Теорема о пучке коник, проходящих через 4 точки

В. В. Прасолов

Коническим сечением или просто *коникой* называется кривая, задаваемая уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Семейство коник, проходящих через вершины фиксированного четырехугольника, допускает простое описание. Будем считать, что прямая AB задается линейным уравнением $l_{AB} = 0$. Тогда во всех вершинах четырехугольника $ABCD$ обращаются в нуль как функция $l_{AB} \cdot l_{CD}$, так и функция $l_{BC} \cdot l_{AD}$. Поэтому уравнение

$$\lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{BC} \cdot l_{AD} = 0$$

задает конику, проходящую через вершины четырехугольника $ABCD$. Оказывается, верно и обратное.

Теорема 1. *Пусть никакие три из точек A, B, C и D не лежат на одной прямой. Тогда уравнение любой коники, проходящей через точки A, B, C и D, можно представить в виде*

$$\lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{BC} \cdot l_{AD} = 0.$$

Доказательство. Можно считать, что прямые AB и AD заданы уравнениями $y = 0$ и $x = 0$ соответственно (система координат не обязательно прямоугольная). Пусть $f = 0$ – уравнение данной коники. Ограничения функций f и $\lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{BC} \cdot l_{AD} = \lambda y l_{CD} + \mu x l_{BC}$ на любую из осей координат являются квадратными трехчленами с двумя общими корнями (A и B или A и D). Поэтому числа λ и μ можно подобрать так, что многочлен

$$P(x, y) = f(x, y) - \lambda y l_{CD}(x, y) - \mu x l_{BC}(x, y)$$

обращается в нуль как при $x = 0$, так и при $y = 0$. Это означает, что он делится на xy, т. е. $P(x, y) = xyQ$, где Q – константа. В точке C многочлен P обращается в нуль, а $xy \neq 0$. Поэтому $Q = 0$, т. е.

$$f = \lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{BC} \cdot l_{AD}.$$

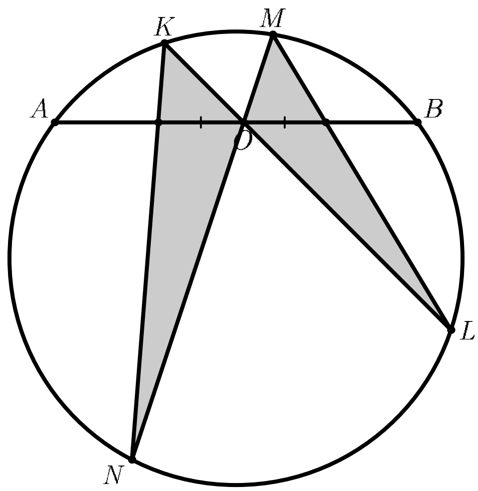

Рис. 1.

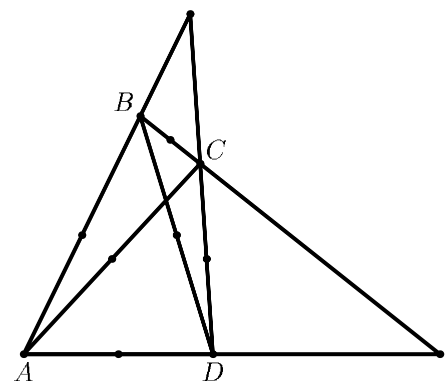

Рис. 2.

Следствие 1. *Пусть $f = 0$ и $g = 0$ – уравнения двух различных коник, проходящих через вершины четырехугольника $ABCD$. Тогда уравнение любой коники, проходящей через вершины четырехугольника $ABCD$, имеет вид $\lambda f + \mu g = 0$.*

Доказательство. Коники, проходящие через вершины четырёхугольника $ABCD$, образуют проективную прямую, порожденную точками $l_{AB} \cdot l_{CD} = 0$ и $l_{AD} \cdot l_{BC} = 0$. Эта прямая порождена также парой любых других точек, например, точками $f = 0$ и $g = 0$.

Теорема 1 позволяет дать простые доказательства многих других геометрических теорем. Приведем несколько таких примеров.

Теорема о бабочке

В связи с тем, что на рис. 1 можно при желании увидеть изображение бабочки, следующее утверждение часто называют теоремой о бабочке.

Теорема 2. *Пусть хорды KL и MN проходят через середину O хорды AB некоторой окружности. Тогда прямые KN и ML пересекают прямую AB в точках, равноудаленных от точки O.*

Доказательство. Через точки K, L, M, и N проходят следующие три коники: окружность $f = 0$, $g = l_{KL} \cdot l_{MN} = 0$ и $h = l_{KN} \cdot l_{ML} = 0$. Поэтому $h = \lambda f + \mu g$. Это равенство верно и для ограничений указанных функций на прямую AB. Введем на AB координату x, приняв точку O

за начало координат. Тогда можно считать, что $f = x^2 - a$ и $g = x^2$, поэтому $h = bx^2 - c$. Следовательно, корни уравнения $h = 0$ равноудалены от точки O.

Приведенное доказательство теоремы о бабочке позволяет доказать следующее её обобщение, в котором никакой бабочки уже не видно.

Теорема 3. *Три коники имеют* 4 *общих точки. Прямая AB высекает на двух из них хорды, имеющие общую середину O. Тогда точка O является также серединой хорды, высекаемой AB на третьей конике.*

Теорема о двух бабочках

Как мы уже говорили, самопересекающийся четырехугольник до некоторой степени напоминает бабочку. Поэтому следующее утверждение иногда называют теоремой о двух бабочках.

Теорема 4. *Пусть стороны самопересекающихся четырехугольников $KLMN$ и $K'L'M'N'$, вписанных в одну и ту же окружность, пересекают хорду AB этой окружности в точках P, Q, R, S и P', Q', R', S' соответственно. Тогда если три из точек P, Q, R, S совпадают с тремя из точек P', Q', R', S', то и оставшиеся точки тоже совпадают.*

Доказательство. Согласно теореме 1,

$$\lambda l_{KL} l_{MN} + \mu l_{KN} l_{ML} = f = \lambda' l_{K'L'} l_{M'N'} + \mu' l_{K'N'} l_{M'L'}.$$

Рассмотрев ограничение этого равенства на прямую AB, получим равенство вида

$$\alpha(x-p)(x-q) + \beta(x-r)(x-s) = \alpha'(x-p)(x-q) + \beta'(x-r)(x-s'). \quad (1)$$

При этом требуется доказать, что $s = s'$.

Равенство (1) можно преобразовать к виду

$$\alpha''(x-p)(x-q) = (x-r)[\beta(x-s) - \beta'(x-s')].$$

В том случае, когда точки P, Q, R, S попарно различны, $(x-p)(x-q)$ не делится на $(x-r)$. Поэтому $\beta(x-s) - \beta'(x-s') = 0$. Следовательно, $s = s'$.

Точки пересечения прямых Паскаля

Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$, вершины которого лежат на конике $f = 0$. Четырехугольники $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$ вписаны в эту конику, поэтому f можно представить в любом из следующих видов:

$$f = \lambda_1 l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu_1 l_{AD} \cdot l_{BC}, \tag{1}$$

$$f = \lambda_2 l_{AF} \cdot l_{ED} + \mu_2 l_{AD} \cdot l_{EF}, \tag{2}$$

$$f = \lambda_3 l_{BE} \cdot l_{CF} + \mu_3 l_{BC} \cdot l_{EF}. \tag{3}$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$\lambda_1 l_{AB} \cdot l_{CD} - \lambda_2 l_{AF} \cdot l_{ED} = (\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}) l_{AD}.$$

Пусть X — точка пересечения прямых AB и ED. В точке X обращаются в нуль функции $l_{AB} \cdot l_{CD}$ и $l_{AF} \cdot l_{ED}$, а функция l_{AD} в этой точке в нуль не обращается. Следовательно, в точке X обращается в нуль функция $\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}$, т. е. точка X лежит на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$. Аналогично доказывается, что на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$ лежит точка пересечения прямых CD и AF. Очевидно также, что точка пересечения прямых BC и EF лежит на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 5 (Паскаль). *Если точки A, B, C, D, E и F лежат на одной конике, то точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.*

Но продолжим рассуждение дальше. Приравнивая (2) и (3), получим, что точки пересечения прямых AF и BE, ED и CF, AD и BC лежат на прямой $\mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC}$. А приравняв (1) и (3), получим, что точки пересечения прямых AB и CF, CD и BE, AD и EF лежат на прямой $\mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$. Легко проверить, что полученные прямые

$$\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}, \quad \mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC} \ \text{ и } \mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$$

пересекаются в одной точке. В самом деле, если X – точка пересечения первых двух из этих прямых, то

$$\mu_1 \mu_2 l_{BC}(x) l_{AD}(x) = \mu_2 \mu_3 l_{EF}(x) l_{BC}(x).$$

Сократив на $\mu_2 l_{BC}(x)$, получим $\mu_1 l_{AD}(x) = \mu_3 l_{EF}(x)$ (мы не будем останавливаться на обсуждении вырожденного случая, когда $\mu_2 l_{BC}(x) = 0$).

Будем называть *прямой Паскаля* шестиугольника, вписанного в конику, прямую, на которой лежат точки пересечения пар его противоположных сторон. При этом шестиугольником можно считать и замкнутую самопересекающуюся ломаную. Доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 6 (Штейнер). *Пусть точки A, B, C, D, E, F лежат на одной конике. Тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABCDEF$, $ADEBCF$ и $ADCFEB$ пересекаются в одной точке.*

Напомним, что при доказательстве этой теоремы исходными четырехугольниками были $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$. Можно исходить также из четырехугольников $ABFE$, $ABDC$ и $CDFE$. Тогда получим следующее утверждение.

Теорема 7 (Киркман). *Прямые Паскаля шестиугольников $ABFDCE$, $AEFBDC$ и $ABDFEC$ пересекаются в одной точке.*

Нетрудно убедиться, что данным шести точкам на конике соответствует 60 прямых Паскаля. При этом каждая прямая Паскаля входит ровно в одну тройку Штейнера и в три тройки Киркмана.

Коники с перпендикулярными осями

Теорема 8. *Если две коники имеют четыре общих точки, то эти точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда оси коник перпендикулярны.*

Доказательство. На направление осей коники влияют лишь квадратичные члены её уравнения, поэтому будем учитывать только их. Можно считать, что уравнение одной из коник имеет вид $ax^2+by^2+\dots=0$. Если линейная комбинация этого уравнения и уравнения $a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+\dots=0$ имеет вид $x^2+y^2+\dots=0$, то $c_1=0$, т. е. оси коник перпендикулярны. Пусть, наоборот, $c_1=0$. Положим $\lambda = -\dfrac{a-b}{a_1-b_1}$ (случай $a_1=b_1$ соответствует окружности). Тогда $a+\lambda a_1 = b+\lambda b_1$. Остается заметить, что если $a+\lambda a_1 = b+\lambda b_1 = 0$, то рассматриваемые коники имеют не более двух общих точек, так как среди линейных комбинаций их уравнений есть линейное уравнение.

Гиперболы с перпендикулярными асимптотами

Теорема 9. *Любая коника, проходящая через вершины треугольника ABC и точку пересечения его высот H, является гиперболой с перпендикулярными асимптотами.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что коника

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \dots = 0$$

является гиперболой с перпендикулярными асимптотами тогда и только тогда, когда $a+c = 0$. Поэтому линейная комбинация уравнений гипербол с перпендикулярными асимптотами тоже является уравнением гиперболы с перпендикулярными асимптотами. В пучке коник, проходящих через точки A, B, C и H, есть две (вырожденных) гиперболы с перпендикулярными асимптотами, а именно, $l_{AB} \cdot l_{CH} = 0$ и $l_{BC} \cdot l_{AH} = 0$. Следовательно, все коники этого пучка являются гиперболами с перпендикулярными асимптотами.

Центры коник одного пучка

Теорема 10. *Центры коник, проходящих через точки A, B, C и D, образуют конику* Γ.

Доказательство. Коника, проходящая через точки A, B, C и D, имеет уравнение $F = 0$, где $F = \lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + l_{BC} \cdot l_{AD}$. Центр этой коники задается системой уравнений $F_x = 0, F_y = 0$; оба эти уравнения линейны по x, y и λ. Выразив λ из одного уравнения и подставив это выражение во второе уравнение, получим уравнение второго порядка, связывающее x и y.

В заключение предлагаем читателям проверить следующие свойства коники Γ.

1. Γ проходит через 6 середин отрезков, соединяющих пары данных точек, и через 3 точки пересечения прямых, соединяющих пары данных точек.
2. Центр Γ совпадает с центром масс точек A, B, C и D.
3. Если D — точка пересечения высот треугольника ABC, то Γ — окружность девяти точек этого треугольника.
4. Если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то Γ — гипербола с перпендикулярными асимптотами. В этом случае оси всех коник пучка параллельны асимптотам Γ.