Диофантовы уравнения для многочленов

В. В. Прасолов

Многочлены обладают многими из свойств, которыми обладают натуральные числа. Например, для многочлена определено разложение на множители, для пары многочленов определен наибольший общий делитель и т. д. В связи с этим для многочленов можно поставить задачи, аналогичные известным задачам и проблемам теории чисел. Как правило, для многочленов задача решается существенно проще. Например, знаменитая гипотеза Ферма о том, что при $n \geqslant 3$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах, была доказана лишь совсем недавно. А её аналог (неразрешимость уравнения $f^n + g^n = h^n$ для многочленов), как мы сейчас увидим, доказывается сравнительно просто.

Описание всех троек натуральных чисел α, β, γ, для которых уравнение $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$ для многочленов f, g, h имеет нетривиальное решение, было получено в конце прошлого века. Мы приведем более современную версию этой классификации.

При доказательстве неразрешимости многих диофантовых уравнений для многочленов весьма эффективным оказывается следующее утверждение.

Теорема 1 (Мейсон). *Пусть $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — попарно взаимно простые многочлены, связанные соотношением*

$$a(x) + b(x) + c(x) = 0.$$

Тогда степень каждого из этих многочленов не превосходит $n_0(abc) - 1$, где n_0 — количество различных корней многочлена.

Доказательство. Положим $f = a/c$ и $g = b/c$. Тогда f и g — рациональные функции, связанные соотношением $f + g + 1 = 0$. Продифференцировав это равенство, получим $f' = -g'$. Поэтому

$$\frac{b}{a} = \frac{g}{f} = -\frac{f'/f}{g'/g}.$$

Рациональные функции f и g имеют специальный вид $\prod(x-\rho_i)^{r_i}$, $r_i \in \mathbb{Z}$. Для функции $R(x)=\prod(x-\rho_i)^{r_i}$ выполняется равенство

$$\frac{R'}{R}=\sum\frac{r_i}{x-\rho_i}.$$

Пусть $a(x)=\prod(x-\alpha_i)^{a_i}$, $b(x)=\prod(x-\beta_j)^{b_j}$, $c(x)=\prod(x-\gamma_k)^{c_k}$. Тогда

$$\begin{aligned} f'/f &= \sum\frac{a_i}{x-\alpha_i}-\sum\frac{c_k}{x-\gamma_k}, \\ g'/g &= \sum\frac{b_j}{x-\beta_j}-\sum\frac{c_k}{x-\gamma_k}. \end{aligned}$$

Поэтому после умножения на многочлен

$$N_0=\prod(x-\alpha_i)(x-\beta_j)(x-\gamma_k)$$

степени $n_0(abc)$ рациональные функции f'/f и g'/g становятся многочленами степени не выше $n_0(abc)-1$. Таким образом, из взаимной простоты многочленов $a(x)$ и $b(x)$ и из равенства

$$\frac{b}{a}=-\frac{N_0 f/f'}{N_0 g/g'}$$

следует, что степень каждого из многочленов $a(x)$ и $b(x)$ не превосходит $n_0(abc)-1$. Для многочлена $c(x)$ доказательство аналогично.

Из теоремы 1 можно извлечь интересные следствия, которые мы сформулируем как теоремы 2–4.

Теорема 2 (Дэвенпорт). *Пусть f и g — взаимно простые многочлены ненулевой степени. Тогда*

$$\deg(f^3-g^2)\geqslant\frac{1}{2}\deg f+1.$$

Доказательство. Если $\deg f^3\neq\deg g^2$, то

$$\deg(f^3-g^2)\geqslant\deg f^3=3\deg f\geqslant\frac{1}{2}\deg f+1.$$

Поэтому можно считать, что $\deg f^3=\deg g^2=6k$.

Рассмотрим многочлены $F=f^3$, $G=g^2$ и $H=F-G=f^3-g^2$. Ясно, что $\deg H\leqslant 6k$. Согласно теореме 1,

$$\max(\deg F,\deg G,\deg H)\leqslant n_0(FGH)-1\leqslant\deg f+\deg g+\deg H-1,$$

т. е.

$$6k \leqslant 2k + 3k + \deg H - 1.$$

Таким образом, $\deg H \geqslant k + 1 = \frac{1}{2}\deg f + 1$.

Замечание. Для многочленов

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + 2, \\ g(t) &= t^3 + 3t \end{aligned}$$

неравенство Дэвенпорта обращается в равенство.

Теорема 3. *Пусть f, g и h — взаимно простые многочлены, причем хотя бы один из них — не константа. Тогда равенство*

$$f^n + g^n = h^n$$

не может выполняться при $n \geqslant 3$.

Доказательство. Согласно теореме 1, степень каждого из многочленов f^n, g^n и h^n не превосходит

$$\deg f + \deg g + \deg h - 1.$$

Сложив эти три неравенства, получим

$$n(\deg f + \deg g + \deg) \leqslant 3(\deg f + \deg g + \deg h - 1).$$

Следовательно, $n < 3$.

Диофантово уравнение $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$ для многочленов f, g, h имеет очевидное решение, если одно из чисел α, β, γ равно 1. Поэтому будем считать, что $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 2$.

Теорема 4. *Пусть α, β, γ — натуральные числа, причем $2 \leqslant \alpha \leqslant \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда уравнение*

$$f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$$

имеет взаимно простые решения лишь для случая следующих наборов (α, β, γ): $(2, 2, \gamma)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ и $(2, 3, 5)$.

Доказательство. Пусть a, b и c — степени многочленов f, g и h. Тогда, согласно теореме 1,

$$\alpha a \leqslant a + b + c - 1, \tag{1}$$

$$\beta b \leqslant a + b + c - 1, \tag{2}$$

$$\gamma c \leqslant a + b + c - 1. \tag{3}$$

Следовательно,

$$\alpha(a+b+c) \leqslant \alpha a+\beta b+\gamma c \leqslant 3(a+b+c)-3,$$

и значит, $\alpha < 3$. По условию $\alpha \geqslant 2$, поэтому $\alpha = 2$. При $\alpha = 2$ неравенство 1 принимает вид

$$a \leqslant b+c-1. \tag{4}$$

Сложив неравенства (4), (2) и (3), получим

$$\beta b+\gamma c \leqslant 3(b+c)+a-3.$$

Учитывая, что $\beta \leqslant \gamma$, и еще раз применяя неравенство (1), получаем

$$\beta(b+c) \leqslant 4(b+c)-4,$$

а значит, $\beta \leqslant 4$, т. е. $\beta = 2$ или 3.

Остается доказать, что если $\beta = 3$, то $\gamma \leqslant 5$. При $\beta = 3$ неравенство (2) принимает вид

$$2\beta \leqslant a+c-1. \tag{5}$$

Сложив неравенства (4) и (5), получим

$$b \leqslant 2c-2.$$

В таком случае из неравенства (4) следует, что

$$a \leqslant 3c-3.$$

Из двух последних неравенств и неравенства (3) следует, что

$$\gamma c \leqslant 6c-6,$$

поэтому $\gamma \leqslant 5$.

Многочлены, удовлетворяющие соотношению $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$, тесно связаны с правильными многогранниками. Подробно эта связь описана в книге Ф. Клейна[1]; там же указан способ построения этих многочленов. Мы приведем лишь конечный результат.

[1] Клейн Ф. *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.* — М.: Наука. 1989.

Случай $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = n$ связан с вырожденным правильным многогранником — плоским n-угольником. Требуемое соотношение имеет вид

$$\left(\frac{x^n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^n-1}{2}\right)^2 = x^n.$$

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$ связан с правильным тетраэдром. Соотношение имеет вид

$$12i\sqrt{3}(x^5 - x)^2 + (x^4 - 2i\sqrt{3}x^2 + 1)^3 = (x^4 + 2i\sqrt{3}x^2 + 1)^3.$$

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$ связан с кубом и правильным октаэдром. Соотношение имеет вид

$$(x^{12} - 33x^8 - 33x^4 + 1)^2 + 108(x^5 - x)^4 = (x^8 + 14x^4 + 1)^3.$$

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$ связан с додекаэдром и икосаэдром. Соотношение имеет вид $T^2 + h^3 = 1728f^5$, где

$$\begin{array}{rcl} T & = & x^{30} + 1 + 522(x^{25} - x^5) - 10005(x^{20} + x^{10}), \\ H & = & -(x^{20} + 1) + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10}, \\ f & = & x(x^{10} + 11x^5 - 1). \end{array}$$

Теорема 3 показывает, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, где x, y, z — натуральные числа, имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение точно такое же уравнение для многочленов. Естественно возникает вопрос, не будет ли уравнение $x^\alpha + y^\beta = z^\gamma$ иметь полиномиальные решения в том и только том случае, когда оно будет иметь натуральные решения.

Первый пример обнадеживает — уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ имеет как полиномиальные, так и натуральные решения. А именно, бесконечную серию решений этого уравнения в натуральных числах можно построить следующим образом. Положим $x = n(n-1)/2$, $y = n$ и $z^2 = n(n+1)/2$. Требуется подобрать число n так, чтобы число z было целым. Равенство $2z^2 = n(n+1)$ можно записать в виде

$$(2n+1)^2 - 2(2z)^2 = 1.$$

Это — знаменитое уравнение Ферма–Пелля, которое имеет бесконечно много решений. Например, при $n = 8$ получаем $x = 28$, $y = 8$, $z = 6$. Помимо этой бесконечной серии решений есть и другие решения.

Но уравнение $x^2 + y^4 = z^6$ опровергает наши надежды. У этого уравнения нет полиномиальных решений, но есть натуральные решения. Одно из его решений имеет вид $x = 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7 \cdot 29^8$, $y = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 29^4$, $z = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 29^3$.