Множества Жюлиа

Н.ДОЛБИЛИН

Вместо пролога: воспоминание о давнем путешествии

В далеком 1968 году мне посчастливилось совершить путешествие в Карпаты с моим учителем, выдающимся математиком Борисом Николаевичем Делоне. В один пасмурный день во время прогулки я оказался на седле под вершиной Говерла. В спускавшемся на восток цирке, в метрах 100 ниже седла, бурлил мощный поток. Это был исток реки Прут. Склон, сбегавший на юго-запад, быстро углубляясь, переходил в ущелье, из которого вытекала речка Говерлянка. Надо мной нависал интенсивно таявший (дело было в начале мая) снежник. Часто падавшие с огромной сосульки капли образовывали почти непрерывную струйку. Сильный ветер, поднимавшийся с юго-западного цирка, сносил эту струйку на восточный склон обледенелой площадки под снежником, откуда вода уходила вниз, к Пруту, впадающему в Дунай. Но как только ветер на мгновение стихал, вода вертикально падала на площадку, наклоненную к западу, и стекала в другую сторону, к Говерлянке, которая много ниже впадала в Тису, а та – в Дунай. И хотя рано или поздно эти «восточный» и «западный» потоки сливались в один (вблизи устья Дуная), достаточно было взглянуть на карту, чтобы понять, какая разная у них складывалась судьба. Особенно поражало – насколько поведение струйки, вытекавшей из снежника, радикально зависело от дуновения ветра.

Несколько слов о комплексных числах

Прежде всего нам понадобится кое-что, совсем немногое, из теории комплексных чисел. Мы конспективно приведем лишь самые необходимые сведения.[1]

Комплексным числом z называется произвольная пара вещественных чисел (a,b). При этом

(а) два комплексных числа $z=(a,b)$ и $z'=(a',b')$ считаются равными тогда и только тогда, когда $a=a'$ и $b=b'$;

(б) вещественное число a представляет собой частный случай комплексного числа $a=(a,0)$;

(в) сложение и вычитание комплексных чисел определяется в точности как для векторов по формуле

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2);$$

(г) умножение комплексных чисел задается формулой

$$z_1 z_2 = (a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2).$$

Отметим, что если оба комплексных числа являются вещественными, т.е. $b_1 = b_2 = 0$, то правило умножения (г) комплексных чисел совпадает с правилом умножения вещественных чисел.

Обычно комплексное число (a,b) записывают в виде двучлена $a + bi$, где i – так называемая *мнимая единица*, т.е. такое «новое число», не являющееся вещественным, квадрат которого по определению равен -1. В этом случае, например, произведение двух комплексных чисел соответствует произведению соответствующих двучленов:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1a_2 + a_1b_2 i + b_1 i a_2 + b_1b_2 i^2 =$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i.$$

Комплексное число $z = a + bi$ можно представить точкой (a,b) на координатной плоскости (рис.1,*а*). При этом сама координатная плоскость, каждая точка (a,b) которой отождествлена с комплексным числом $z = a + bi$, называется комплексной плоскостью.

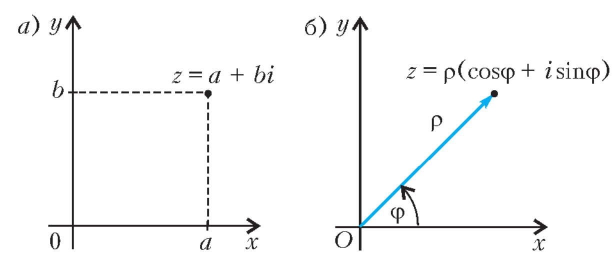


Рис. 1

Тригонометрическая форма записи комплексного числа имеет вид $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Здесь φ есть угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{Oz}$, а ρ – модуль $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ числа z, или, что то же самое, длина вектора $\overrightarrow{Oz}$ (рис.1,*б*).

И, наконец, нам понадобится изящная формула Муавра:

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (1)$$

Корнем n-й степени из числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется комплексное число, n-я степень которого равна z. Другая формула Муавра дает представление всех корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

[1] *Более подробно о комплексных числах можно прочитать, например, в статьях Л.С.Понтрягина «Комплексные числа» («Квант» №3 за 1982 г.) и «Основная теорема алгебры» («Квант» №4 за 1982 г.).*

Приведем также факт, вытекающий из основной теоремы алгебры: всякий многочлен n-й степени с комплексными коэффициентами (в том числе и с вещественными) имеет в области комплексных чисел ровно n корней.

Путешествие стрекозы тихим утром

В одно прекрасное летнее тихое утро попрыгунья-стрекоза, проснувшись в точке $z_0 = \rho_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, отправилась в путешествие, перелетая из одного пункта в другой. Будем полагать, что после первого перелета стрекоза оказалась в точке $z_1 = z_0^2$, после второго – в точке $z_2 = z_1^2$, после третьего – в точке ..., правильно, в точке $z_3 = z_2^2$ и так далее. И вообще, если после $(n-1)$-го перелета стрекоза была в точке z_{n-1}, то после n-го перелета она окажется в точке $z_n = z_{n-1}^2$. Множество

$$z_0,\ z_1 = z_0^2, \ldots, z_n = z_{n-1}^2, \ldots \qquad (2)$$

точек «приземления» стрекозы будем называть *орбитой*.

Рассмотрим, что представляет собой орбита. Ясно, что начальная точка $z_0 = \rho_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ однозначно определяет орбиту. По формуле Муавра аргументы точек орбиты суть φ_0, $2\varphi_0$, $2^2\varphi_0, \ldots, 2^n\varphi_0$ и т.д. Модули точек орбиты равны $\rho_0, \rho_0^2, \rho_0^4, \ldots, \rho_0^{2n}$ и т.д. Очевидно, что орбита лежит на быстро раскручивающейся уходящей в бесконечность спирали, если $\rho_0 > 1$ (рис.2). Если же $\rho_0 < 1$, то орбита лежит на спирали, закручивающейся к нулю. Если точка z_0 лежит на единичной окружности, т.е. если $\rho_0 = 1$, то вся орбита лежит на этой окружности.

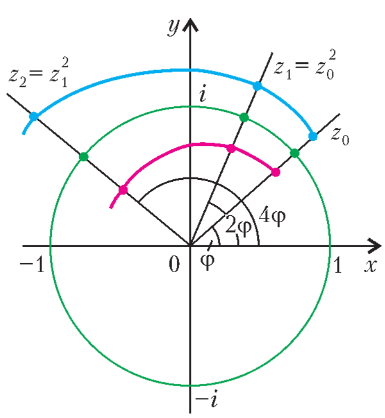


Рис. 2

Таким образом, если $|z_0| > 1$, то орбита, задаваемая формулой $z_n = z_{n-1}^2$, убегает на бесконечность. Если же $|z_0| < 1$, то, наоборот, орбита остается *ограниченной*. Более того, в нашем случае она не покидает единичный круг и притягивается к нулю.

Это очень напоминает распределение земной суши по так называемым водным бассейнам. Из курса географии известно о бассейне реки Волга, о бассейне озера Байкал... Условная линия, разделяющая бассейны рек, скажем Волги и Дона, называется водоразделом. Эпизод, рассказанный в начале статьи, произошел на водоразделе бассейнов Прута и Тисы (впрочем, обе они впадают в Дунай).

В случае итерации $z_n = z_{n-1}^2$ все орбиты, начинающиеся внутри единичного круга, стекаются к нулю, в то время как орбиты, начинающиеся вне этого круга, стекаются к бесконечности. Единичный круг является бассейном «океана Нуль», вся остальная часть плоскости составляет бассейн «океана Бесконечность».

Водораздел между этими океанами проходит по единичной окружности $|z| = 1$. Между точкой, лежащей внутри бассейна, и точкой, лежащей на водоразделе, имеется качественное различие. У каждой точки z_0, лежащей внутри единичного круга, некоторая ее окрестность лежит внутри этого круга. Другими словами, орбиты, начинающиеся в точках, достаточно близких к точке z_0, впадают в тот же океан, что и орбита точки z_0. Совсем иначе обстоит дело на водоразделе. Произвольная, сколь угодно маленькая окрестность точки, лежащей на окружности $|z| = 1$, содержит как точки внутри, так и точки снаружи единичного круга. Таким образом, рядом с любой точкой водораздела находятся сколь угодно близко точки, чьи орбиты впадают в один океан, и тут же рядом сидят точки, из которых вытекают орбиты, впадающие в другой океан.

Именно на эту острую чувствительность поведения орбит в зависимости от выбора начальной точки при определенных условиях обратил внимание в 1918 году французский математик Жюлиа[2]. Математик Б.Мандельброт, проявивший серьезный интерес к работам Жюлиа, назвал такие «водоразделы» в честь первооткрывателя множествами Жюлиа. Справедливости ради, надо сказать, что не менее серьезный вклад в этой области был сделан также другим французским математиком П.Фату. Разумеется, вряд ли было бы оправданно как-то особо называть столь просто устроенный водораздел (имеется в виду единичная окружность), если бы все обстояло столь просто, как могло показаться на первый взгляд. Сейчас мы увидим, что это совсем не так.

И поднялся ветер...

Рассмотрим орбиту стрекозы в случае, если «дует постоянный ветер», т.е. «ветер», имеющий постоянные направление и силу. Итак, «ветер» – это вектор на плоскости, который можно задавать комплексным числом c. Конкретно, мы предполагаем, что стрекоза во время своего прыжка из точки z в точку z^2 дополнительно «сносится ветром» на вектор, задаваемый комплексным числом c (рис.3). Другими словами, орбита задается формулой

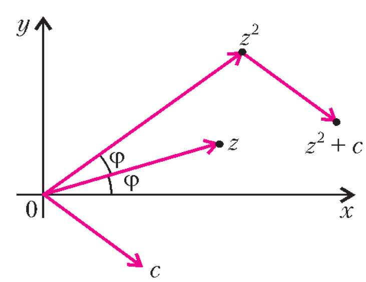


Рис. 3

$$z_n = z_{n-1}^2 + c\text{, где } n = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

Легко видеть, что «штилевая» орбита (2) есть частный случай «ветренной» орбиты (3), соответствующий

[2] *Гастон Жюлиа (1893–1978) во время первой мировой войны получил тяжелое ранение. Свою знаменитую работу «Мемуар об итерации рациональных функций» он написал в госпитале в 1918 году в интервале между двумя болезненными операциями.*

значению $c = 0$. Теперь для фиксированного комплексного числа c, вообще говоря не равного нулю, рассмотрим орбиту, заданную формулой (3).

Назовем точку z_0 *беглянкой*, если начинающаяся в ней орбита (3) убегает на бесконечность. Под этим понимается следующее: какой бы большой круг $|z| \le R$ на плоскости ни взять, существует номер k, зависящий от радиуса R $(k = k(R))$, такой, что *все* точки z_n в орбите (3) с номерами $n > k$ лежат вне данного круга, т.е. $|z| > R$ при $n > k(R)$. Обозначим множество всех точек-беглянок при фиксированном c через E_c (от английского escape – убегать). Например, в частном случае $c = 0$ множество E_0 состоит из точек, лежащих вне единичного круга.

Напротив, если орбита (3), начинающаяся в z_0, все время остается в пределах какого-то (пусть даже очень большого) круга, то точку z_0 назовем *пленницей*. Множество всех точек-пленниц будем называть *пленным* и обозначать через P_c. Как мы уже видели, когда $c = 0$, пленное множество P_0 – это единичный круг $\{z : |z| \le 1\}$. Все точки плоскости, лежащие вне единичного круга, являются беглянками и составляют *убегающее* множество E_0.

Гипотетически имеется и третья возможность, когда орбита, с одной стороны, выходит за пределы любого данного круга сколь угодно много раз, а с другой, возвращается в этот круг столь же много раз. Однако в силу «теоремы о беглянке», которую мы докажем в следующем параграфе, третий случай невозможен.

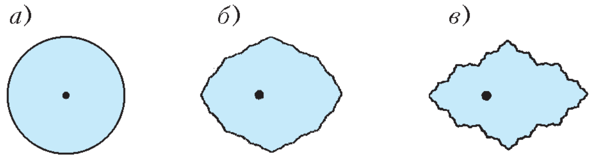
Итак, для фиксированного комплексного числа c каждая точка z_0 плоскости является либо беглянкой, либо пленницей. Другими словами, вся плоскость распадается на два множества: P_c и E_c.

Из теоремы о беглянке легко следует, что если z – точка-беглянка, то ее достаточно маленькая окрестность состоит лишь из точек-беглянок.

Множество точек плоскости таких, что в каждой ее окрестности содержатся как пленницы, так и беглянки, образуют границу между множествами E_c и P_c. Это множество называется *множеством Жюлиа* J_c. Можно показать, что множество Жюлиа состоит только из пленниц.

По определению множества Жюлиа, при $c = 0$ множество J_0 есть единичная окружность, но при $c \ne 0$ характер множества J_c серьезно меняется. На рисунке 4 приведены множества Жюлиа J_c при различных

а) *б)* *в)*



$c = 0{,}0 + 0i$ $c = -0{,}25 + 0i$ $c = -0{,}5 + 0i$

Рис. 4

значениях c. Мы видим, что с увеличением модуля $|c|$ линия «водораздела» Жюлиа становится все более сложной и изломанной.

Условие убегания орбиты

Теорема о беглянке. *Пусть точка* z_0 *такова, что*

$$|z_0| \ge |c| \ \text{ и } \ |z_0| > 2\,. \tag{4}$$

Тогда орбита $z_n = z_{n-1}^2 + c$, *начинающаяся в точке* z_0, *убегает на бесконечность, другими словами, точка* z_0 *является беглянкой.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что неравенства (4) не являются необходимым условием точки-беглянки. Точка z_0 может не удовлетворять условию (4), но если какя-то точка орбиты удовлетворяет этому условию, то орбита убегает на бесконечность и точка z_0 является беглянкой.

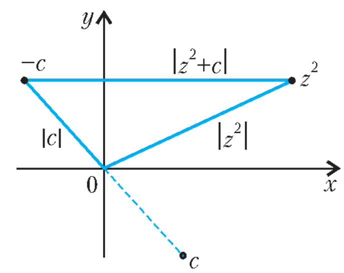


Рис. 5

Пусть точка z удовлетворяет условию (4). Так как в (4) второе неравенство – строгое, то $|z| = 2 + \varepsilon$, где ε – некоторое положительное число. В силу неравенства треугольника (рис.5), имеем

$$\left|z^2\right| = \left|z^2 + c - c\right| = \left|\left(z^2 + c\right) + (-c)\right| \le \left|z^2 + c\right| + |c|\,. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$\left|z^2 + c\right| \ge \left|z^2\right| - |c| \ge \left|z^2\right| - |z| = (|z| - 1)|z| = (1+\varepsilon)|z|\,.$$

Итак, если точка z удовлетворяет условиям (4), то $\left|z^2 + c\right| \ge (1+\varepsilon)|z|$. Поэтому, если расстояние от точки z_0 орбиты до начала 0 превосходит оба числа $|c|$ и 2: $|z_0| > \max\{|c|, 2\}$, то следующая точка z_1 орбиты отстоит еще дальше. Причем коэффициент удаления каждый раз не меньше фиксированного числа $1+\varepsilon$, строго превосходящего 1. Таким образом, если $z_0 > \max\{|c|, 2\}$, то получающаяся после k итераций точка z_k орбиты будет расположена от начала по крайней мере в $(1+\varepsilon)^k$ раз дальше. Так как $(1+\varepsilon)^k$ монотонно и неограниченно возрастает при увеличении номера k, то и точки орбиты монотонно и неограниченно удаляются от начала. Теорема доказана.

Еще раз подчеркнем, что даже если точка z_0 не удовлетворяет условию (4), но первый же возможный выход орбиты $z_n = z_{n-1}^2$ за пределы круга радиуса $\max\{|c|, 2\}$ гарантирует убегание данной орбиты на бесконечность.

Упражнения

1. Докажите, что если $z \in E_c$, то у точки z существует окрестность $U(z)$, содержащаяся в E_c.

2. Докажите, что $J_c \subset P_c$.

Неподвижные точки

Мы знаем, что при итерации $z_{n+1} = z_n^2 + c$ одни орбиты убегают на бесконечность, причем такое убегание идет по раскручивающейся от начала координат спирали с постоянной поправкой на «ветер» c. Другие орбиты «гуляют» в области, которая ограничена множеством Жюлиа. Эти орбиты состоят из точек-пленниц. Среди точек-пленниц есть особые точки. Это – так называемые *неподвижные* точки.

Точка z называется *неподвижной* для функции $f(z)$, если $z = f(z)$. При итерации $z_{n+1} = f(z_n)$ орбита неподвижной точки остается на месте: $z_n = z_0$ для любого натурального числа n. В случае квадратичной функции $f(z) = z^2 + c$ неподвижная точка z удовлетворяет уравнению $z^2 - z + c = 0$. Это уравнение имеет два решения $z^{(0)}$ и $z^{(1)}$ (здесь мы применяем верхние индексы, потому что нижние используются для нумерации точек в орбите).

Итак, орбита неподвижной точки никуда не убегает, т.е. каждая неподвижная точка действительно является пленницей. Между тем, неподвижные точки квадратичной функции существенно различаются друг от друга в том, как ведут себя орбиты, начинающиеся вблизи этих точек.

Рассмотрим опять простейший случай: $c = 0$. Из уравнения $z = z^2$ находим две неподвижные точки: $z^{(0)} = 0$, $z^{(1)} = 1$. Между ними имеется существенное различие. Неподвижная точка $z^{(0)} = 0$, как мы уже знаем, «притягивает» к себе любую орбиту, начинающуюся внутри единичного круга. В то же время если точка z достаточно близко находится к другой неподвижной точке $z^{(1)} = 1$, то расстояние между образом z^2 и неподвижной точкой 1 больше, чем между «прообразом» z и 1. Точка $z^{(1)} = 1$ при итерации $z_{n+1} = z_n^2$ как бы отталкивает от себя осмелившиеся было приблизиться к ней точки орбиты. Одни орбиты (если $|z_0| > 1$) убегают от $z^{(1)} = 1$ на бесконечность. Другие орбиты (если $|z_0| < 1$) убегают от $z^{(1)} = 1$ к другой неподвижной точке $z^{(0)} = 0$. Третьи орбиты ($|z_0| = 1$) расположены на единичной окружности.

В общем случае неподвижная точка $z^{(0)}$ квадратичной функции $f(z)$ называется *притягивающей*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что любая орбита, начинающаяся в ε-окрестности точки $z^{(0)}$, сходится к $z^{(0)}$. Притягивающую точку $z^{(0)}$ также называют еще и *устойчивой* неподвижной точкой, имея в виду, что при небольшом отклонении точки z от неподвижной точки $z^{(0)}$ ее орбита все равно стремится к неподвижной точке. Таким образом, притягивающая точка не только сама является пленницей, но и некоторая ее окрестность полностью состоит из точек-пленниц. Она лежит внутри пленного множества P_c, но не на его границе, т.е. *притягивающая точка не принадлежит множеству Жюлиа* J_c.

Неподвижная точка $z^{(1)}$ функции $f(z)$ – *отталкивающая*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки z, удаленной от $z^{(1)}$ не далее чем на ε, ее образ $f(z)$ отстоит от $z^{(1)}$ дальше чем z: $\left|\left(z^2 + c\right) - z^{(1)}\right| > \left|z - z^{(1)}\right|$. Отталкивающая точка называется также *неустойчивой*. Даже небольшое отличие начальной точки z_0 от неустойчивой точки $z^{(1)}$ приводит к серьезному отклонению соответствующей орбиты.

Пусть $z^{(0)}$ – неподвижная точка функции $f(z)$. Имеется важный критерий, выясняющий, какова эта точка: притягивающая или отталкивающая. Мы предполагаем, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z^{(0)}$. Заметим, что производная функции от комплексного аргумента определяется аналогично тому, как это делается для вещественной функции вещественного аргумента:

$$f'\left(z^{(0)}\right) = \lim_{z \to z^{(0)}} \frac{f(z) - f\left(z^{(0)}\right)}{z - z^{(0)}}.$$

Характер поведения орбиты в окрестности неподвижной точки зависит от значения производной $f'(z)$ в этой точке.

Теорема. *Неподвижная точка $z^{(0)}$ для функции $f(z)$ является притягивающей, если $|f'(z)| < 1$, и отталкивающей, если $|f'(z)| > 1$.*

Заметим, что производная квадратичной функции $f(z) = z^2 + c$ равна $f'(z) = 2z$. В соответствии с этим критерием, в хорошо знакомом нам случае $c = 0$ неподвижная точка $z^{(0)} = 0$ притягивающая, так как $|f'(0)| = 0 < 1$, а неподвижная точка $z^{(1)} = 1$ – отталкивающая, так как $|f'(1)| = 2 > 1$.

Мы не будем доказывать этот важный факт для функций комплексного переменного, но попытаемся объяснить его в случае вещественной функции $f(x)$ от вещественной переменной x. Пусть $x^{(0)}$ – неподвижная точка функции $f(x)$, т.е. $x^{(0)} = f\left(x^{(0)}\right)$. Рассмотрим графики двух функций $y = x$ и $y = f(x)$ в окрестности неподвижной точки $x^{(0)}$. Пусть $\left|f'\left(x^{(0)}\right)\right| < 1$, из рисунков 6,*а* и 6,*б* видно, что если точка x_0 расположена достаточно близко к $x^{(0)}$, то вытекающая из нее орбита $x_{n+1} = f(x_n)$ монотонно приближается к $x^{(0)}$:

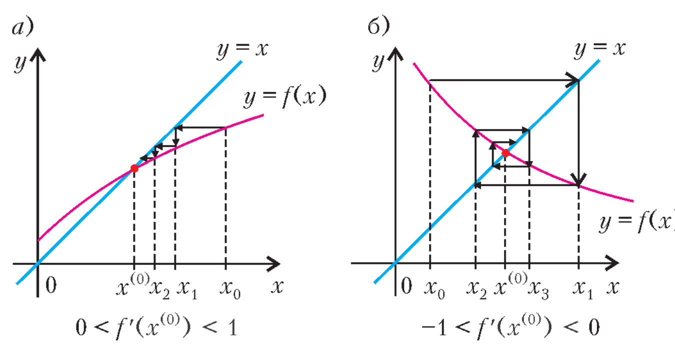


Рис. 6

$$\left|x_0 - x^{(0)}\right| > \cdots > \left|x_n - x^{(0)}\right| > \left|x_{n+1} - x^{(0)}\right| > \ldots$$

Условие «точка x_0 расположена достаточно близко» означает: точка x_0 расположена в той окрестности неподвижной точки, где производная удовлетворяет неравенству $|f'(x)| < 1$.

Если же $\left|f'\left(x^{(0)}\right)\right| > 1$, то вытекающая из точки x_0, расположенной в окрестности точки $x^{(0)}$, орбита $x_{n+1} = f(x_n)$ какое-то время будет удаляться от $x^{(0)}$ (рис.7,*а* и 7,*б*): $\left|x_0 - x^{(0)}\right| > \left|x_1 - x^{(0)}\right| > \ldots$ Причем уда-

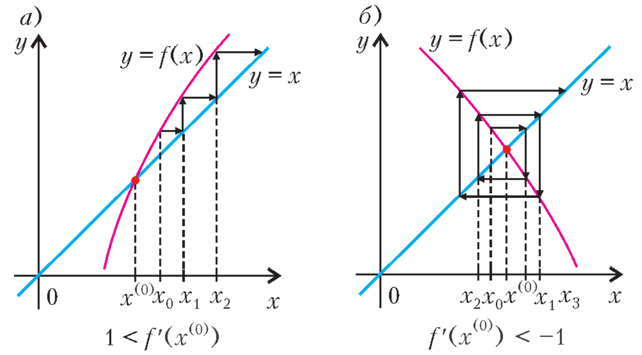


Рис. 7

ление каждой следующей точки x_{n+1} орбиты по сравнению с x_n от неподвижной точки гарантировано, пока орбита находится в окрестности неподвижной точки, где сохраняется неравенство $|f'(x)| > 1$. Но как только орбита выходит за пределы такой окрестности, ее поведение становится не столь однозначным.

Упражнение 3. Докажите, что отталкивающая неподвижная точка итератора $x_{n+1} = x_n^2 + c$ принадлежит множеству Жюлиа J_c, т.е. лежит на границе множеств P_c и E_c.

Самоподобие множества Жюлиа

Обозначим квадратичную функцию $z^2 + c$ через $f_c(z)$. Пусть U – множество точек на комплексной плоскости, через $f_c(U)$ обозначим образ этого множества при функции $f_c(z)$. Другими словами, $f_c(U)$ есть множество образов всех точек $z \in U$: $f_c(U) = \bigcup_{z \in U} f_c(z)$.

Посмотрим, что происходит со знакомыми множествами P_c, E_c, J_c. Возьмем точку $z_0 \in P_c$. Легко видеть, что точка $f_c(z_0)$ также является пленницей. Действительно, орбита точки $z_1 = f_c(z_0)$ совпадает с орбитой точки z_0 со сдвигом нумерации на единицу. Поэтому $f_c(P_c) \subseteq P_c$. Верно и обратное: $P_c \subseteq f_c(P_c)$. Таким образом, $P_c = f_c(P_c)$, т.е. под действием функции f_c множество P_c отображается на себя. Действительно, рассмотрим прообразы $u = f_c^{-1}(z_0)$ точки $z_0 = u^2 + c$. Понятно, что они оба также являются точками-пленницами. Так как *каждая* точка-пленница z_0 является f_c-образом точки-пленницы, то $P_c \subseteq f_c(P_c)$. В таких случаях говорят, что множество P_c *инвариантно* относительно отображения f_c.

По той же причине убегающее множество E_c также инвариантно относительно отображения f_c. Отсюда следует, что так как каждое из множеств E_c и P_c является инвариантным относительно отображения f_c, то и граница между ними, т.е. множество Жюлиа J_c, также инвариантна относительно f_c.

Установленная инвариантность множества Жюлиа относительно f_c порождает повторяемость, точнее схожесть, формы множества Жюлиа в целом с формами все более и более мелких его фрагментов. Например, салфетка Серпинского, описанная в статье «Игра «Хаос» и фракталы»[3], отличалась замечательным свойством: эта салфетка была подобна (даже гомотетична) любой из своих «четвертинок», каждая из которых была линейно вдвое меньше салфетки Серпинского. Четвертинка, в свою очередь, была подобна (опять с коэффициентом подобия $1/2$) «своей» четвертинке, и т.д. до бесконечности. Свойство целого быть подобным своей части называют *самоподобием*.

Возьмем на множестве Жюлиа J_c точку z и пусть $U \subset J_c$ – некоторая дуга, содержащая точку z. Так как множество Жюлиа под действием f_c отображается на себя, то дуга U переходит в другую дугу $f_c(U)$, содержащую точку $f_c(z)$. Если бы функция $f_c(z)$ была линейной относительно z, то преобразование f_c было бы преобразованием подобия, как это случилось в случае салфетки Серпинского. Однако наша функция $f_c(z)$ не линейная, а квадратичная. Поэтому соответствующие фрагменты не являются подобными друг другу. Тем не менее, они во многом очень схожи между собой.

На рисунке 8,*б* представлен (в том же масштабе) фрагмент множества Жюлиа, ограниченный рамкой на рисунке 8,*а*. Фрагмент, выделенный рамкой на рисунке 8,*б*, увеличен на рисунке 8,*в*. В свою очередь, рисунок 8,*г* представляет увеличение фрагмента, указанного в рамке на рисунке 8,*в*.

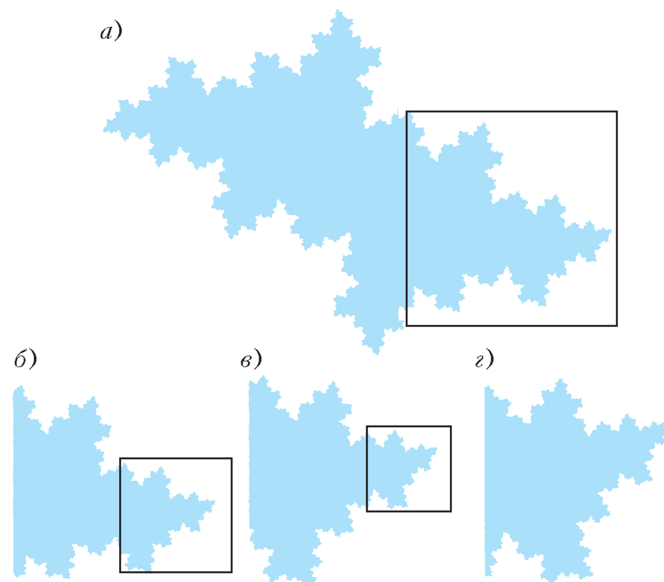


Рис. 8

Игра «Хаос» и множества Жюлиа

В заключение расскажем, как можно получать на мониторе компьютера изображение множества Жюлиа J_c для любого значения c. Предлагаемая процедура построения есть попросту версия игры «Хаос», которая подробно изложена для более простой ситуации в упомянутой статье «Игра «Хаос» и фракталы».

Давайте отправимся из произвольной точки-пленницы $z_0 \in P_c$ ($z_0 \neq z^{(0)}$) в путешествие по орбите «вверх»,

[3] *См. «Квант» №4 за 1997 год.*

переходя от одного прообраза к предыдущему. У точки z_0 имеются два прообраза $\pm z_{-1}$, такие, что $f_c(\pm z_1) = (\pm z_1)^2 + c = z_0$. Выберем один из них *случайным* образом и обозначим его через z_{-1}. У точки z_{-1} имеются опять два прообраза $\pm z_{-2}$. Выберем *случайно* один из двух прообразов и обозначим его через z_{-2}. Двигаясь таким образом по орбите вверх и делая на каждом шаге случайный выбор между двумя прообразами, получаем последовательность $z_{-1}, z_{-2}, z_{-3}, \ldots$ Можно показать, что эта *случайная* последовательность точек, оставаясь внутри множества P_c, приближается к множеству Жюлиа J_c. Более конкретно, последовательность $\{z_{-n}\}$ сидит на сложно устроенной спирали, которая асимптотически наматывается на множество Жюлиа J_c. Подчеркнем, что в силу случайного выбора одного из двух прообразов, происходящего на каждом шаге, эта последовательность точек $\{z_{-n}\}$ будет нанизываться на *все множество Жюлиа*. Поэтому несколько тысяч первых точек последовательности $\{z_{-n}\}$, выведенные на экран компьютера, имитируют множество Жюлиа. Так как начальная точка орбиты может быть выбрана достаточно далеко от множества Жюлиа J_c да и орбита $\{z_{-n}\}$ сходится ко множеству Жюлиа не слишком быстро, то несколько первых точек орбиты следует выбросить, дабы не искажать картину. Другая неприятность – орбита распределяется вдоль множества Жюлиа не очень равномерно: некоторые участки проявляются весьма отчетливо, на других, наоборот, есть «проплешины». Чтобы заполнить эти проплешины в изображении, нужно либо позволить программе долго-долго работать, либо, учитывая самоподобие множества Жюлиа, «пересадить» на проплешины куски кривой Жюлиа с других уже проявившихся участков. Последний подход намного эффективней. Благодаря ему уже первые несколько точек орбиты дают изображение множества Жюлиа, более отчетливое, чем при стандартном подходе – сотня тысяч точек орбиты.

Преодолев эти трудности, вы будете вознаграждены: вы сможете самостоятельно знакомиться с миром изумительных по красоте и разнообразию множеств Жюлиа. Судя по эскизам этих множеств, которые делал сам Жюлиа «от руки», автор вряд ли представлял все великолепие «царства» множеств, носящих теперь его имя, а о некоторых глубоких свойствах он даже не подозревал. Например, во второй половине XX века был обнаружен «взрывной» характер множеств Жюлиа. Давайте при заданном направлении «ветра» c будем непрерывно увеличивать силу $|c|$. Получающиеся при этом множества Жюлиа становятся все более и более сложными и ажурными. Оказывается, что при достижении некоторого значения модуля $|c|$ множество Жюлиа *взрывается*, разлетаясь при этом на *бесконечное* число отдельных кусочков (рис.9). Значение модуля $|c|$, при котором происходит взрыв, зависит от направления вектора c. Отложив на плоскости все значения c, при которых происходит взрыв множества J_c, Б.Мандельброт получил новое множество, еще

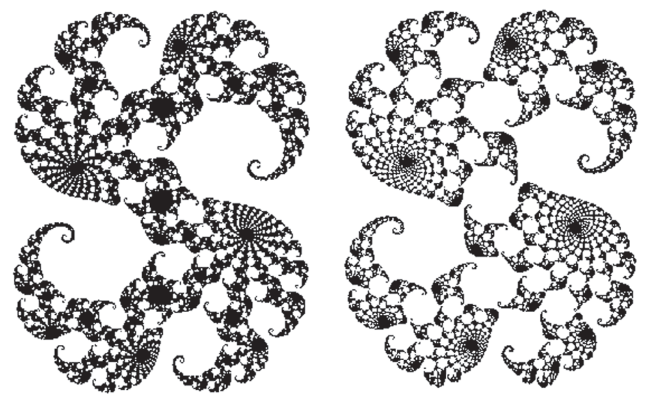


Рис. 9

более сложное и восхитительное, чем множества Жюлиа. Теперь это множество называется именем его открывателя – *множество Мандельброта*. Но это – тема другой статьи.

НАША ОБЛОЖКА

Мозаика из снежинок

На первой странице обложки изображена мозаика из так называемых *снежинок Кох*. Снежинка Кох является одним из фракталов, о которых можно прочитать, например, в статье Н.Долбилина в этом номере журнала.

Построить снежинку можно следующим образом. Возьмем равносторонний треугольник, разделим каждую его сторону на три равных отрезка и построим на средних отрезках правильные треугольники во внешнюю сторону от исходного. Получим фигуру, ограниченную 12 отрезками. Разделим каждый из этих отрезков на три части и вновь построим на средних отрезках правильные треугольники (рис.1).

Повторим ту же операцию с отрезками, ограничивающими полученную фигуру, и т.д. В пределе как раз получится снежинка Кох.

Отметим, что периметр снежинки бесконечен, а площадь конечна и равна $\frac{8}{5}$ площади исходного треугольника.

(Продолжение см. на с. 29)