенство*

$$x^2 + bx + c > 0$$

верно для всех положительных x?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$ ИЛИ ($b^2 - 4c \geqslant 0$ И $b \geqslant 0$ И $c \geqslant 0$).

Задача 4.11.13. *При каких условиях неравенство*

$$x^2 + bx + c > 0$$

верно для всех отрицательных x?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$ ИЛИ ($b^2 - 4c \geqslant 0$ И $b \leqslant 0$ И $c \geqslant 0$).

Задача 4.11.14. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c < 0$$

является непустым подмножеством положительной полуоси абсцисс?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.15. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c < 0$$

является непустым подмножеством отрицательной полуоси абсцисс?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.16. *При каких условиях неравенство*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$.

Задача 4.11.17. *При каких условиях неравенство*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $b^2 - 4c \geqslant 0$.

Задача 4.11.18. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

является точкой?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$.

Задача 4.11.19. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

является отрезком ненулевой длины?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$.

Задача 4.11.20. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \geqslant 0$$

является объединением двух лучей, не имеющих общих точек?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$.

Задача 4.11.21. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \geqslant 0$$

является вся прямая?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$.

Задача 4.11.22. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

является отрезок ненулевой длины, целиком расположенный на положительной полуоси?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.23. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

является отрезок ненулевой длины, целиком расположенный на отрицательной полуоси?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.24. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

является отрезок ненулевой длины, имеющий точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.11.25. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \geqslant 0$$

является объединением двух лучей, не имеющих общих точек, один из которых расположен на положительной полуоси, другой - на отрицательной?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.11.26. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \geqslant 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей, один из которых целиком расположен на положительной полуоси, а другой имеет точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.27. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \geqslant 0$$

является объединением двух непересекающихся лучей, один из которых целиком расположен на отрицательной полуоси, а другой имеет точки как на положительной полуоси, так и на отрицательной?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.28. *При каких условиях неравенство*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

верно для всех положительных x?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$ ИЛИ $(b^2 - 4c \geqslant 0$ И $b \geqslant 0$ И $c \geqslant 0)$.

Задача 4.11.29. *При каких условиях неравенство*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

верно для всех отрицательных x?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$ ИЛИ $(b^2 - 4c \geqslant 0$ И $b \leqslant 0$ И $c \geqslant 0)$.

Задача 4.11.30. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

является непустым подмножеством положительной полуоси абсцисс?

Ответ: $b^2 - 4c \geqslant 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.11.31. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$x^2 + bx + c \leqslant 0$$

является непустым подмножеством отрицательной полуоси абсцисс?

Ответ: $b^2 - 4c \geqslant 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

4.12. Первообразная функция

Задача 4.12.1. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

всюду возрастает?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$ И $a > 0$ ИЛИ $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.12.2. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

всюду убывает?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$ И $a < 0$.

Задача 4.12.3. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

имеет как участки возрастания, так и участки убывания?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ ИЛИ $a = 0$ И $b \neq 0$.

Задача 4.12.4. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является многочленом третьей степени?

Ответ: $a \neq 0$.

Задача 4.12.5. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

не является многочленом третьей степени?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.12.6. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является многочленом второй степени?

Ответ: $a = 0$ И $b \neq 0$.

Задача 4.12.7. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

не является многочленом второй степени?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b = 0$.

Задача 4.12.8. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является линейной функцией?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.12.9. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

не является линейной функцией?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.12.10. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является многочленом степени не выше двух?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.12.11. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является многочленом степени выше двух?

Ответ: $a \neq 0$.

Задача 4.12.12. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является или кубической функцией, или линейной?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ ($a = 0$ И $b = 0$).

Задача 4.12.13. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является или кубической функцией, или квадратичной?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.12.14. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

не является ни кубической функцией, ни квадратичной?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.12.15. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является возрастающей линейной функцией?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.12.16. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является возрастающей функцией, но не линейной?

Ответ: $b^2 - 4a \leqslant 0$ И $a > 0$.

Задача 4.12.17. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является убывающей функцией, но не линейной?

Ответ: $b^2 - 4a \leqslant 0$ И $a < 0$.

Задача 4.12.18. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является линейной функцией, но не убывающей?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.12.19. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является возрастающим многочленом третьей степени?

Ответ: $b^2 - 4a \leqslant 0$ И $a > 0$.

Задача 4.12.20. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является убывающим многочленом третьей степени?

Ответ: $b^2 - 4a \leqslant 0$ И $a < 0$.

Задача 4.12.21. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является многочленом третьей степени, но не всюду возрастает?

Ответ: $b^2 - 4a > 0$ И $(a < 0$ ИЛИ $(a \neq 0)$.

Задача 4.12.22. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является многочленом третьей степени, но не всюду убывает?

Ответ: $b^2 - 4a > 0$ И $(a > 0$ ИЛИ $(a \neq 0)$.

Задача 4.12.23. *При каких условиях хотя бы одна первообразная функции*
$$y = ax^2 + bx + 1$$
является нечётной?

Ответ: $b = 0$.

Задача 4.12.24. *При каких условиях хотя бы одна первообразная функции*
$$y = ax^2 + bx + 1$$
является нечётной линейной функцией?

Ответ: $b = 0$ И $a = 0$.

Задача 4.12.25. *При каких условиях хотя бы одна первообразная функции*
$$y = ax^2 + bx + 1$$
является нечётным многочленом третьей степени?

Ответ: $b = 0$ И $a \neq 0$.

Задача 4.12.26. *При каких условиях первообразная функции*
$$y = ax^2 + bx + 1$$
является многочленом третьей степени, но ни одна первообразная не является нечётной?

Ответ: $b \neq 0$ И $a \neq 0$.

Задача 4.12.27. *При каких условиях ни одна первообразная функции*
$$y = ax^2 + bx + 1$$
не является нечётной?

Ответ: $b \neq 0$.

Задача 4.12.28. *При каких условиях график хотя бы одной первообразной функции*
$$y = ax^2 + bx + 1$$
симметричен относительно начала координат?

Ответ: $b = 0$.

Задача 4.12.29. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является многочленом второй степени, ветви графика которого направлены вверх?

Ответ: $a = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.12.30. *При каких условиях первообразная функции*

$$y = ax^2 + bx + 1$$

является многочленом второй степени, ветви графика которого направлены вниз?

Ответ: $a = 0$ И $b < 0$.

4.13. Показательные и логарифмические неравенства

Задача 4.13.1. *При каких условиях неравенство*

$$9^x + b3^x + c > 0$$

верно для каждого x?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$ ИЛИ ($c \geqslant 0$ И $b \geqslant 0$).

Задача 4.13.2. *При каких условиях неравенство*

$$9^x + b3^x + c > 0$$

верно не для каждого x?

Ответ: $b^2 - 4c \geqslant 0$ И ($c < 0$ ИЛИ $b < 0$).

Задача 4.13.3. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c > 0$$

есть прямая без точки?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.13.4. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c > 0$$

есть объединение двух лучей, не имеющих общего конца?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.13.5. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c < 0$$
не пусто?

Ответ: $c < 0$ ИЛИ ($b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$).

Задача 4.13.6. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c < 0$$
пусто?

Ответ: $c \geqslant 0$ И ($b^2 - 4c \leqslant 0$ ИЛИ $b \geqslant 0$ ИЛИ $c \leqslant 0$).

Задача 4.13.7. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c < 0$$
есть интервал?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.13.8. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c < 0$$
не пусто и не является интервалом?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.13.9. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c > 0$$
есть луч?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.13.10. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c < 0$$
есть луч?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.13.11. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c \geqslant 0$$

есть луч?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.13.12. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c \leqslant 0$$

есть луч?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.13.13. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c \geqslant 0$$

есть вся прямая?

Ответ: $b^2 - 4c \leqslant 0$ ИЛИ ($b \geqslant 0$ И $c \geqslant 0$).

Задача 4.13.14. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c \geqslant 0$$

есть объединение двух непересекающихся лучей?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ ИЛИ ($b > 0$ И $c > 0$).

Задача 4.13.15. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c \leqslant 0$$

не пусто?

Ответ: $c < 0$ ИЛИ ($b^2 - 4c \geqslant 0$ И $c \geqslant 0$ И $b \leqslant 0$).

Задача 4.13.16. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c \leqslant 0$$

пусто?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$ ИЛИ ($c \leqslant 0$ И $b \geqslant 0$).

Задача 4.13.17. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c \leqslant 0$$
есть отрезок ненулевой длины?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c > 0$ И $b < 0$.

Задача 4.13.18. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c \leqslant 0$$
не пусто и не является отрезком или точкой?

Ответ: $c < 0$.

Задача 4.13.19. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c \leqslant 0$$
есть точка?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$ И $c > 0$ И $b < 0$.

Задача 4.13.20. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c \leqslant 0$$
содержит точку $x = 0$?

Ответ: $1 + b + c \leqslant 0$.

Задача 4.13.21. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c \leqslant 0$$
не содержит точку $x = 0$?

Ответ: $1 + b + c > 0$.

Задача 4.13.22. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c < 0$$
содержит точку $x = 0$?

Ответ: $1 + b + c < 0$.

Задача 4.13.23. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c < 0$$

не содержит точку $x = 0$?

Ответ: $1 + b + c \geqslant 0$.

Задача 4.13.24. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c \geqslant 0$$

содержит точку $x = 0$?

Ответ: $1 + b + c \geqslant 0$.

Задача 4.13.25. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c \geqslant 0$$

не содержит точку $x = 0$?

Ответ: $1 + b + c < 0$.

Задача 4.13.26. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c > 0$$

содержит точку $x = 0$?

Ответ: $1 + b + c > 0$.

Задача 4.13.27. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c > 0$$

не содержит точку $x = 0$?

Ответ: $1 + b + c \leqslant 0$.

Задача 4.13.28. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$9^x + b3^x + c > 0$$

содержит точку $x = 0$, но не содержит точку $x = 1$?

Ответ: $1 + b + c > 0$ И $9 + 3b + c \leqslant 0$.

Задача 4.13.29. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c > 0$$
не содержит точку $x = 0$, но содержит точку $x = 1$?

Ответ: $1 + b + c \leqslant 0$ И $9 + 3b + c > 0$.

Задача 4.13.30. *При каких условиях множество решений неравенства*
$$9^x + b3^x + c > 0$$
содержит и точку $x = 0$, и точку $x = 1$?

Ответ: $1 + b + c < 0$ И $9 + 3b + c > 0$.

Задача 4.13.31. *При каких условиях неравенство*
$$a^x > a^3$$
не имеет решений?

Ответ: $a = 1$.

Задача 4.13.32. *При каких условиях неравенство*
$$a^x > a^3$$
имеет только положительныем решения?

Ответ: $a > 0$ И $a < 1$.

Задача 4.13.33. *При каких условиях неравенство*
$$a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} > a2^{x+1}$$
не имеет решений?

Ответ: $a = 0$.

4.14. Показательные и логарифмические уравнения

Задача 4.14.1. *При каких условиях уравнение*
$$9^{\ln(x-a)-\ln 2} = 3^{\ln(x-1)}$$
неразрешимо?

Ответ: $a < 0$.

Задача 4.14.2. *При каких условиях уравнение*

$$9^{\ln(x-a)-\ln 2} = 3^{\ln(x-1)}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a \geqslant 1$.

Задача 4.14.3. *При каких условиях уравнение*

$$9^{\ln(x-a)-\ln 2} = 3^{\ln(x-1)}$$

имеет два решения?

Ответ: $a \geqslant 0$ И $a < 1$.

Задача 4.14.4. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

не имеет корней?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$ ИЛИ ($c \geqslant 0$ И $b \geqslant 0$).

Задача 4.14.5. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет хотя бы один корень?

Ответ: $b^2 - 4c \geqslant 0$ И ($c < 0$ ИЛИ $b < 0$).

Задача 4.14.6. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$ ИЛИ $c < 0$ И $b < 0$.

Задача 4.14.7. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ ИЛИ ($c > 0$ И $b < 0$).

Задача 4.14.8. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень положительный?

Ответ: $c < 0$ И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c < 0$) ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$) И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c < 0$)

Задача 4.14.9. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень неположительный?

Ответ: $c < 0$ И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c \geqslant 0$) ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$) И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c \geqslant 0$)

Задача 4.14.10. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень отрицательный?

Ответ: $c < 0$ И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c > 0$) ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$) И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c > 0$)

Задача 4.14.11. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень неотрицательный?

Ответ: $c < 0$ И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c \leqslant 0$) ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$) И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c \leqslant 0$)

Задача 4.14.12. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень больше 1*?*

Ответ: $c < 0$ И ($b < -6$ ИЛИ $9 + 3b + c < 0$) ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$) И ($b < -6$ ИЛИ $9 + 3b + c < 0$).

Задача 4.14.13. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень меньше 1*?*

Ответ: $c < 0$ И ($b < -6$ ИЛИ $9 + 3b + c > 0$) ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$) И ($b < -6$ ИЛИ $9 + 3b + c > 0$).

Задача 4.14.14. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень не больше 1*?*

Ответ: $c < 0$ И ($b < -2$ ИЛИ $9 + 3b + c \geqslant 0$) ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$) И ($b < -2$ ИЛИ $9 + 3b + c \geqslant 0$).

Задача 4.14.15. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень не меньше 1*?*

Ответ: $c < 0$ И ($b < -2$ ИЛИ $9 + 3b + c \leqslant 0$) ИЛИ ($b^2 - 4c = 0$) И ($b < -2$ ИЛИ $9 + 3b + c \leqslant 0$).

Задача 4.14.16. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два положительных корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < -2$ И $1 + b + c > 0$.

Задача 4.14.17. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два неположительных корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И ($b \geqslant -2$ ИЛИ $1 + b + c \leqslant 0$).

Задача 4.14.18. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два отрицательных корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И ($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c < 0$).

Задача 4.14.19. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два неотрицательных корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И ($b < -2$ И $1 + b + c \geqslant 0$).

Задача 4.14.20. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два корня разных знаков?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И ($b > -2$ ИЛИ $1 + b + c < 0$) И
($b < -2$ ИЛИ $1 + b + c < 0$).

Задача 4.14.21. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два корня одного знака?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И ($b < -2$ И $1 + b + c < 0$) ИЛИ
($b < -2$ И $1 + b + c < 0$).

Задача 4.14.22. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два корня, один из которых равен 0, *а другой не равен* 0*?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $1 + b + c = 0$ И $c > 0$ И $c \neq 1$.

Задача 4.14.23. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два корня, один из которых равен 0, *а другой положителен?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $1 + b + c = 0$ И $c > 1$.

Задача 4.14.24. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два корня, один из которых равен 0, *а другой отрицателен?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $1 + b + c = 0$ И $c > 0$ И $c < 1$.

Задача 4.14.25. *При каких условиях уравнение*

$$9^x + b3^x + c = 0$$

имеет два корня, хотя бы один из которых равен 0*?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $1 + b + c = 0$ И $c > 0$.

Задача 4.14.26. *При каких условиях $x = 0$ является корнем уравнения*

$$9^x + b3^x + c = 0?$$

Ответ: $1 + b + c = 0$.

Задача 4.14.27. *При каких условиях $x = 0$ не является корнем уравнения*

$$9^x + b3^x + c = 0?$$

Ответ: $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.14.28. *При каких условиях $x = 1$ является корнем уравнения*

$$9^x + b3^x + c = 0?$$

Ответ: $9 + 3b + c = 0$.

Задача 4.14.29. *При каких условиях $x = 1$ не является корнем уравнения*

$$9^x + b3^x + c = 0?$$

Ответ: $9 + 3b + c \neq 0$.

Задача 4.14.30. *При каких условиях $x = 1$ не является корнем уравнения*

$$9^x + b3^x + c = 0,$$

а $x = 0$ является его корнем?

Ответ: $9 + 3b + c \neq 0$ И $1 + b + c = 0$.

Задача 4.14.31. *При каких условиях $x = 0$ не является корнем уравнения*

$$9^x + b3^x + c = 0,$$

а $x = 1$ является его корнем?

Ответ: $9 + 3b + c = 0$ И $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.14.32. *При каких условиях ни $x = 0$, ни $x = 1$ не является корнями уравнения*

$$9^x + b3^x + c = 0?$$

Ответ: $9 + 3b + c \neq 0$ И $1 + b + c \neq 0$.

Задача 4.14.33. *При каких условиях и $x = 0$, и $x = 1$ является корнями уравнения*

$$9^x + b3^x + c = 0?$$

Ответ: $9 + 3b + c = 0$ И $1 + b + c = 0$.

Задача 4.14.34. *При каких условиях уравнение*

$$a2^x = 5 - 2^{-x}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a < 0$ ИЛИ $a = 6,25$.

4.15. Предельный переход

Задача 4.15.1. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

существует в каждой точке?

Ответ: $(a = 0$ И $b = 0)$ ИЛИ $b^2 - 16a < 0$.

Задача 4.15.2. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

существует не в каждой точке?

Ответ: $b \neq 0$ И $b^2 - 16a \geqslant 0$.

Задача 4.15.3. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

существует во всех точках, кроме одной?

Ответ: $(a = 0$ И $b \neq 0)$ ИЛИ $(b^2 - 16a = 0$ И $a \neq 0)$.

Задача 4.15.4. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

существует во всех точках, кроме двух?

Ответ: $a \neq 0$ И $b^2 - 16a > 0$.

Задача 4.15.5. *При каких условиях существует конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to +\infty$*?*

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.15.6. *При каких условиях не существует конечного предела функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to +\infty$*?*

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.15.7. *При каких условиях существует конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to -\infty$*?*

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.15.8. *При каких условиях не существует конечного предела функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to -\infty$*?*

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.15.9. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to +\infty$*, существует и положителен?*

Ответ: $a = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.15.10. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to +\infty$*, существует и больше* 1*?*

Ответ: $a = 0$ И $b > 0$ И $b < 1$.

Задача 4.15.11. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to +\infty$*, существует и меньше* -1*?*

Ответ: $a = 0$ И $b < 0$ И $b > -1$.

Задача 4.15.12. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to +\infty$*, существует и по модулю превышает* 1*?*

Ответ: $a = 0$ И $b \neq 0$ И $b > -1$ И $b < 1$.

Задача 4.15.13. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to +\infty$*, существует и по модулю меньше* 1*?*

Ответ: $a = 0$ И $b \neq 0$ И ($b > 1$ ИЛИ $b < -1$).

Задача 4.15.14. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to -\infty$*, существует и отрицателен?*

Ответ: $a = 0$ И $b < 0$.

Задача 4.15.15. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to -\infty$*, существует и больше* 1*?*

Ответ: $a = 0$ И $b > 0$ И $b < 1$.

Задача 4.15.16. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to -\infty$, существует и меньше -1?

Ответ: $a = 0$ И $b < 0$ И $b > -1$.

Задача 4.15.17. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to -\infty$, существует и по модулю превышает 1?

Ответ: $a = 0$ И $b \neq 0$ И $b > -1$ И $b < 1$.

Задача 4.15.18. *При каких условиях конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to -\infty$, существует и по модулю меньше 1?

Ответ: $a = 0$ И $b \neq 0$ И ($b > 1$ ИЛИ $b < -1$).

Задача 4.15.19. *При каких условиях существует конечный предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to 1$?

Ответ: $a + b + 4 \neq 0$.

Задача 4.15.20. *При каких условиях не существует конечного предела функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to 1$?

Ответ: $a + b + 4 = 0$.

Задача 4.15.21. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

при $x \to 1$, существует и положителен?

Ответ: $a + b + 4 > 0$.

Задача 4.15.22. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to 1$, *существует и отрицателен?*

Ответ: $a + b + 4 < 0$.

Задача 4.15.23. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to 1$, *существует и больше* 1*?*

Ответ: ($a+b+4 > 0$ И $a+b+4 < 2$) ИЛИ ($a+b+4 < 0$ И $a+b+4 > -2$).

Задача 4.15.24. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to 1$, *существует и меньше* 1*?*

Ответ: $a + b + 4 > 2$ ИЛИ $a + b + 4 < -2$.

Задача 4.15.25. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to 1$, *существует и больше* -1*?*

Ответ: ($a + b + 4 > 0$ И $2 > -(a + b + 4)$) ИЛИ
($a + b + 4 < 0$ И $2 < -(a + b + 4)$).

Задача 4.15.26. *При каких условиях предел функции*

$$y = \frac{x+1}{ax^2 + bx + 4}$$

при $x \to 1$, *существует и меньше* -1*?*

Ответ: ($a + b + 4 > 0$ И $2 < -(a + b + 4)$) ИЛИ
($a + b + 4 < 0$ И $2 > -(a + b + 4)$).

Задача 4.15.27. *При каких условиях функция*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

имеет конечный предел при $x \to 2$*?*

Ответ: $4a + 2b + 4 \neq 0$.

Задача 4.15.28. *При каких условиях функция*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

не имеет конечного предела при $x \to 2$*?*

Ответ: $4a + 2b + 4 = 0$.

Задача 4.15.29. *При каких условиях функция*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

имеет конечный положительный предел при $x \to 2$*?*

Ответ: $4a + 2b + 4 > 0$.

Задача 4.15.30. *При каких условиях функция*

$$y = \frac{x+1}{ax^2+bx+4}$$

имеет конечный отрицательный предел при $x \to 2$*?*

Ответ: $4a + 2b + 4 < 0$.

4.16. Производная функции

Задача 4.16.1. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

имеет ровно один корень?

Ответ: $b = 0$ ИЛИ $a = 0$ И $b \neq 0$.

Задача 4.16.2. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

имеет два корня?

Ответ: $b \neq 0$ И $a \neq 0$.

Задача 4.16.3. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

имеет хотя бы один ненулевой корень?

Ответ: $b \neq 0$ И $a \neq 0$.

Задача 4.16.4. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

имеет два корня, один из которых положителен?

Ответ: $b \neq 0$ И $a \neq 0$ И $-ab > 0$.

Задача 4.16.5. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

имеет два корня, один из которых отрицателен?

Ответ: $b \neq 0$ И $a \neq 0$ И $-ab > 0$.

Задача 4.16.6. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

всюду неотрицательна?

Ответ: $b = 0$ И $a = 0$ ИЛИ $a > 0$ И $b = 0$.

Задача 4.16.7. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

всюду неположительна?

Ответ: $b = 0$ И $a = 0$ ИЛИ $a < 0$ И $b = 0$.

Задача 4.16.8. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

принимает как отрицательные, так и положительные значения?

Ответ: $b \neq 0$.

Задача 4.16.9. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не меняет знак?

Ответ: $b = 0$.

Задача 4.16.10. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является многочленом второй степени?

Ответ: $a \neq 0$.

Задача 4.16.11. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является многочленом второй степени?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.16.12. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является линейной функцией?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.16.13. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является линейной функцией?

Ответ: $a \neq 0$.

Задача 4.16.14. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является константой?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.16.15. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является константой?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.16.16. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является строго возрастающей линейной функцией?

Ответ: $a = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.16.17. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является строго убывающей линейной функцией?

Ответ: $a = 0$ И $b < 0$.

Задача 4.16.18. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

четна?

Ответ: $b = 0$.

Задача 4.16.19. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является чётной функцией?

Ответ: $b \neq 0$.

Задача 4.16.20. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является чётной линейной функцией?

Ответ: $a = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.16.21. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является чётной линейной функцией?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.16.22. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является чётной квадратичной функцией?

Ответ: $a \neq 0$ И $b = 0$.

Задача 4.16.23. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является чётной квадратичной функцией?

Ответ: $a = 0$ ИЛИ $b \neq 0$.

Задача 4.16.24. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

строго возрастает на всей прямой?

Ответ: $a = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.16.25. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является строго возрастающей на всей прямой?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \leqslant 0$.

Задача 4.16.26. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

строго убывает на всей прямой?

Ответ: $a = 0$ И $b < 0$.

Задача 4.16.27. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является строго убывающей на всей прямой?

Ответ: $a \neq 0$ ИЛИ $b \geqslant 0$.

Задача 4.16.28. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является строго возрастающей на положительных x?

Ответ: $a = 0$ И $b > 0$ ИЛИ $a > 0$ И $b \geqslant 0$.

Задача 4.16.29. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является строго возрастающей на положительных x?

Ответ: ($a \neq 0$ ИЛИ $b \leqslant 0$) И ($a \leqslant 0$ ИЛИ $b < 0$).

Задача 4.16.30. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

является строго убывающей на положительных x?

Ответ: $a = 0$ И $b < 0$ ИЛИ $a < 0$ И $b \leqslant 0$.

Задача 4.16.31. *При каких условиях производная функции*

$$y = ax^3 + bx^2 + 1$$

не является строго убывающей на положительных x?

Ответ: ($a \neq 0$ ИЛИ $b \geqslant 0$) И ($a \geqslant 0$ ИЛИ $b > 0$).

4.17. Системы линейных уравнений и неравенств

Задача 4.17.1. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $ab \neq 4$.

Задача 4.17.2. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

не имеет решений?

Ответ: $ab = 4$ И $a \neq 2$.

Задача 4.17.3. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Ответ: $a = 2$ И $b = 2$.

Задача 4.17.4. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x положителен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b - 4)(ab - 4) > 0$.

Задача 4.17.5. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x отрицателен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b - 4)(ab - 4) < 0$.

Задача 4.17.6. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём y положителен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(4a - 8)(ab - 4) > 0$.

Задача 4.17.7. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём y отрицателен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(4a - 8)(ab - 4) < 0$.

Задача 4.17.8. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём y равен 0?

Ответ: $ab \neq 4$ И $4a - 8 = 0$.

Задача 4.17.9. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём y не равен 0?

Ответ: $ab \neq 4$ И $4a - 8 \neq 0$.

Задача 4.17.10. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x равен 0?

Ответ: $ab \neq 4$ И $2b - 4 = 0$.

Задача 4.17.11. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x не равен 0?

Ответ: $ab \neq 4$ И $2b - 4 \neq 0$.

Задача 4.17.12. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x не равен 0 и y не равен 0?

Ответ: $ab \neq 4$ И $2b - 4 \neq 0$ И $4a - 8 \neq 0$.

Задача 4.17.13. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x и y положительны?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b - 4)(ab - 4) > 0$ И $(4a - 8)(ab - 4) > 0$.

Задача 4.17.14. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x и y отрицательны?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b - 4)(ab - 4) < 0$ И $(4a - 8)(ab - 4) < 0$.

Задача 4.17.15. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x и y имеют разные знаки?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b - 4)(4a - 8) < 0$.

Задача 4.17.16. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x положителен, y отрицателен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b - 4)(ab - 4) > 0$ И $(4a - 8)(ab - 4) < 0$.

Задача 4.17.17. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x отрицателен, y положителен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b - 4)(ab - 4) < 0$ И $(4a - 8)(ab - 4) > 0$.

Задача 4.17.18. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x равен 0, y положителен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $2b - 4 = 0$ И $(4a - 8)(ab - 4) > 0$.

Задача 4.17.19. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x равен 0, y отрицателен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $2b - 4 = 0$ И $(4a - 8)(ab - 4) < 0$.

Задача 4.17.20. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x не равен 0, y положителен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $2b - 4 \neq 0$ И $(4a - 8)(ab - 4) > 0$.

Задача 4.17.21. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x не равен 0, y отрицателен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $2b - 4 \neq 0$ И $(4a - 8)(ab - 4) < 0$.

Задача 4.17.22. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x положителен, y равен 0*?*

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b-4)(ab-4) > 0$ И $4a - 8 = 0$.

Задача 4.17.23. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x отрицателен, y равен 0*?*

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b-4)(ab-4) < 0$ И $4a - 8 = 0$.

Задача 4.17.24. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x положителен, y не равен 0*?*

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b-4)(ab-4) > 0$ И $4a - 8 \neq 0$.

Задача 4.17.25. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x отрицателен, y не равен 0*?*

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b-4)(ab-4) < 0$ И $4a - 8 \neq 0$.

Задача 4.17.26. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x и y неположительны?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b-4)(ab-4) \leqslant 0$ И $(4a-8)(ab-4) \leqslant 0$.

Задача 4.17.27. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x и y неотрицательны?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b-4)(ab-4) \geqslant 0$ И $(4a-8)(ab-4) \geqslant 0$.

Задача 4.17.28. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x неположителен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b-4)(ab-4) \leqslant 0$.

Задача 4.17.29. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём x неотрицателен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(2b-4)(ab-4) \geqslant 0$.

Задача 4.17.30. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём y неположителен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(4a-8)(ab-4) \leqslant 0$.

Задача 4.17.31. *При каких условиях система уравнений*

$$\begin{cases} ax + \ \ y = 2, \\ 4x + by = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение, причём y неотрицателен?

Ответ: $ab \neq 4$ И $(4a-8)(ab-4) \geqslant 0$.

4.18. Тригонометрические уравнения и неравенства

Задача 4.18.1. *При каких условиях уравнение*

$$a\sin x + b\cos x = 5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 25$.

Задача 4.18.2. *При каких условиях уравнение*

$$a\sin x + b\cos x = 5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 < 25$.

Задача 4.18.3. *При каких условиях уравнение*

$$a\sin x - b\cos x = 5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 25$.

Задача 4.18.4. *При каких условиях уравнение*

$$a\sin x - b\cos x = 5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 < 25$.

Задача 4.18.5. *При каких условиях уравнение*

$$-a\sin x + b\cos x = 5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 25$.

Задача 4.18.6. *При каких условиях уравнение*

$$-a\sin x + b\cos x = 5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 < 25$.

Задача 4.18.7. *При каких условиях уравнение*

$$a\sin x + b\cos x = -5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 25$.

Задача 4.18.8. *При каких условиях уравнение*

$$a\sin x + b\cos x = -5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 < 25$.

Задача 4.18.9. *При каких условиях уравнение*

$$|a\sin x + b\cos x| = 5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 25$.

Задача 4.18.10. *При каких условиях уравнение*

$$|a\sin x + b\cos x| = 5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 < 25$.

Задача 4.18.11. *При каких условиях уравнение*

$$a\sin x + b\cos x = 5$$

имеет не менее двух корней на наименьшем периоде функции?

Ответ: $a^2 + b^2 > 25$.

Задача 4.18.12. *При каких условиях уравнение*

$$a\sin x + b\cos x = 5$$

имеет ровно два корня на наименьшем периоде функции?

Ответ: $a^2 + b^2 > 25$.

Задача 4.18.13. *При каких условиях уравнение*

$$a \sin x + b \cos x = 5$$

имеет ровно один корень на наименьшем периоде функции?

Ответ: $a^2 + b^2 = 25$.

Задача 4.18.14. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x > 5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 > 25$.

Задача 4.18.15. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x > 5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \leqslant 25$.

Задача 4.18.16. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x \geqslant 5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 25$.

Задача 4.18.17. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x \geqslant 5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 < 25$.

Задача 4.18.18. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x \geqslant 5$$

состоит из изолированных точек?

Ответ: $a^2 + b^2 = 25$.

Задача 4.18.19. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x \geqslant 5$$

состоит из отрезков ненулевой длины?

Ответ: $a^2 + b^2 > 25$.

Задача 4.18.20. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x < -5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 > 25$.

Задача 4.18.21. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x < -5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \leqslant 25$.

Задача 4.18.22. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x \leqslant -5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 25$.

Задача 4.18.23. *При каких условиях неравенство*

$$a \sin x + b \cos x \leqslant -5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 < 25$.

Задача 4.18.24. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$a \sin x + b \cos x \leqslant -5$$

состоит из изолированных точек?

Ответ: $a^2 + b^2 = 25$.

Задача 4.18.25. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$a\sin x + b\cos x \leqslant -5$$

состоит из отрезков ненулевой длины?

Ответ: $a^2 + b^2 > 25$.

Задача 4.18.26. *При каких условиях неравенство*

$$|a\sin x + b\cos x| > 5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 > 25$.

Задача 4.18.27. *При каких условиях неравенство*

$$|a\sin x + b\cos x| > 5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \leqslant 25$.

Задача 4.18.28. *При каких условиях неравенство*

$$|a\sin x + b\cos x| \geqslant 5$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 \geqslant 25$.

Задача 4.18.29. *При каких условиях неравенство*

$$|a\sin x + b\cos x| \geqslant 5$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $a^2 + b^2 < 25$.

Задача 4.18.30. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$|a\sin x + b\cos x| \geqslant 5$$

состоит из изолированных точек?

Ответ: $a^2 + b^2 = 25$.

Задача 4.18.31. *При каких условиях множество решений неравенства*

$$|a\sin x + b\cos x| \geqslant 5$$

состоит из отрезков ненулевой длины?

Ответ: $a^2 + b^2 > 25$.

Задача 4.18.32. *При каких условиях уравнение*

$$(a-1)\cos(x) + (a+1)\sin(x) = 2a$$

не имеет решений?

Ответ: $a > 1$ ИЛИ $a < -1$.

Задача 4.18.33. *При каких условиях уравнение*

$$xa\sin x = |x|$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.18.34. *При каких условиях уравнение*

$$\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x = a+3$$

имеет решения?

Ответ: $a \geqslant -3$ И $a \leqslant -2$.

Задача 4.18.35. *При каких условиях неравенство*

$$\sin|x| \geqslant |a|$$

не имеет решений?

Ответ: $a > 1$ ИЛИ $a < -1$.

4.19. Уравнения с параметрами

Задача 4.19.1. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет пустое множество решений?

Ответ: $b^2 - 4c < 0$.

Задача 4.19.2. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет непустое множество решений?

Ответ: $b^2 - 4c \geqslant 0$.

Задача 4.19.3. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет ровно два корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$.

Задача 4.19.4. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет не менее одного корня?

Ответ: $b^2 - 4c \geqslant 0$.

Задача 4.19.5. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет ровно один корень?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$.

Задача 4.19.6. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень положительный?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$ И $b < 0$.

Задача 4.19.7. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень отрицательный?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.19.8. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень неположительный?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$ И $b \geqslant 0$.

Задача 4.19.9. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень неотрицательный?

Ответ: $b^2 - 4c = 0$ И $b \leqslant 0$.

Задача 4.19.10. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет ровно один корень, причём этот корень равен 0*?*

Ответ: $c = 0$ И $b = 0$.

Задача 4.19.11. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два положительных корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$ И $c > 0$.

Задача 4.19.12. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два неположительных корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b \geqslant 0$ И $c \geqslant 0$.

Задача 4.19.13. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два отрицательных корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.19.14. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два неотрицательных корня?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b \leqslant 0$ И $c \geqslant 0$.

Задача 4.19.15. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, один из которых положителен, а другой отрицателен?

Ответ: $c > 0$.

Задача 4.19.16. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, один из которых неположителен, а другой неотрицателен?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c \geqslant 0$.

Задача 4.19.17. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, один из которых равен 0, *а другой положителен?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c = 0$ И $b < 0$.

Задача 4.19.18. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, один из которых равен 0, *а другой неположителен?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c = 0$ И $b < 0$.

Задача 4.19.19. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, один из которых равен 0, *а другой неположителен?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c = 0$ И $b \geqslant 0$.

Задача 4.19.20. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, один из которых равен 0*, а другой отрицателен?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c = 0$ И $b > 0$.

Задача 4.19.21. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, один из которых равен 0*, а другой неотрицателен?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c = 0$ И $b \leqslant 0$.

Задача 4.19.22. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, произведение которых положительно?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c > 0$.

Задача 4.19.23. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, произведение которых отрицательно?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c < 0$.

Задача 4.19.24. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, произведение которых неположительно?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c \leqslant 0$.

Задача 4.19.25. *При каких условиях уравнение*

$$x^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня, произведение которых неотрицательно?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c \geqslant 0$.

Задача 4.19.26. *При каких условиях уравнение*
$$x^2 + bx + c = 0$$
имеет два корня, произведение которых равно 0*?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c = 0$.

Задача 4.19.27. *При каких условиях уравнение*
$$x^2 + bx + c = 0$$
имеет два корня, произведение которых не равно 0*?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $c \neq 0$.

Задача 4.19.28. *При каких условиях уравнение*
$$x^2 + bx + c = 0$$
имеет два корня, сумма которых положительна?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b < 0$.

Задача 4.19.29. *При каких условиях уравнение*
$$x^2 + bx + c = 0$$
имеет два корня, сумма которых отрицательно?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b > 0$.

Задача 4.19.30. *При каких условиях уравнение*
$$x^2 + bx + c = 0$$
имеет два корня, сумма которых неположительна?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b \leqslant 0$.

Задача 4.19.31. *При каких условиях уравнение*
$$x^2 + bx + c = 0$$
имеет два корня, сумма которых неотрицательно?

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b \geqslant 0$.

Задача 4.19.32. *При каких условиях уравнение*
$$x^2 + bx + c = 0$$
имеет два корня, сумма которых равна 0*?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b = 0$.

Задача 4.19.33. *При каких условиях уравнение*
$$x^2 + bx + c = 0$$
имеет два корня, сумма которых не равна 0*?*

Ответ: $b^2 - 4c > 0$ И $b \neq 0$.