Интеграл от степени: неочевидное в очевидном

Б. Р. Френкин

Цель этой заметки

Речь пойдет о некоторых взаимосвязях между общеизвестными математическими фактами. Сами эти взаимосвязи, однако, не общеизвестны (и, следовательно, не очевидны). Автор признателен А. К. Ковальджи за плодотворное обсуждение, которое привело к улучшению некоторых доказательств, а также формы изложения в целом.

Каждый, кто изучал математический анализ, знает, что интеграл от степени с показателем -1 есть, с точностью до константы, натуральный логарифм, а при других показателях — степень с коэффициентом. Этот факт сообщается настолько рано, что не порождает никаких вопросов. А между тем ситуация достаточно парадоксальна.

Класс степенных функций выглядит однородным по своей структуре, но интеграл одной из них имеет совершенно иной вид, чем у остальных. Наверное, в основе лежит какой-то существенный факт, который должен проявиться и в других ситуациях. Хочется понять, в чем он состоит. Кроме того, было бы интересно получить интеграл степенной функции в результате единообразного рассуждения, пригодного для любого показателя степени. (В курсе анализа отдельно вычисляются производные от степени и логарифма, и как бы случайно в обоих случаях получается степенная функция.)

В заметке мы выясним эти вопросы, обратившись к тем функциональным уравнениям, которым удовлетворяют степень и логарифм. Все знают, что степень произведения равна произведению степеней, а логарифм произведения — сумме логарифмов. Отсюда удается получить искомый единообразный способ интегрирования степени. Выявляется также связь между степенью и логарифмом, с одной стороны, и гомотетией и сдвигом вещественной прямой — с другой. Загадочная «особенность» при интегрировании степеней оказывается отражением вполне понятного геометрического факта: сумма гомотетии и сдвига либо сводится к гомотетии, либо первое слагаемое в ней — тождественное (и тогда она есть сдвиг).

Интегрирование и функциональные уравнения

Итак, пусть $F(x) = x^\alpha$ — степенная функция с вещественным показателем, заданная в области $x > 0$ (чтобы не иметь дела с разрывом в нуле при отрицательном α). Пусть $G(x)$ — первообразная для $F(x)$; оказывается удобным выбрать ее так, чтобы

$$G(1) = 0. \tag{1}$$

Степенная функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(xy) = F(x)F(y). \tag{2}$$

Естественно ожидать, что и ее первообразная удовлетворяет какому-нибудь простому уравнению — возможно, также содержащему xy. Поэтому попробуем выразить $G(xy)$ через $G(x)$ и $G(y)$. С учетом (1) и (2) имеем:

$$\begin{gathered} G(xy) = \int_1^{xy} F(t)dt = \int_1^y F(t)dt + \int_y^{xy} F(t)dt = \\ = G(y) + \int_1^x F(ty)d(ty) = G(y) + F(y)y\int_1^x F(t)dt = \\ = G(y) + y^{\alpha+1}G(x). \end{gathered}$$

Для краткости положим $\beta = \alpha + 1$. Мы получили, как и стремились, функциональное уравнение для G:

$$G(xy) = y^\beta G(x) + G(y). \tag{3}$$

Поскольку $xy = yx$, то $y^\beta G(x) + G(y) = x^\beta G(y) + G(x)$, а

$$G(x)(y^\beta - 1) = G(y)(x^\beta - 1). \tag{4}$$

Если выражения в скобках не равны нулю, то

$$\frac{G(x)}{x^\beta - 1} = \frac{G(y)}{(y^\beta - 1)},$$

т. е. каждая из частей этого равенства не зависит от входящей в нее переменной. Тогда искомая первообразная имеет вид

$$G(x) = c(x^\beta - 1) \tag{5}$$

с некоторой константой c.

Пусть теперь одна из скобок в (4) равна нулю — например, $x^\beta - 1 = 0$. Тогда либо $x = 1$, но в этом случае (5) продолжает выполняться ввиду (1); либо $\beta = 0$, и (3) принимает вид

$$G(xy) = G(x) + G(y). \tag{6}$$

При этом $G(x)$, как первообразная для $1/x$, непрерывна и не является тождественным нулем. Хорошо известно, что среди таких функций уравнение (6) выделяет логарифмы.

Основание логарифма не определяется из предыдущих рассуждений, так как уравнение (3) выдерживает умножение функции G на константу. Поэтому нужно продифференцировать полученную функцию и посмотреть, при каком основании логарифма получается функция F. Сказанное относится и к константе c в уравнении (5).

Итак, достигнута одна из поставленных целей: мы нашли единообразное рассуждение, позволяющее проинтегрировать степенную функцию с произвольным показателем. При этом использовались известные функциональные уравнения для степени и логарифма. Однако по-прежнему неясно, какая идея проявляется в расщеплении на два случая: $\alpha = -1$ и все остальное.

Функциональные уравнения и аффинные преобразования

Вернемся к уравнению (3). Фиксируем значение y. Тогда это уравнение показывает, что происходит с функцией $G(x)$ при замене x на xy: ее множество значений подвергается аффинному преобразованию (с коэффициентами, зависящими от y). Рассмотрим это преобразование подробнее.

При $\beta = 0$ получается сдвиг, и $G(x)$ есть логарифм. В остальных случаях мы получаем сумму гомотетии и сдвига вещественной прямой. Но такое преобразование геометрически сводится к гомотетии. Действительно, если P — аффинное преобразование прямой,

$$Px = ax + b, \tag{7а}$$

то существует такое c, что

$$Px - c = a(x - c), \tag{7б}$$

а именно:

$$c = b/(1 - a). \tag{7в}$$

Ввиду (7б) P является гомотетией с центром c.

Итак, если $\beta \neq 0$, то при каждом значении y уравнение (3) задает некоторую гомотетию множества значений $G(x)$. Неподвижная точка этой гомотетии формально зависит от y. Покажем, что на самом деле такой зависимости нет.

Преобразования вида (3) соответствуют умножению переменной x на различные значения y и потому коммутируют между собой. Но если преобразования P, Q некоторого множества коммутируют и имеют по одной неподвижной точке, то эти точки совпадают. Действительно, пусть c — (единственная) неподвижная точка для P. Тогда $P(Qc) = Q(Pc) = Qc$, т. е. Qc — неподвижная точка для P и потому совпадает с c. Значит, c — неподвижная точка для Q, что и требовалось.

Итак, преобразования (3) имеют одну и ту же неподвижную точку c при всех $y > 0$. Это значит (см. (7а)–(7б)), что

$$G(xy) - c = y^{\beta}(G(x) - c),$$

т. е. для функции $G(x) - c$ умножение аргумента на y соответствует гомотетии на множестве значений. Но тогда функция оказывается степенной (с коэффициентом), подобно тому, как в случае сдвига она являлась логарифмом. (Здесь можно рассуждать по аналогии с первой частью заметки: поменяем местами x и y, разделим переменные и в итоге выясним вид $G(x) - c$. Но можно также заметить, что ввиду (3), (7а) и (7в) $c = G(x)/(1 - x^{\beta})$, откуда $G(x) = c(1 - x^{\beta})$.)

Мы получили, естественно, тот же результат, что и раньше. Проиграв в формальной простоте, мы зато выявили суть рассматриваемого явления. Оказывается, различные значения показателя степени можно сопоставить аффинным преобразованиям прямой с различными коэффициентами при переменной. При $\alpha = -1$ это сдвиг, в остальных случаях — гомотетия. Сдвиг естественным образом соответствует логарифму, а гомотетия — степенной функции. «Катастрофа» при интегрировании степенной функции в действительности присутствует в множестве аффинных преобразований прямой: сумма гомотетии и сдвига геометрически не отличается от своего крайнего случая — чистой гомотетии, если только она не была задана как другой крайний случай — чистый сдвиг.

Дополнение 1: Об одном возможном обобщении

Соотношение между $G(x)$ и $G(xy)$, заданное уравнением (3), имеет специфический вид: в нем присутствуют $G(y)$ и степенная функция. Естественное обобщение состояло бы в следующем. Попробуем найти все непрерывные функции $G(x)$, тождественно удовлетворяющие (в области $x > 0$) уравнению

$$G(xy) = A(y)G(x) + B(y) \tag{8}$$

с непрерывными функциями $A(y), B(y)$.

Легко видеть, что если для $G(x)$ выполняется (8), то и для $G(x)+const$ выполнено аналогичное уравнение (и с той же функцией $A(y)$). Поэтому можно считать, что

$$G(1) = 0. \tag{9}$$

Положив тогда $x = 1$, получим

$$G(y) = B(y). \tag{10}$$

Далее мы могли бы, как и выше, использовать коммутативность умножения, но более изящное рассуждение основано на его ассоциативности.

Из (8) и (10) следует,что

$$G(xyz) = A(xy)G(z) + G(xy) = A(xy)G(z) + A(x)G(y) + G(x);$$

$$G(xyz) = A(x)G(yz) + G(x) = A(x)A(y)G(z) + A(x)G(y) + G(x).$$

Сравнив эти равенства, видим, что либо $G(z)$ — тождественный нуль, либо выполняется тождество $A(xy) = A(x)A(y)$. В первом случае $A(x)$ может быть любой непрерывной функцией. Во втором случае, как известно, $A(x)$ — либо степень, либо тождественный нуль. Но если $A(x)$ — тождественный нуль,то положим в (8) $y = 1$. Тогда из (10) и (9) следует, что и $G(x)$ — тождественный нуль.

Таким образом, общее уравнение (8) по существу сводится к уравнению (3): $G(x)$ после сдвига на константу либо становится тождественным нулем, либо совпадает с $B(x)$, причем в последнем случае $A(x)$ является степенью.

Дополнение 2: Экспонента и линейная функция — пример на ту же тему

Явление, рассмотренное в заметке, можно наблюдать и в других случаях. Например, при интегрировании экспоненты $e^{\alpha x}$ получается (с точностью до коэффициента и аддитивной константы) экспонента, за исключением единственного случая $\alpha = 0$, когда первообразной является линейная функция. Здесь можно провести рассуждения, аналогичные изложенным выше. Нужно использовать соотношения

$$e^{\alpha(x+y)} = e^{\alpha x} e^{\alpha y},$$

$$\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y).$$

Рассмотрев первообразную H в точке $x + y$, получаем для нее функциональное уравнение

$$H(x+y) = e^{\alpha y} H(x) + H(y)$$

и далее действуем как при анализе уравнения (3). В данном случае экспонента соответствует гомотетии, а линейная функция — сдвигу.