О некоторых топологических доказательствах основной теоремы алгебры

П. Е. Пушкарь*

Введение

Основная теорема алгебры утверждает, что в поле комплексных чисел любое алгебраическое уравнение имеет корень. Эквивалентная вещественная формулировка: любой вещественный полином раскладывается в произведение линейных и квадратичных сомножителей — может быть доказана без использования понятия комплексного числа (см., например, доказательство А. В. Пухликова [1]). В настоящей заметке мы обсуждаем топологические факты, лежащие в основе доказательства А. В. Пухликова и некоторых других доказательств основной теоремы алгебры, и предлагаем другое доказательство основной теоремы алгебры, также не использующее понятие комплексного числа (основанное на понятии степени отображения).

Приведенное в статье доказательство основной теоремы алгебры появилось в результате обдумывания доказательства А. В. Пухликова, которое было разбито на задачи, предложенные студентам второго курса МК НМУ на семинарах по математическому анализу.

Автор благодарен А. Г. Хованскому за помощь и внимание к этой заметке.

1. О топологических фактах лежащих в основе «вещественного» доказательства основной теоремы алгебры.

Сформулируем необходимые определения.

Напомним, что непрерывное отображение называется собственным, если прообраз любого компакта — компакт.

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект 96–01–01104) и грантом INTAS–94–4373.

Пусть M^{n+k}, M^n — гладкие многообразия размерности $n+k$ и n соответственно $(k \geqslant 0)$, $f: M^{n+k} \to M^n$ — гладкое отображение.

Точку образа отображения f назовем сильно регулярным значением, если среди ее прообразов найдется точка, дифференциал отображения f в которой имеет максимальный ранг (равный n).

Точку образа отображения f будем называть сильно особым значением, если во всех ее прообразах ранг дифференциала не максимальный (меньше n).

Таким образом, мы разбили образ отображения f на два множества — множество сильно регулярных значений отображения f и множество сильно особых значений отображения f.

Упражнение. *Каким может быть множество сильно особых значений отображения* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$*?*

Сформулируем основной топологический факт, лежащий в основе приведенных ниже доказательств основной теоремы алгебры.

Теорема 1. *Пусть* $f: M^{n+k} \to M^n$ *такое гладкое собственное отображение, что:*
а) дополнение до множества сильно особых значений отображения f *связно,*
б) множество сильно регулярных значений отображения f *непусто.*

Тогда образ отображения f *совпадает с многообразием* M^n.

Доказательство. Докажем, что множество сильно регулярных значений открыто и замкнуто в дополнении к множеству сильно особых значений.

1. Множество сильно регулярных значений открыто в M^n.

Это очевидное следствие из теоремы о неявной функции. Следовательно, это множество открыто и в подмножестве M^n — дополнении до множества сильно особых значений отображения f.

2. Множество сильно регулярных значений замкнуто в дополнении к множеству сильно особых значений.

Рассмотрим последовательность сильно регулярных значений (x_i) сходящуюся к точке a, не лежащей в множестве сильно особых значений отображения f. Объединение членов последовательности (x_i) и точки a — компакт в M^n. Так как отображение f собственно, его прообраз — компакт в M^{n+k}. Выберем по прообразу y_i точки x_i. У последовательности (y_i) есть сходящаяся подпоследовательность (здесь, собственно, и используется собственность отображения f), сходящаяся к точке z. Отображение f непрерывно, следовательно $f(z) = a$.

Таким образом, a лежит в образе f и не принадлежит множеству сильно особых значений отображения f. Следовательно a сильно регулярное значение отображения f. Утверждение о замкнутости доказано.

В силу условий теоремы 1 и доказанных утверждений множество сильно регулярных значений открыто, замкнуто и не пусто в дополнении до множества сильно особых значений отображения f.

Поскольку дополнение связно, то оно совпадает с множеством сильно регулярных значений отображения f. Теорема доказана.

Докажем при помощи теоремы 1 основную теорему алгебры.

1. *«Комплексное» доказательство основной теоремы алгебры.*

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$.

Отображение f — собственно. Это следует из хорошо известной оценки абсолютной величины корней уравнения через коэффициенты уравнения (см. [2]). Множество сильно особых значений отображения f конечно, так как сильно особых значений не больше чем корней производной. Множество сильно регулярных значений, очевидно, не пусто.

Следовательно, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ и теорема доказана.

2. Обсудим вещественное доказательство основной теоремы алгебры — доказательство А. В. Пухликова.

Сформулируем следующее утверждение:

Утверждение 1. *Любой вещественный полином степени $n \geqslant 3$ представим в виде произведения двух полиномов меньшей степени.*

План доказательства: Отождествим полиномы степени i со старшим коэффициентом равным единице с $\mathbb{R}^i$ (отождествляем полином с его коэффициентами).

Рассмотрим отображение умножения $\mu_i : \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}^n$, $(f, g) \to f \cdot g$.

Определим отображение $\mu : \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}^n$ как отображение, совпадающее на каждой компоненте с соответствующим отображением умножения μ_i.

Нам необходимо показать, что это отображение «на». Мы хотим воспользоваться теоремой 1.

Во-первых, для этого необходимо описать множество сильно особых значений отображения μ.

Замечательный факт состоит в том, что дифференциал отображения μ_i в точке (f, g) невырожден, если и только если наибольший общий делитель полиномов f и g равен 1 (см. [1]). Это позволяет описать множество сильно особых значений отображения μ.

При нечетном n множество сильно особых значений отображения μ совпадает с полиномами вида $(x+a)^n$, а при четном n содержится в множестве полиномов вида $(x^2+ax+b)^{n/2}$. Дополнение до этих множеств связно (поучительное упражнение).

Во-вторых, нужно проверить, что отображение μ — собственное (см. [1] и доказательство собственности подобного отображения в доказательстве теоремы 2 ниже).

Таким образом, мы можем применить теорему 1, что доказывает утверждение 1.

Неформальное замечание. Возможность применения теоремы 1 в вещественной ситуации, в части касающейся связности дополнения до множества сильно особых значений отображения, вызывает некоторое удивление.

Так, множество особых значений для отображения общего положения одного многообразия в другое — гиперповерхность (с особенностями) (см. [4]) и, следовательно, может делить образ. Все дело в том, что множество сильно особых значений может быть существенно меньше (в смысле размерности), чем множество особых значений, а «на сколько меньше по размерности» — зависит от числа «листов» отображения. В комплексной же ситуации гиперповерхность не делит пространство и возможность применения теоремы 1 не вызывает вопросов.

2. О некоторых доказательствах основной теоремы алгебры, основанных на понятии степени отображения.

В этом параграфе мы обсудим комплексное и вещественное доказательства основной теоремы алгебры, основанные на следующем топологическом факте:

Утверждение 2. *Пусть M^n, N^n — гладкие связные ориентированные многообразия, $f : M^n \to N^n$ гладкое собственное отображение, степень которого не равна нулю.*

Тогда f — отображение «на» ($f(M^n) = N^n$).

Напомним, что для гладких собственных отображений ориентированных многообразий степень определяется обычным образом: нужно взять регулярную точку в образе и подсчитать число ее прообразов с учетом знака определителя дифференциала отображения (см. подробности в [3]). То, что степень определена корректно — довольно сложно доказываемая (в отличие от теоремы 1) теорема. Утверждение 2 — очевидно (по модулю корректности определения степени) и общеизвестно.

Выведем из утверждения 2 основную теорему алгебры.

Доказательство([3]): Рассмотрим отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, где $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Отображение f — собственно. Степень отображения f равна n, так как f собственно гомотопно отображению $z \to z^n$, степень которого легко вычисляется. Таким образом, мы находимся в рамках утверждения 2. Основная теорема алгебры доказана.

Докажем теперь основную теорему алгебры в следующей эквивалентной «вещественной» формулировке

Теорема 2. *Любой вещественный полином степени $2n$ раскладывается в произведение n полиномов второй степени.*

Доказательство. Отождествим полином $x^2 + ax + b$ с точкой (a, b) плоскости $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим отображение умножения

$$u : (\mathbb{R}^2)^n \to \mathbb{R}^{2n} \qquad (f_1, f_2, \ldots, f_n) \mapsto f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n.$$

Мы хотим доказать, что u — отображение «на».

1. Отображение u собственно.

Отождествим пространство отличных от нуля полиномов второй степени по модулю умножения на отличные от нуля числа с проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$. Рассмотрим отображение умножения

$$\hat{u} : (\mathbb{R}P^2)^n \to \mathbb{R}P^{2n}, \quad ([f_1], \ldots, [f_n]) \mapsto [f_1 \cdot \cdots \cdot f_n].$$

Отображение $\hat{u}$ собственно, так как оно определено на компактном многообразии и непрерывно.

Отображение $\hat{u}$ естественно «компактифицирует» отображение u. $(\mathbb{R}P^2)^n$ можно представить в виде объединения $\mathbb{R}^{2n}$ и «бесконечно удаленной части» B_1, а $\mathbb{R}P^{2n}$ можно представить в виде объединения $\mathbb{R}^{2n}$ и «бесконечно удаленной части» B_2. При этом на $(\mathbb{R}^2)^n$ $\hat{u}$ совпадает с u и, очевидно, $\hat{u}(B_1) \subset B_2$.

Следовательно, умножение u собственно, так как прообраз компакта при отображении u совпадает с прообразом компакта при отображении $\hat{u}$.

2. Степень отображения u по модулю равна $n!$.

Ориентируем пространство полиномов второй степени со старшим коэффициентом 1 (мы обозначаем это пространство через $\mathbb{R}^2$) как-нибудь, а $(\mathbb{R}^2)^n$ ориентируем как произведение ориентированных многообразий.

Лемма. *Полином* $p = \prod_{i=1}^{n}(x^2+i)$ — *регулярное значение отображения* u.

Упражнение. Докажите лемму.

Указание: Воспользуйтесь описанием регулярных точек отображения μ_i из плана доказательства утверждения 1.

У полинома p есть $n!$ прообразов — все упорядоченные наборы полиномов $(x^2+i), i = 1, \ldots, n$. Докажем, что они вносят в степень один знак.

Отображение умножения u инвариантно относительно перестановок сомножителей. Отображение перестановки сомножителей сохраняет ориентацию (упражнение), следовательно знак определителя дифференциала во всех прообразах совпадает.

Применяя утверждение 2 к отображению u, заканчиваем доказательство теоремы.

Список литературы

[1] *Пухликов А. В.* «Вещественное» доказательство основной теоремы алгебры. — Статья в этом номере.

[2] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука. 1975.

[3] *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука. 1979.

[4] *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982.