Сложение скоростей

В.ЧИВИЛЁВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ НА ПРИМЕРАХ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ задач рассматривается правило сложения скоростей. Это правило устанавливает связь между скоростями одной и той же материальной точки в разных системах отсчета.

Напомним, что каждая система отсчета жестко связана с некоторым телом отсчета и что движение материальной точки выглядит по-разному в различных системах отсчета.

Пусть есть две системы отсчета S и S', движущиеся друг относительно друга. Поскольку движение и покой относительны, договоримся называть систему S неподвижной, а систему S' – движущейся. Движение материальной точки M относительно системы S называют абсолютным движением, а относительно системы S' –относительным движением. Скорость точки M относительно системы S называют, соответственно, абсолютной скоростью, а относительно системы S' – относительной скоростью. Для более образного представления можно принять, например, за систему S комнату, за систему S' – воздушный шарик, летящий с вращением, а за точку M – муравья, ползущего по шарику.

Введем еще понятие переносной скорости. Это скорость той точки системы S' относительно системы S, через которую проходит в данный момент точка M. В нашем примере это скорость относительно комнаты той точки воздушного шарика, через которую проползает муравей в данный момент.

В любой момент времени абсолютная $\vec{v}_{\text{абс}}$, относительная $\vec{v}_{\text{отн}}$ и переносная $\vec{v}_{\text{пер}}$ скорости связаны соотношением

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}} .$$

Это и есть правило сложения скоростей.

Сделаем два полезных замечания.

1) Переносная скорость в общем случае не есть скорость системы S' относительно S! Действительно, при движении воздушного шарика с вращением скорости всех точек шарика относительно комнаты различны, и говорить о скорости шарика (системы S') относительно комнаты (системы S) бессмысленно. Только при поступательном (без вращения) движении S' скорость всех точек системы S' относительно S (переносная скорость) одна та же – ее и называют скоростью системы S' относительно системы S.

2) Соотношение между тремя скоростями – чисто кинематическое соотношение, никак не связанное с инерциальностью или неинерциальностью систем S и S', т.е. S и S' могут быть обе неинерциальными.

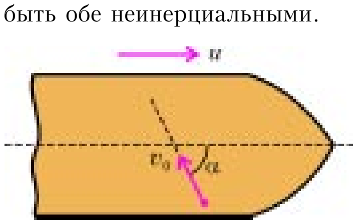

Рис. 1

Теперь – конкретные задачи.

Задача 1. *По палубе теплохода, движущегося относительно берега со скоростью u = 15 км/ч, идет пассажир со скоростью $v_0 = u/3$ относительно палубы в направлении, составляющем угол α = 60° с продольной осью теплохода (рис.1). Найдите скорость пассажира относительно берега.*

Возьмем за неподвижную систему отсчета берег, за движущуюся систему отсчета – теплоход. Тогда $\vec{v}_0$ – относительная скорость, $\vec{u}$ – переносная скорость. Скорость $\vec{v}$ пассажира относительно берега будет абсолютной скоростью.

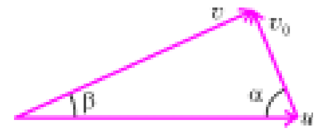

Рис. 2

По правилу сложения скоростей (рис.2),

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} .$$

Используя теоремы косинусов и синусов, находим модуль скорости v пассажира относительно берега и угол β между этой скоростью и осью теплохода:

$$v = \sqrt{u^2 + v_0^2 - 2v_0 u \cos\alpha} = \frac{u\sqrt{7}}{3} \approx 13 \text{ км/ч} ,$$

$$\sin\beta = \frac{v_0}{v}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0,33 , \quad \beta \approx 19° .$$

Задача 2. *В комнате вращается диск с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси O, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. По диску вдоль его радиуса ползет жук со скоростью v_0 относительно диска (рис.3). Найдите модуль скорости жука относительно комнаты в момент, когда жук находится в точке A диска на расстоянии R от оси O.*

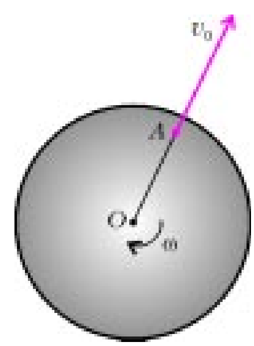

Рис. 3

За неподвижную систему отсчета естественно взять комнату, а за движущуюся – диск. Тогда $\vec{v}_0$ – относительная скорость. Переносной скоростью $\vec{v}_{\text{пер}}$ будет скорость точки A диска относительно комнаты. Эта скорость направлена перпендикулярно радиальному направлению OA и равна

$$v_{\text{пер}} = \omega R .$$

Скорость $\vec{v}$ жука относительно комнаты есть абсолютная скорость.

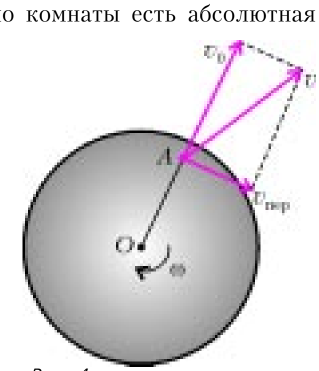

Рис. 4

По правилу сложения скоростей (рис.4),

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{пер}} .$$

Итак, модуль скорости жука относительно комнаты равен

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_{\text{пер}}^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2} .$$

Задача 3. *Радиус вращающейся планеты r = 2000 км. Скорость точек экватора планеты v_1 = 0,6 км/с. В плоскости экватора по орбите радиусом R = 3000 км движется спутник в сторону вращения планеты со скоростью v_2 = = 2 км/с. Найдите скорость спутника относительно планеты.*

За неподвижного систему отсчета примем систему, в которой заданы скорости v_1 и v_2. В качестве движущейся системы отсчета возьмем планету. Абсолютная скорость спутника задана и равна v_2. Нам надо найти скорость спутника относительно планеты, т.е. относительную скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$.

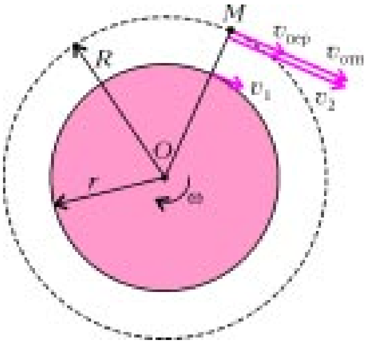

Рис. 5

Пусть в некоторый момент времени спутник проходит через точку M, жестко связанную с планетой мысленным стержнем OM (рис.5). Скорость точки M в неподвижной системе отсчета и есть переносная скорость $\vec{v}_{пер}$. Найдем ее.

Угловая скорость вращения планеты равна

$$\omega = \frac{v_1}{r},$$

переносная скорость –

$$v_{пер} = \omega R = v_1 \frac{R}{r}.$$

По правилу сложения скоростей (см. рис.5),

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}.$$

Видим, что относительная скорость спутника сонаправлена с абсолютной скоростью $\vec{v}_2$ и равна (по модулю)

$$v_{отн} = v_2 - v_{пер} = v_2 - v_1 \frac{R}{r} = 1{,}1 \text{ км/с}.$$

Заметим, что ответ $v_{отн} = v_2 - v_1 = 1{,}4$ км/с (который нередко дают абитуриенты) неверен, так как из-за вращения планеты переносная скорость не равна v_1.

Задача 4. *По двум кольцевым дорогам радиусом R, лежащим в одной плоскости, движутся автомобили A_1 и A_2 со скоростями $v_1 = v = 20$ км/ч и $v_2 = 2v$ (рис.6). Размеры автомобилей малы по сравнению с R. В некоторый момент автомобили находились в точках M и C на расстоянии $R/2$ друг от друга. 1) Найдите скорость автомобиля A_2 в системе отсчета, связанной с автомобилем A_1 в этот момент. 2) Найдите скорость автомобиля A_2 в системе отсчета, связанной с автомобилем A_1, когда A_2 окажется в точке D.*

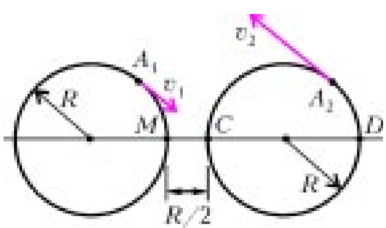

Рис. 6

За неподвижную систему отсчета возьмем дорогу. Скорость автомобиля A_2 в этой системе отсчета есть абсолютная скорость. Обозначим через $\vec{v}_{C\,абс}$ и $\vec{v}_{D\,абс}$ абсолютные скорости автомобиля A_2 при прохождении им точек C и D (рис.7). Согласно условию задачи,

$$v_{C\,абс} = v_{D\,абс} = v_2 = 2v.$$

Движущуюся систему отсчета жестко свяжем с автомобилем A_1. Ясно, что эта система вращается вокруг оси O с угловой скоростью

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

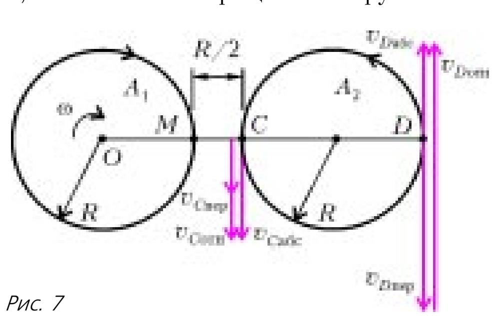

Рис. 7

Переносные скорости при прохождении автомобилем A_2 точек C и D обозначим $\vec{v}_{C\,пер}$ и $\vec{v}_{D\,пер}$. Модули этих скоростей равны

$$v_{C\,пер} = \omega \cdot OC = \frac{v}{R}\left(R + \frac{R}{2}\right) = \frac{3}{2}v,$$

$$v_{D\,пер} = \omega \cdot OD = \frac{v}{R}\left(R + \frac{R}{2} + 2R\right) = \frac{7}{2}v.$$

Нам надо найти относительные скорости $\vec{v}_{C\,отн}$ и $\vec{v}_{D\,отн}$ автомобиля A_2 в движущейся системе отсчета при прохождении им точек C и D.

По правилу сложения скоростей (см. рис.7),

$$\vec{v}_{C\,абс} = \vec{v}_{C\,отн} + \vec{v}_{C\,пер}, \quad \vec{v}_{D\,абс} = \vec{v}_{D\,отн} + \vec{v}_{D\,пер}.$$

Скорости автомобиля A_2 относительно автомобиля A_1 при прохождении точек C и D сонаправлены со скоростями (относительно дороги) автомобиля A_2 в этих точках и равны

$$v_{C\,отн} = v_{C\,абс} - v_{C\,пер} = 2v - \frac{3}{2}v = 0{,}5v = 10 \text{ км/ч},$$

$$v_{D\,отн} = v_{D\,абс} + v_{D\,пер} = 2v + \frac{7}{2}v = 5{,}5v = 110 \text{ км/ч}.$$

Задача 5. *Во время града автомобиль едет со скоростью u = 25 км/ч по горизонтальной дороге. Одна из градин ударяется о переднее (ветровое) стекло автомобиля, наклоненное под углом α = 30° к вертикали, и отскакивает горизонтально в направлении движения автомобиля (рис.8). Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что скорость градины непосредственно перед ударом вертикальна, найдите скорость градины: 1) до удара; 2) после удара.*

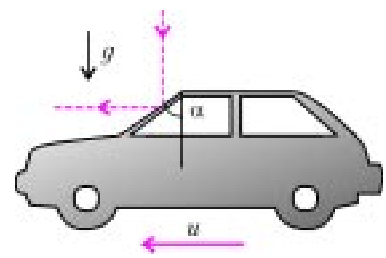

Рис. 8

За неподвижную систему отсчета возьмем дорогу, а за движущуюся систему отсчета – автомобиль. Надо найти скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ градины относительно дороги до и после удара, т.е. абсолютные скорости градины. По условию задачи скорость $\vec{v}_1$ направлена вертикально вниз, а скорость $\vec{v}_2$ – горизонтально (рис.9).

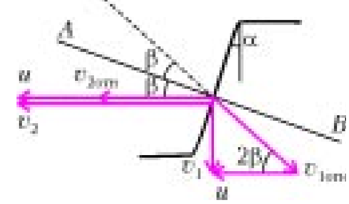

Рис. 9

Сразу после удара абсолютная скорость градины $\vec{v}_2$, ее относительная скорость $\vec{v}_{2\,отн}$ и переносная скорость (скорость автомобиля) $\vec{u}$ связаны равенством

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2\,отн} + \vec{u}.$$

Поскольку скорости $\vec{v}_2$ и $\vec{u}$ горизонтальны, то скорость $\vec{v}_{2\,отн}$ тоже горизонтальна, причем

$$v_2 = v_{2\,отн} + u.$$

Относительная скорость $\vec{v}_{2\,отн}$ составляет с нормалью AB к поверхности стекла некоторый угол β – угол отражения. Из динамики известно, что при упругом ударе о поверхность неподвижного массивного тела угол падения равен углу отражения, а модули скоростей падения и отражения равны. Поэтому скорость градины относительно автомобиля непосредственно перед ударом $\vec{v}_{1\text{отн}}$ составляет тоже угол β с нормалью к поверхности стекла и равна по модулю скорости после удара:

$$v_{1\,\text{o2н}} = v_{2\,\text{o2н}}.$$

Установим связь между скоростями перед ударом. Абсолютная скорость $\vec{v}_1$, относительная скорость $\vec{v}_{1\text{отн}}$ и переносная скорость $\vec{u}$ связаны равенством

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\text{отн}} + \vec{u}.$$

Из геометрии рисунка 9 легко показать, что $\beta = \alpha$ и что скорость $\vec{v}_{1\text{отн}}$ составляет с горизонтом угол 2β.

Используя рисунок 9, находим скорости градины до и после удара:

$$v_1 = u\,\mathrm{tg}\,2\beta = u\,\mathrm{tg}\,2\alpha = u\sqrt{3} \approx 43 \text{ км/ч},$$

$$v_2 = v_{2\,\text{отн}} + u = v_{1\,\text{отн}} + u = \frac{u}{\cos 2\beta} + u =$$

$$= u\left(\frac{1}{\cos 2\alpha} + 1\right) = 3u = 75 \text{ км/ч}.$$

Задача 6. *Лента почтового транспортера движется с постоянной скоростью v, находясь в одной плоскости с горизонтальной поверхностью стола. На ленту попадает небольшая коробка, двигавшаяся по столу со скоростью $v/2$, направленной под углом α ($\cos\alpha = 1/9$) к краю ленты (рис.10). Коэффициент трения скольжения между коробкой и лентой μ. 1) Чему равна скорость коробки (по модулю) относительно ленты в начале движения по ленте? 2) При какой минимальной ширине ленты коробка не преодолеет ленту?*

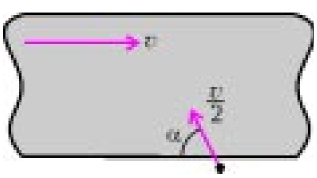

Рис. 10

Удобно за неподвижную систему отсчета взять стол, а за движущуюся систему отсчета – ленту. Тогда скорость ленты это переносная скорость $\vec{v}_{\text{пер}}$, причем

$$v_{\text{пер}} = v.$$

В начале движения по ленте скорость коробки относительно стола есть абсолютная скорость $\vec{v}_{\text{абс}}$, равная скорости коробки относительно стола до въезда на ленту, поэтому

$$v_{\text{абс}} = \frac{v}{2}.$$

Скорость коробки относительно ленты в начале движения по ленте есть относительная скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$.

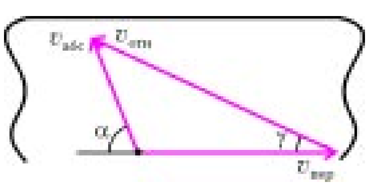

Рис. 11

По правилу сложения скоростей (рис.11),

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Используя теорему косинусов для треугольника из векторов скоростей, получаем

$$v_{\text{отн}}^2 = v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{абс}}^2 - 2v_{\text{пер}}v_{\text{абс}}\cos(180° - \alpha).$$

С учетом выражений для $v_{\text{пер}}$ и $v_{\text{абс}}$ через v после упрощений находим скорость коробки относительно ленты в начале движения по ленте:

$$v_{\text{отн}} = \frac{7}{6}v.$$

Для ответа на второй вопрос удобно перейти в инерциальную систему отсчета, связанную с лентой. Относительно ленты коробка имеет начальную скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$, направленную под некоторым углом γ к краю ленты, и движется прямолинейно и равнозамедленно с ускорением μg. При требовании минимальности ширины d ленты коробка остановится на ленте у противоположного края ленты, пройдя по ленте путь

$$s = \frac{d}{\sin\gamma}.$$

Для равнозамедленного движения по ленте можно записать

$$v_{\text{отн}}^2 = 2\mu g s.$$

Из последних двух равенств, с учетом полученного ранее выражения для $v_{\text{отн}}$ через v, находим

$$d = \frac{49}{72}\frac{v^2\sin\gamma}{\mu g}.$$

По теореме синусов для треугольника из векторов скоростей,

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{v_{\text{абс}}}{v_{\text{отн}}},$$

где

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Отсюда, с учетом выражений для $v_{\text{абс}}$ и $v_{\text{отн}}$ через v, получаем

$$\sin\gamma = \frac{4\sqrt{5}}{21}.$$

Подставив значение $\sin\gamma$ в выражение для d, находим минимальную ширину ленты:

$$d = \frac{7\sqrt{5}}{54}\frac{v^2}{\mu g}.$$

Упражнения

1. По прямолинейному участку CD движется тепловоз со скоростью v (рис.12). Автомобиль движется со скоростью $v/4$ по дороге в виде дуги окружности радиусом R. Расстояние от центра окружности до железной дороги $OK = 2R$. В некоторый момент времени тепловоз оказался в точке K, а автомобиль – в точке A. Найдите в этот момент скорость тепловоза относительно автомобиля (системы отсчета, связанной с автомобилем). Размеры тепловоза и автомобиля малы по сравнению с R.

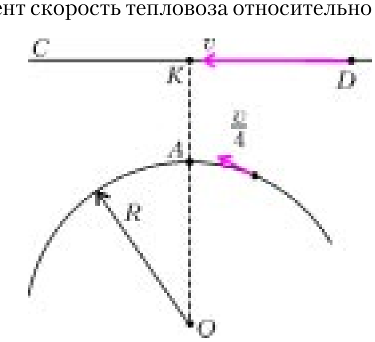

Рис. 12

2. Идет град, и автомобиль едет со скоростью u = 29 км/ч по горизонтальной дороге. Одна из градин ударяется о стекло заднего окна автомобиля, наклоненное под углом β = 30° к горизонту, и отскакивает горизонтально в направлении, противоположном движению автомобиля. Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что ее скорость непосредственно перед ударом вертикальна, найдите скорость градины: 1) до удара; 2) после удара.

3. Лента горизонтального тротуара шириной d движется с постоянной скоростью v. На ленту попадает шайба, двигавшаяся с горизонтальной скоростью $3v$, направленной под углом α ($\cos\alpha = 2/3$) к краю ленты. 1) Чему равна скорость шайбы (по модулю) относительно тротуара в начале движения по тротуару? 2) При каком максимальном коэффициенте трения скольжения между шайбой и тротуаром шайба преодолеет тротуар?