

ЖАК АДАМАР

**ИССЛЕДОВАНИЕ
ПСИХОЛОГИИ
ПРОЦЕССА
ИЗОБРЕТЕНИЯ
В ОБЛАСТИ
МАТЕМАТИКИ**

перевод с французского
М. А. ШАТАЛОВА и О. П. ШАТАЛОВОЙ

под редакцией
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

МЦНМО, 2001

УДК 331.015.1
А 28

JACQUES HADAMARD
Membre de l'Institut

ESSAI
sur la
PSYCHOLOGIE DE L'INVENTION
dans le
DOMAINE MATHÉMATIQUE

Traduit de l'anglais
par Jacqueline Hadamard

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE
ALBERT BLANCHARD

Ж. Адамар

А 28 Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — Пер. с франц. — М: МЦНМО, 2001. — 128 с.

ISBN 5-900916-85-5

В настоящее время в результате развития психологии и смежных отраслей биологии возрос интерес к анализу творческого мышления человека. В книге известного французского математика детально рассмотрен процесс обработки информации, как в области сознательного, так и бессознательного. Значительное внимание уделено различным способам мышления, приводящим к изобретению (открытию). Книга будет интересна широкому кругу читателей.

УДК 331.015.1

ISBN 5-900916-85-5

© МЦНМО, 2001

Предисловие автора к французскому изданию

«Я скажу, что при таких-то обстоятельствах нашел доказательство такой-то теоремы; эта теорема получит какое-то варварское название, которое многие из вас не поймут, но это не важно: для психолога важна не теорема, а обстоятельства».

А. ПУАНКАРЕ

Этот труд, как и все, что можно было бы написать об изобретении в математике, вдохновлялся прежде всего знаменитым докладом Анри Пуанкаре в Психологическом обществе в Париже. Впервые я обратился к этой теме во время одного из заседаний в «Центре синтеза¹» в Париже в 1937 г. Но более основательно я рассмотрел эту тему в курсе лекций, прочитанном в 1943 г. в «Свободной школе высших исследований» в Нью-Йорке.

Принстонский университет получил рукопись в тот момент, когда я покидал США, чтобы возвратиться в Европу (21 августа 1944 г.). Этим объясняется тот факт, что этот труд, в пересмотренном и немного дополненном виде, теперь впервые переведен на французский язык.

Ж. Адамар. Париж, 8.12.1959 г.

¹Центр синтеза (Centre de Synthèse) — французское философское общество, находится в Париже. — *Прим. ред.*

Введение

Название этой книги вызывает два замечания. Мы говорим об изобретении; было бы точнее говорить об открытии. Разница между этими двумя понятиями хорошо известна. Открытие касается явления, закона, живого существа, которое уже существовало, но которое раньше не было известно: Колумб открыл Америку, но она существовала до него. Бенджамен Франклин изобрел громоотвод: ранее громоотвод не существовал.

Однако это различие менее очевидно, чем кажется с первого взгляда. Торричелли заметил, что когда в чашку со ртутью помещают запаянную сверху трубку, то ртуть поднимается до определенного уровня: это открытие, но сделав его, Торричелли изобрел барометр. И существует большое количество научных результатов, которые являются столь же открытиями, сколь и изобретениями. Изобретение громоотвода Франклином непосредственно связано с его открытием электрической природы молнии. Это один из доводов, показывающий, что различия, указанные выше, по сути нас не касаются, поскольку психологические условия в обоих случаях абсолютно одинаковы.

С другой стороны, мы взяли в качестве заглавия «Психология изобретения в области математики», а не «Психология математического изобретения». Действительно, стоит напомнить, что математическое изобретение является частным случаем изобретения вообще, что этот процесс может происходить в различных областях, идет ли речь о литературе, искусстве или даже о технике.

Современные философы идут еще дальше. Они считают, что мышление представляет собой постоянный изобретательский процесс, что жизнь — постоянное изобретательство. Как говорит Рибо (Ribot)¹, «изобретение и в искусстве, и в науке является лишь частным случаем. В практической жизни, в изобретениях механических, военных, промышленных и коммерческих, в религиозных, общественных и политических институтах человеческий ум проявил столько же воображения, сколько в любой другой области». А. Бергсон (Bergson)², человек с еще

¹См. Анри Делакруа «Изобретение и гений» (Henri Delacroix “L’Invention et le Génie”); G. Dumas “Nouveau Traité de Psychologie”, t. VI, p. 449.

²См. там же, стр. 447.

более возвышенной и глубокой интуицией, заявляет: «изобретательское усилие, которое проявляется во всех областях жизни в создании нового, нашло только в человечестве средство быть продолженным индивидами, которым вместе с умом дана способность инициативы, независимости, свободы».

С этим смелым заявлением перекликается заявление Мечникова, — он в конце своей книги о фагоцитозе говорит о том, что у человека борьба против микробов является делом не только фагоцитов, но также и мозга, потому что он (мозг) создал бактериологию.

Нет оснований заявлять, что различные виды изобретений совершаются всегда одинаковым образом. Как заметил психолог Поль Сурю (Paul Souriau), между художественным и научным творчеством существует та разница, что искусство обладает большей свободой, так как художник руководствуется лишь собственной фантазией. В этом смысле произведения искусства являются подлинными изобретениями. Симфонии Бетховена и даже трагедии Расина — изобретения. Ученый же ведет себя совершенно иным образом, и его работа по сути дела приводит к открытию. Как говорил мне мой учитель Эрмит: «В математике мы больше слуги, чем господа». Хотя истина нам еще не известна, она предсуществует и неукоснительно предписывает нам дорогу, по которой мы должны следовать под страхом заблудиться.

Как мы увидим в дальнейшем, это не исключает существования многочисленных аналогий между двумя названными видами творческой деятельности. Эти аналогии были вскрыты в серии докладов, сделанных в 1937 г. в «Центре синтеза» в Париже при участии крупного женеvского психолога Клапареда (Claparède). Целая неделя была посвящена различным видам изобретений, причем одно заседание было целиком посвящено математике. В частности, об изобретениях в области экспериментальных наук говорили Луи де Бройль и Эдмонд Боэр (Edmond Bauer), об изобретениях в поэзии — Поль Валери. Сравнение обстоятельств, при которых осуществляются изобретения в различных областях, может оказаться очень плодотворным.

Тем более полезным может оказаться рассмотрение такой специальной области, как математика, и именно о ней я буду говорить, так как с нею я лучше всего знаком. Результаты такого рассмотрения (а мы увидим, благодаря поучительному докладу Анри Пуанкаре, что в этой области получены важные результаты) могут оказаться полезными для понимания того, что происходит в других областях.

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И АНКЕТЫ

Тема, которую мы здесь обсуждаем, отнюдь не является неисследованной, и, хотя имеется, естественно, еще много неясных вопросов, информация, которой мы располагаем, является достаточно обильной, более обильной и цельной, чем можно было бы ожидать, учитывая трудность проблемы.

Эта трудность характеризуется не только сложностью проблемы, но и тем явлением, которое все чаще и чаще тормозит прогресс наших знаний: я хочу сказать, что тема затрагивает две дисциплины — психологию и математику. И чтобы их квалифицированно обсуждать, нужно быть одновременно психологом и математиком. Из-за отсутствия этой двойной квалификации тема обсуждалась математиками с одной стороны и психологами с другой, и даже, как мы увидим, невропатологом.

Как всегда в психологии, мы располагаем методами анализа двух видов: «объективными» и «субъективными»¹. Субъективные, или интроспективные, методы таковы, что они проводятся как бы «наблюдением изнутри». При этом информация о способе мышления непосредственно получается самим мыслителем, который, изучая самого себя, сообщает о процессах, происходящих у него в уме. Очевидным недостатком этого метода является то, что наблюдатель может исказить явление, которое он изучает. В самом деле, совершая две одновременные операции — мышления и наблюдения за своей собственной мыслью, — можно апри-

¹Я говорю об объективных и интроспективных методах. Психолог школы современного «бихевиоризма» различает объективную психологию и интроспективную психологию (последняя после смерти Уильяма Джеймса и Титченера объявлена отошедшей в прошлое), как будто речь идет о двух разных науках, имеющих различные цели. Мне же кажется, что эти два различных метода наблюдения могут применяться и даже дополнять друг друга при изучении одних и тех же психологических процессов. Но, насколько я понимаю, бихевиористы сознательно оставляют в стороне объект интроспективных наблюдений, т. е. мышление и сознание.

Еще раньше известный биолог Ле Дантек отрицал сознание, считая его эпифеноменом. Я всегда считал это антинаучным актом, так как если бы сознание было эпифеноменом, то оно было бы единственным эпифеноменом, существующим в мире, где все реагирует на все. Но, называется ли оно эпифеноменом или нет, сознание

ори предположить, что они мешают друг другу. Но мы увидим, что при исследовании процесса изобретения (по крайней мере некоторых его стадий), этого надо бояться меньше, чем при исследовании других умственных явлений. В этой книге я использую результаты самонаблюдения, единственные, для обсуждения которых я чувствую себя достаточно квалифицированным. В нашем случае эти результаты являются достаточно ясными, чтобы заслужить, как мне кажется, некоторую степень доверия. Поэтому я заранее прошу извинения: автор будет вынужден слишком часто говорить о себе.

Объективные методы, или методы наблюдения извне, есть методы, где экспериментатор отличен от мыслящего. Наблюдение и мысль не пересекаются; но, с другой стороны, мы получаем таким образом только косвенные данные, и значение их нелегко расшифровывать. Основная причина того, что объективные методы трудно будет использовать в нашем исследовании, состоит в необходимости сравнивать большое число случаев. В соответствии с общим принципом экспериментальной науки такое сравнение должно было бы быть основным условием для достижения того, что Пуанкаре назвал «результатом с большим к. п. д.», т. е. для достижения результата, который глубоко проникает в природу вопроса. Но именно этого мы не можем иметь при исследовании такого исключительного явления, как изобретение.

Математическая «шишка»

Обычно объективные методы исследования применялись к изобретениям различных видов, но никакого специального изучения изобретений в области математики не проводилось. Существует одно исключение, которого мы кратко коснемся. Это любопытная попытка, сделанная впервые знаменитым Галлем (Gall) и связанная с его принципом «френологии». Френология связывает наличие умственной способности

существует и за ним можно наблюдать. И в этой работе будут представлены результаты таких наблюдений, сделанных автором и другими исследователями.

Следует отметить, что большинство случаев, рассмотренных бихевиористами [я о них узнал из книги Уотсона «Бихевиоризм» (I. B. Watson, Behaviorism)] сильно отличаются от рассматриваемых нами, так как чаще всего они имеют отношение к мыслям, непосредственно связанным с телесными ощущениями, т. е. это случаи, которые наиболее легко интерпретировать в терминах их доктрины. В подобных случаях более или менее известно соответствие между телесными явлениями и состояниями сознания. Менее явным является это соответствие в случае абстрактного мышления, т. е. в том случае, который мы будем рассматривать. Однако это не значит, что оно не может быть обнаружено в какой-то момент, например, с помощью электроэнцефалограмм мозга, — метода, который в настоящее время интенсивно развивается.

не только с максимальным развитием некоторой части мозга, но и соответствующей части черепной коробки. По мнению специалистов, эта идея является весьма неудачной, хотя и принадлежит человеку, имевшему другие, более плодотворные идеи (например, Галль был предвестником понятия мозговой локализации). На основании френологического принципа математические способности должны характеризоваться специальной «шишкой» на голове, для которой Галль указывал даже местонахождение.

Идеи Галля были использованы в 1900 г.¹ невропатологом Мёбиусом (Möbius), который был внуком математика, хотя сам не имел специальной математической подготовки.

Книга Мёбиуса является довольно большим и глубоким исследованием математических способностей с точки зрения натуралиста. Она содержит ряд данных, которые представляют интерес для нашего исследования. Это касается, в частности, вопросов наследственности (математические семьи)² долголетия, различных способностей. Несмотря на то, что такая большая подборка материалов могла оказаться впоследствии полезной, она до сих пор не позволила сформулировать никакого общего правила, кроме того, что касается художественных способностей математиков. (Мёбиус подтверждает достаточно распространенное мнение, что большинство математиков любит музыку, и он отмечает, что они интересуются также другими видами искусства).

Итак, Мёбиус согласен с основными выводами Галля, но он считает, что хотя математический признак и существует, он может принимать более разнообразные формы, чем это следует из работы Галля.

Однако идея «шишек» Галля — Мёбиуса не получила общего признания. Анатомы и неврологи энергично возражают против учения Галля, и его френологический принцип, т. е. соответствие формы черепа форме мозга ныне считается неверным.

¹ P. J. Möbius “Die Anlage zur Mathematik”, Leipzig, 1900.

² Несколькоми годами раньше (1896 г.) появилась важная работа Франсиса Гальтона о наследственности дарований (Francis Galton “Hereditary Genius”); одна глава в ней посвящена ученым.

Интересные данные по вопросам, которым посвящена книга Мёбиуса, можно найти также в книге Леонарда Гютри «Изучение раннего развития детей» (Leonard George Gutrie “Contributions to the Study of Precocity in Children”), где рассказывается о ранних склонностях знаменитых людей.

Говоря только о математиках, отметим, что первым увлечением Галилея была живопись; в 17 лет он начал изучать медицину и лишь позднее занялся математикой. Вильям Гершель сначала получил музыкальное образование. Известно, что Гаусс колебался в выборе между математикой и филологией.

Подобные случаи встречаются и среди наших современников: Поль Пэнлеве рассказывал мне, что долгое время он колебался между математикой и политикой. Сначала он предпочел первую, чтобы затем, как известно, совместить то и другое.

Не будем больше задерживаться на этом аспекте вопроса, который нужно оставить специалистам; но бесполезно обсудить его с математической точки зрения, так как (по крайней мере, на первый взгляд) и с этой точки зрения тоже можно привести немало возражений против самого принципа такого рода исследования. Более чем сомнительно, что существует единственная ярко выраженная «математическая способность». Математическое творчество и математический ум не могут быть безотносительны к творчеству вообще и уму вообще. Редко бывает, чтобы первый математик в лице был последним в других науках. И рассматривая вещи на более высоком уровне, отметим, что большая часть великих математиков творила и в других областях науки. Один из самых великих, Гаусс, поставил важные классические опыты по магнетизму, фундаментальные открытия Ньютона в оптике также хорошо известны. И кто может сказать, математическими или философскими способностями обусловлена форма черепа Декарта или Лейбница?

Имеется также и другое возражение: мы увидим, что не существует единственной категории математических умов, что эти умы бывают различных типов, причем различия оказываются настолько существенными, что сомнительно, чтобы они соответствовали единственному и одному и тому же свойству мозга.

Все сказанное не противоречило бы принципу Галля, интерпретируемому в общем смысле, а именно, в смысле взаимосвязи математической работы ума с физиологией и анатомией мозга. Но конкретное приложение этого принципа, предложенное Галлем и Мёбиусом, не представляется оправданным.

В общем случае мы должны признать, что даже те виды мозговой деятельности, которые кажутся на первый взгляд простыми, на самом деле оказываются, причем самым неожиданным образом, вовсе не простыми. Объективными методами (изучение ранений в голову и т. п.) удалось установить, что именно так обстоит дело с наиболее изученным видом мозговой деятельности, а именно с речью, которая определяется многими факторами. Существуют известные мозговые локализации, как это утверждал Галль, но они не столь просты и точны, как он предполагал.

Имеются все основания думать, что математическая деятельность мозга должна быть по меньшей мере столь же сложной, как это установлено для речи. Хотя мы, естественно, не располагаем (и, может быть, никогда не будем располагать) в этом случае решающими данными, какими мы располагаем в отношении речи, наблюдения над процессом речи, возможно, помогут нам понять математическую деятельность мозга.

Взгляды психологов на рассматриваемый вопрос

Многочисленные психологи размышляли хотя и не по вопросу об изобретении в математике, но об изобретениях вообще. Среди них я отмечу лишь два имени: Поль Сурио и Ф. Полан. Мнения этих двух психологов расходятся. Сурио был, видимо, первым, кто утверждал, что изобретения совершаются чисто случайно, в то время как Полан¹ остался верным более классической теории логики и систематического рассуждения. Между ними существует также различие в методах, которое нельзя объяснить лишь небольшой разницей дат: в то время как у Полана собран богатый материал об ученых и других изобретателях, этого почти нет в работе Сурио. Любопытно отметить, что такая методика работы не мешает Сурио видеть, вообще говоря, верно и делать справедливые и глубокие замечания.

Позднее одно из наиболее важных исследований на эту тему было проделано в 1937 г. в Центре синтеза в Париже, как я уже отмечал во введении.

Математические анкеты

Перейдем к математикам. Один из них, Майе (Maillet), впервые организовал анкету о методах работы математиков. В частности, уже он поставил знаменитый вопрос о «математическом сне», так как не раз высказывалось мнение, что проблемы, которые не поддаются усилиям, могут быть решены во сне.

Хотя анкета Майе полностью не отрицает существования «математического сна», она показывает, что практически не существует прямых примеров таких снов, по крайней мере, если к их категории относить лишь случаи, когда точно помнят рассуждения, проведенные во сне, и отвлечься от случаев, когда результат получается в момент пробуждения, что мы рассмотрим отдельно. Единственное замечательное наблюдение было сообщено известным американским математиком Леонардом Диксоном, который может подтвердить его правильность: его мать и ее сестра в лицее были соперницами по геометрии и однажды провели долгий вечер в безуспешных поисках решения одной задачи. Ночью матери Диксона приснилось решение, и она начала его излагать вслух громко и внятно; ее сестра, услышав это, поднялась и записала решение. Наутро в классе грезившая оказалась обладательницей правильного решения, не подозревая об этом.

¹Souriau "Théorie de l'Invention", Paris, 1881. Paulhan "Psychologie de l'Invention", Paris, 1904.

Это наблюдение, ценное благодаря — личности, его сообщившей, и достоверности, с которой оно сообщено, является одним из самых необыкновенных. Большинство из остальных 69 математиков, ответивших на этот вопрос анкеты, написали, что никогда не видели математических снов (я их тоже никогда не видел) или видели совершенно абсурдные вещи, или не могли точно рассказать о содержании сна. Пятерым из них снились совершенно детские рассуждения. Имеется один более положительный ответ, но его трудно принимать во внимание, так как автор остался анонимным.

Явление достоверное, и за абсолютную достоверность которого я отвечаю, это внезапное появление решения в момент резкого пробуждения. Однажды, когда меня внезапно разбудил посторонний шум, мгновенно и без малейшего усилия с моей стороны мне в голову пришло долго разыскиваемое решение проблемы¹ — и путем, совершенно отличным от всех тех, которыми я пытался ее решить ранее. Этот случай был весьма необычным и произвел на меня незабываемое впечатление. Очевидно, что это явление, в достоверности которого я совершенно уверен на основании собственного опыта, должно быть рассмотрено отдельно, и мы к нему еще вернемся.

Я не задерживаюсь более на анкете Майе, так как несколькими годами позже среди большой группы математиков при поддержке Клапареда и известного женеvского психолога Фурнуа была организована другая, более существенная анкета. Эта анкета была опубликована в периодическом журнале «Математическое образование». Был распространен вопросник, содержащий более 30 вопросов (он дан в Приложении I). Эти вопросы (среди которых был и вопрос о «математическом сне») соответствовали двум, уже отмеченным нами, методам исследования, а именно: некоторые были «объективные» (насколько это возможно в вопроснике), другие — «субъективные». Например, у математиков спрашивали, оказывают ли на них влияние, и в какой мере, шум или метеорологические условия, считают ли они полезной или вредной литературную и художественную деятельность и т. д.

Другие вопросы были более «субъективного» характера и более непосредственно и глубоко затрагивали существо проблемы. У авторов спрашивали, интересуются ли они работами своих предшественников или предпочитают изучать проблему самостоятельно, имеют ли они привычку оставлять на некоторое время проблему, чтобы вернуться к ней позже (то, что лично я делал часто и что я всегда рекомендую

¹Для специалистов могу сообщить, что речь идет о начале $n^\circ 27$ [стр. 199–200], опубликованного в *Journal de mathématiques pures et appliquées*, série I, tome IX (1898), (вычисление определителя).

начинающим исследователям, консультирующимся у меня). Особое внимание уделялось процессу возникновения их основных открытий.

Критические замечания

Читая вопросник, можно отметить нехватку в нем некоторых вопросов, хотя они и аналогичны другим, поставленным. Например, спрашивая математиков, занимались ли они музыкой или поэзией, авторы вопросника не проявили интереса к тому, увлекались ли опрашиваемые какими-нибудь другими науками, кроме математики, а между тем изучение биологии, например, как отмечал Эрмит, может оказаться очень полезным даже для математиков, так как при этом могут обнаружиться скрытые и в конечном счете плодотворные аналогии.

Точно так же, при наличии вопроса о влиянии метеорологических условий или о существовании периодов возбуждения либо депрессии, в анкете нет более детальных вопросов о психологическом состоянии исследователя и, в частности, об эмоциях, которые он, возможно, испытывал. Эта проблема интересна еще и потому, что ее рассматривал Поль Валери в докладе на заседании Философского общества, где он подчеркнул, что эмоции, очевидно, могут оказывать влияние на поэтическое творчество. Однако, хотя на первый взгляд и может показаться, что некоторые виды эмоций способствуют поэтическому творчеству, так как они в большей или меньшей степени находят свое выражение в поэзии, нельзя считать достоверным, что причина действительно такова или, по крайней мере, что такая причина единственная. Действительно, я знаю по личному опыту, что сильные эмоции могут способствовать совершенно разным видам умственной деятельности (например, математическому творчеству)¹, и по этому вопросу я согласен с любопытным высказыванием Дону (Daunou)²: «В науках даже самых строгих никакая истина не создается гением Ньютонов и Архимедов без поэтического волнения и некоего трепета мыслящего существа».

Кроме того, основной вопрос анкеты — вопрос, касающийся генезиса открытия, указывает на необходимость другого вопроса, который отсутствует в анкете, хотя интерес его очевиден: у математиков спрашивали, как они достигли успеха, но ведь не могут быть одни успехи, бывают неудачи, и знать причины неудач, по меньшей мере, столь же необходимо. Это связано с тем наиболее серьезным замечанием,

¹Открытие, сделанное в момент неожиданного пробуждения, о котором я рассказал выше, было сделано как раз в период, когда я находился в состоянии такого эмоционального возбуждения.

²Цитируется по *Bulletin de la Société de Philosophie*, tome 28 (1928), p. 18.

которое можно высказать по поводу анкет типа анкеты Майе или Клапареда и Фурнуа. Действительно, такие анкеты содержат источник ошибок, которые для них неизбежны: кого можно считать математиком, и прежде всего математиком, творческий процесс которого заслуживает изучения? Большинство ответов, дошедших до составителей анкет, исходило от людей, объявленных математиками..., имена которых нам теперь совершенно неизвестны. Это объясняет, почему их нельзя было спрашивать о причинах их неудач, так как только люди, имеющие определенные успехи, решаются говорить о поражениях. В анкетах, о которых я говорю, я мог найти только одно или два значительных имени, таких как, например, физик и математик Больцман. Такие люди, как Аппель, Дарбу, Пикар, Пенлеве не ответили, что, возможно, было ошибкой с их стороны.

Поскольку, в силу указанных причин, большинство ответов на анкеты Майе и журнала «Математическое образование» имеет второстепенный интерес, мне пришла идея задать несколько вопросов человеку, математическое творчество которого является образцом смелости и глубины. Я говорю о Жюле Драше. Некоторые из его ответов были весьма показательными прежде всего в том, что касается биологии (к которой, как и Эрмит, он проявляет большой интерес), и особенно в том, что касается изучения трудов людей, сделавших открытия до него. Это вопрос, по которому, как мне кажется, даже среди людей, рожденных математиками, существуют серьезные расхождения. Историки удивительной жизни Эвариста Галуа нам сообщают, что, по свидетельству одного из его товарищей по классу, даже в лицее он не любил читать трактаты по алгебре, так как он не мог там найти того, что характерно для изобретателей. Драш, работы которого находятся в тесной связи с работами Галуа, стоит на той же точке зрения: он всегда хочет знакомиться с открытиями в том виде, который им придали их авторы. Напротив, большинство математиков, ответивших на вопросы Клапареда и Фурнуа, предпочитали, изучая предшествующие работы, размышлять над ними и их переоткрывать. И мой подход таков, так что я могу указать как пример, по крайней мере, одного исследователя, т. е. самого себя.

Пример Пуанкаре

Оставим в стороне анкету журнала «Математическое образование». Хотя, как было сказано, в ней не проводилось надлежащего анализа значительности авторов, приславших ответы, впоследствии эта анкета стала поводом для показаний, наиболее авторитетных из всего того,

что можно было надеяться получить. Процесс изобретения был проанализирован величайшим гением, которого знала наша наука за последние полвека, человеком, влияние которого чувствуется во всей современной математической науке: я говорю о знаменитом докладе Анри Пуанкаре в Психологическом обществе в Париже¹. Наблюдения Пуанкаре пролили ослепительный свет на отношения между сознательным и бессознательным, между логикой и случайностью, отношения, которые лежат в основе проблемы. Несмотря на некоторые возражения, которые мы обсудим в подходящий момент, выводы, к которым он пришел в этом докладе, кажутся мне полностью справедливыми и по крайней мере в первых пяти частях я с ними полностью согласен².

Пример, который приводит Пуанкаре, относится к одному из наиболее крупных его открытий, первому, стяжавшему ему славу, — теории автоморфных групп и автоморфных функций. Прежде всего я должен предупредить, что мы должны будем использовать технические термины, которые читатель не обязательно должен понимать. «Я скажу, например, — объясняет он, — что при таких-то обстоятельствах я нашел доказательство такой-то теоремы; эта теорема получит какое-то варварское название, которое многие из вас не поймут, но это не важно: для психолога важна не теорема, а обстоятельства».

Итак, мы будем говорить об автоморфных функциях. Вначале Пуанкаре бесплодно в течение двух недель пытался показать, что функции этого вида существовать не могут — идея, неправильность которой была им позднее доказана.

Действительно, в течение одной бессонной ночи и при обстоятельствах, к которым мы еще вернемся, он построил первый класс этих функций. Затем он пожелал найти для них выражение: «Я хотел представить эти функции в виде отношения двух рядов; эта идея была совершенно сознательной и обдуманной; мной руководила аналогия с эллиптическими функциями. Я спрашивал себя, какими свойствами должны обладать эти ряды, если они существуют, и мне без труда удалось построить эти ряды, которые я назвал тета-автоморфными. В этот момент я покинул Кан, где я тогда жил, чтобы принять участие в геологической экскурсии, организованной Горной школой. Перипетии этого путешествия заставили меня забыть о моей работе. Прибыв в Кутанс, мы сели в омнибус для какой-то прогулки; в момент, когда я встал на подножку, мне пришла в голову идея безо всяких, казалось бы, предшествовавших раздумий с моей стороны, — идея о том, что

¹Bulletin de l'Institut Général de Psychologie, №3, 8 année (1908) (см. Приложение III).

²Все цитаты без указания имени автора на следующих страницах взяты из доклада Пуанкаре.

преобразования, которые я использовал, чтобы определить автоморфные функции, были тождественны преобразованиям неевклидовой геометрии. Из-за отсутствия времени я ничего не проверил и, едва сев в омнибус, продолжал начатый разговор, но я уже был вполне уверен в правильности сделанного открытия. По возвращении в Кан я на свежую голову и лишь для очистки совести проверил найденный результат.

В то время я занялся изучением некоторых вопросов теории чисел, не получая при этом никаких существенных результатов и не подозревая, что это может иметь малейшее отношение к прежним исследованиям. Разочарованный своими неудачами, я поехал провести несколько дней на берегу моря и думал совсем о другом предмете. Однажды, когда я прогуливался на взморье, мне так же внезапно, быстро и с той же мгновенной уверенностью пришла идея, что арифметические преобразования тройничных неопределенных квадратичных форм тождественны преобразованиям неевклидовой геометрии».

Эти два результата показали Пуанкаре, что существуют другие автоморфные группы и, следовательно, другие автоморфные функции, чем те, которые он открыл во время своей бессонницы. Эти последние были лишь частным случаем. Теперь уже дело состояло в том, чтобы изучить самые общие случаи. При этом он был остановлен очень серьезными трудностями, которые упорная сознательная работа позволила определить более адекватным образом, но не преодолеть. Затем, еще раз, решение пришло ему столь же неожиданным образом и без подготовки, как и в двух других случаях. Это произошло тогда, когда он отбывал воинскую повинность.

И он прибавляет: «То, что вас удивит прежде всего, — это видимость внезапного озарения, — явный результат длительной неосознанной работы: роль этой бессознательной работы в математическом творчестве мне кажется несомненной».

Описание Пуанкаре его собственной бессознательной работы

Прежде чем анализировать этот последний вывод, рассмотрим историю той бессонной ночи, с которой началась вся эта замечательная работа; ночи, которую мы сначала оставили в стороне, так как здесь мы находим совершенно особые детали.

«Однажды вечером», — говорит Пуанкаре, — вопреки своей привычке, я выпил черного кофе; я не мог заснуть; идеи теснились: я чувствовал, что они как бы сталкиваются, пока две из них, так сказать, не соединились, чтобы образовать устойчивую комбинацию».

Это странное явление тем интереснее может быть для психолога, чем оно более исключительно. Пуанкаре говорит, что он довольно часто чувствует в себе сосуществование сознательного и подсознательного «я»: «Кажется, что в этих случаях присутствуешь при своей собственной бессознательной работе, которая стала частично ощутимой для сверхвозбужденного сознания и которая не изменила из-за этого своей природы. При этом начинаешь смутно различать два механизма или, если угодно, два метода работы этих двух я».

Но такая исключительная способность пассивно, будто бы со стороны, наблюдать за эволюцией своих собственных подсознательных идей кажется мне фактом чрезвычайным и присущим только Пуанкаре. Я никогда не испытывал этого чудесного чувства и я никогда не слышал, чтобы его испытывал кто-нибудь, кроме него.

Примеры из других областей

Напротив, то, что Пуанкаре рассказывает в остальной части своего доклада, является, абсолютно общим и случается с каждым исследователем, который находит решение. Так, Гаусс писал по поводу одной теоремы из области теории чисел, которую он пытался доказать в течение многих лет: «Наконец, два дня назад я добился успеха, но не благодаря моим величайшим усилиям, а благодаря Богу. Как при вспышке молнии, проблема внезапно оказалась решенной. Я не могу сказать сам, какова природа путеводной нити, которая соединила то, что я уже знал, с тем, что принесло мне успех». Излишне говорить, что то, что произошло при моем резком пробуждении, было совершенно аналогичным и является типичным, так как решение, которое я получил: 1) не имело никакого отношения к моим предшествующим попыткам, следовательно, не было вызвано моей предшествующей сознательной работой; 2) пришло так быстро, что не потребовалось никакой затраты времени на размышление. Тот же характер внезапности и самопроизвольности был отмечен несколькими годами раньше другим знаменитым эрудитом современной науки, Гельмгольцем, в одном важном докладе, который он сделал в 1886 г.¹ Со времени Гельмгольца и Пуанкаре это свойство было признано психологами как весьма общее для всех видов изобретения. Грэхем Уоллас (Graham Wallas) в «Art of Thought» предлагает назвать, это свойство «озарением»; этому озарению обычно предшествует стадия «инкубации», в течение которой изучение проблемы кажется прерванным и тема заброшенной. Такое озарение отмечалось также в некоторых ответах на анкету журнала «Математическое образование». Физики (Ланжевен) и химики (Оствальд)

¹См. прим. редактора на стр. 122.

рассказывают, что также испытывали подобное. Приведем два случая из очень различных областей. Один из них привлек внимание психолога Полана¹. Речь идет о знаменитом письме Моцарта: «Когда я чувствую себя хорошо и нахожусь в хорошем расположении духа, или же путешествую в экипаже, или прогуливаюсь после хорошего завтрака, или ночью, когда я не могу заснуть, — мысли приходят ко мне толпой и с необыкновенной легкостью. Откуда и как приходят они? Я ничего об этом не знаю. Те, которые мне нравятся, я держу в памяти, напеваю; по крайней мере так мне говорят другие. После того, как я выбрал одну мелодию, к ней вскоре присоединяется, в соответствии с требованиями общей композиции, контрапункта и оркестровки, вторая, и все эти куски образуют «сырое тесто». Моя душа тогда воспламеняется, во всяком случае если что-нибудь мне не мешает. Произведение растет, я слышу его все более и более отчетливо, и сочинение завершается в моей голове, каким бы оно ни было длинным. Затем я его охватываю единым взором, как хорошую картину или красивого мальчика, я слышу его в своем воображении не последовательно, с деталями всех партий, как это должно зазвучать позже, но все целиком в ансамбле.

Если же при этом в процессе моей работы мои произведения принимают ту форму или манеру, которые характеризуют Моцарта и не похожи ни на чьи другие, то клянусь, это происходит по той же причине, что, например, мой большой и крючковатый нос является моим, носом Моцарта, а не какого-нибудь другого лица; я не ищу оригинальности и сильно бы затруднился определить свою манеру. Совершенно естественно, что люди, имеющие различную внешность, оказываются отличными друг от друга внутренне так же, как и внешне».

Говорят, что очень непосредственное поэтическое воображение было у Ламартина, который иной раз сочинял стихи мгновенно, не задумываясь; в связи с этим интересен также доклад, сделанный в Философском обществе нашим крупным поэтом Полем Валери²: «В этом процессе есть два этапа: один из них тот, когда писателя пронизывает своего рода молния, так как наша интеллектуальная активная жизнь состоит по сути дела из фрагментов; она как бы формируется из очень кратких, но очень богатых элементов, которые не освещают всего вокруг, но, наоборот, указывают нашему рассудку, что имеются совершенно новые формы, которыми он, очевидно, сможет овладеть после определенной работы. Мне приходилось иногда наблюдать появление некоторого предчувствия, проблеска, не освещающего, но ослепительного. Он предупреждает, он говорит больше, чем если бы освещал, в итоге он

¹ «Psychologie de l'Invention», см. стр. 10.

² Paul Valéry. *Bulletin Soc. Philosophie*, tome 28 (1928), p. 16.

сам — загадка, которая несет с собой уверенность, что она может быть решена. Можно сказать: «я вижу, и завтра я буду видеть дальше». Имеет место факт особой восприимчивости; затем идут в темную фотокамеру и видят появившиеся образы.

Я не гарантирую, что все это очень хорошо описано, так как это чрезвычайно трудно описать».

Аналогично описал этот самопроизвольный и почти невольный творческий процесс, перемещающийся и заканчивающийся сознательным усилием, английский поэт Хаусман (Housman) в речи, произнесенной в Кембридже¹ (см. его интересную брошюру «The Name and Nature of Poetry»).

Подобные наблюдения можно сделать и в обычной жизни: ведь часто случается, что имя или название места, которое вы никак не могли вспомнить, приходит вам на ум, когда вы больше о нем не думаете.

То, что это явление имеет значительно более глубокую аналогию с процессом изобретения, чем это может показаться с первого взгляда, видно из замечания Реми де Гурмона (Rémy de Gourmont): он указывает, что точное слово, нужное для выражения идеи, тоже часто находится после долгих и бесплодных поисков, т. е. тогда, когда уже думают о другом. Этот случай интересен, так как, являясь промежуточным, он аналогичен предыдущему, и, тем не менее, принадлежит уже к процессу изобретения.

Хорошо известная пословица «утро вечера мудренее» также представляет собой аналог явления, рассмотренного выше. И это мы можем рассматривать как явление, относящееся к области изобретения, если следовать современным философам и понимать слово «изобретение» в широком смысле, как об этом говорилось во введении.

Гипотеза случайности

Биолог Николь² также признает творческое вдохновение и даже настаивает на нем. Но необходимо обсудить способ, которым он его интерпретирует.

Пуанкаре, как мы видели, считает вдохновение признаком бессознательной предшествующей работы, и, признаюсь, я не вижу, как можно серьезно оспаривать эту точку зрения.

Но Николь как будто не согласен с этим, или, точнее, он вообще не говорит о бессознательной работе. «Изобретатель, — пишет он, — не знает ни осторожности, ни ее младшей сестры — медлительности. Он

¹См. замечание Катрин Патрик в статье, цитируемой в сноске на стр. 32.

²Nicolle “Biologie de l’Invention”, p. 6–7.

бросается единым прыжком на новую область и покоряет ее. Вспышка. Проблема, темная до сих пор, не освещавшаяся никаким робким проблеском, оказывается вдруг залитой светом. Говорят — открытие».

«В противоположность последовательному приобретению знаний, такой акт не имеет ничего общего с логикой, рассуждением...».

«Акт открытия... может быть сравнен с мутациями..., которые носят характер случайности. Открытие — это тоже случайность...».

Такое представление является самым радикальным выражением теории случайности, которую защищают и такие психологи, как Сурио.

Я же не только не могу с ней согласиться, но совершенно не могу понять, каким образом такой ученый, как Николь, мог проповедовать такую теорию. Несмотря на уважение, которое мы должны питать к такой значительной личности, как Шарль Николь, мы считаем, что объяснять это ч и с т ы м с л у ч а е м — это значит ничего не объяснять, а утверждать, что существуют явления без причины. Разве Николь стал бы утверждать, что дифтерия или тиф, которые он изучал, являются результатом чистого случая? Даже если сейчас мы не будем заниматься анализом, который попытаемся дать в следующей главе, все равно случай есть случай, т. е. он одинаков как для Николя и Пуанкаре, так и для случайного прохожего. Случаем нельзя объяснить, почему открытие причины тифа было сделано Николем (т. е. человеком, занимавшимся наукой, годами обдумывавшим условия эксперимента и показавшим свои замечательные способности), а не кем-нибудь из его санитарок. Что же касается Пуанкаре, то если случайностью можно было бы объяснить одно из его гениальных открытий, о котором он говорит в своем докладе (во что я не могу поверить), то как это объяснение согласовать со всеми теми изобретениями, которые он последовательно перечисляет, не говоря уже о всех тех, которые вытекают из различных теорий, составляющих его огромное творчество, и которые преобразили почти все разделы математической науки. С таким же успехом, пользуясь хорошо известным сравнением, можно было бы говорить об обезьяне, ударявшей пальцами по клавишам печатающей машинки и случайно напечатавшей Библию.

Это не означает, что случай не играет никакой роли в процессе изобретения¹. Случай существует. В гл. III мы увидим, какое участие он принимает в бессознательной работе.

¹Обсуждая математические проблемы, мы говорим здесь только о случайностях психологических, т. е. о случайных умственных процессах. Надо (как это отметил Клапаред на конгрессе в Центре синтеза в Париже в 1937 г.) отличать их от внешних случайностей, как в хорошо известном случае с лягушками Гальвани. Этот последний тип случайностей играет, естественно, определенную иницирующую роль в открытиях экспериментальных наук.

ДИСКУССИЯ О «БЕССОЗНАТЕЛЬНОМ»

Хотя «бессознательное», строго говоря, является профессиональным делом психологов, оно находится в такой тесной связи с рассматриваемым основным вопросом, что я не могу не остановиться на нем.

Тот факт, что это внезапное озарение, которое можно назвать вдохновением, нельзя объяснить чистым случаем, является очевидным после того, что мы уже сказали: не может быть сомнения в необходимости предшествующего умственного процесса, неуловимого для изобретателя, другими словами, процесса бессознательного. В самом деле, проследив действие этого бессознательного процесса на многих примерах, рассмотренных ниже, нельзя больше сомневаться в его существовании.

Хотя повседневные наблюдения доказывают нам существование бессознательных процессов, что признавалось со времен св. Августина, и такими умами, как Лейбниц, оно часто подвергалось сомнению. Сам факт, что в человеке есть нечто неизвестное его нормальному «я», кажется таким таинственным, что различные авторы его либо непомерно превозносили, либо непомерно ругали. Многие авторы упорно возражают против признания даже намека на бессознательные явления. Возьмем пример, имеющий непосредственное отношение к изобретениям. Трудно понять, каким образом в столь близкое к нам время, в 1892 г., после веков психологических исследований, можно было сделать в работе об изобретении¹ следующее заявление: «Эти так называемые пророчества, эти почти мгновенные заключения должны очень просто объясняться известными законами (?): ум мыслит по аналогии или по привычке; следовательно, рассудок может обходиться без промежуточных этапов».

Как будто бы способность обходиться без промежуточных этапов, которую автор вынужден признать, не является, по определению, бессознательным умственным процессом! Нельзя не вспомнить больных Пьера Жанэ: эти больные, покоряясь его внушению, «не видели» карт, помеченных крестиком..., которые обязательно должны были быть увиденными, чтобы быть исключенными из поля зрения. Но, конечно, Пьер

¹Desdoutis "Théorie de l'Invention", 1892.

Жанэ в своих выводах не отрицал бессознательного, которое в подобных случаях проявляется самым очевидным образом.

Чтобы любыми средствами игнорировать бессознательные процессы, философ Альберт Фуйе (Albert Fouillée) использует две противоположные тактики: либо он утверждает, что в любых условиях обязательно присутствует сознание, хотя бы слабое и неотчетливое, либо, если его гипотеза не позволяет ему избежать того, чего он так боится, он отступает в противоположном направлении, ссылаясь на рефлекторные действия, т. е. действия, которые были досконально изучены физиологами (работая, например, с лягушками, у которых отрезали головы), но которые совершенно не предполагают вмешательства умственных центров, а только более или менее периферических и второстепенных нервных элементов.

Есть много хорошо известных мыслительных процессов, которые не допускают ни одного, ни другого из этих противоположных объяснений. Остановимся на «машинальных» записях, которые были глубоко изучены на нескольких психически больных, но которые характеризуют не только этих ненормальных людей. Многие среди нас, если не все, случилось, писали машинально, а я, по крайней мере, очень часто. Однажды, когда я был в лицее и передо мной лежало задание, которое меня несколько не интересовало, я вдруг заметил, что написал на своем листе бумаги заголовок «математика» (Mathématiques). Можно ли это рассматривать как рефлекторное движение? Могут ли рефлекторные движения, комбинируясь, давать столь сложное движение, как при письме? И разве соответствующие низшие центры «знают», что в слове «математика» после 't' стоит немое 'h'? С другой стороны, здесь нельзя предположить ни малейшего проблеска сознательной мысли, так как мое задание было из совершенно другой области.

Множественность бессознательных процессов

В настоящее время существование бессознательного кажется достаточно общепризнанным, хотя отдельные философские школы предпочли бы его не замечать.

На самом же деле, самые обыденные факты со всей очевидностью демонстрируют не только участие бессознательного, но и одно из его основных свойств: я имею в виду случай обычный (что не означает простой) — как узнают человеческое лицо. Чтобы узнать знакомого, надо слить воедино сотни характеристик, из которых нельзя выделить или запомнить какую-либо одну черту (по крайней мере, если человек не является особо одаренным или натренированным). Тем не менее, все

эти характеристики лица друга должны находиться в уме — в уме бессознательном, естественно, — и все одновременно. Таким образом, мы приходим к выводу, что важным свойством бессознательного является множественный характер его процессов: в нем различные и, вероятно, многочисленные процессы могут и должны протекать одновременно в отличие от сознательного «я», которое едино.

Мы видим также, что эта множественность бессознательного позволяет ему осуществлять работу синтеза. В случае, описанном выше, многочисленные детали одного лица дают в нашем сознании одно ощущение — узнавание¹.

Краевое сознание

В существовании бессознательного нет никаких сомнений. Более того, мы должны подчеркнуть, что не существует умственных процессов, которые не включали бы в себя неосознанное. На первый взгляд кажется, что идеи, выраженные словами, представляют собой мысли в наиболее осознанном их воплощении. Однако когда я произношу фразу, где находится следующая? Очевидно, не в области моего сознания, которое занято фразой № 1; я о ней не думаю и, тем не менее, она готова появиться в следующее мгновение, что не могло бы произойти, если бы я о ней не думал бессознательно. Но в данном случае речь идет о таких бессознательных процессах, которые очень близки к сознанию и находятся в его непосредственном распоряжении.

¹Насколько я понимаю, в современной гештальт-психологии считается, что существует единое восприятие лица, не зависящее от восприятия отдельных его деталей. Я не считаю себя достаточно компетентным, чтобы обсуждать эту важную концепцию, но так как этот вопрос находится в тесной связи с тем, о чем будет речь в дальнейшем (особенно в гл. IV), я должен сказать, что, хотим мы этого или нет, но существует нечто подобное изолированному воздействию света на различные точки нашей сетчатки (по крайней мере, в первый момент, когда этот эффект передается в мозг), и эти индивидуальные восприятия являются бессознательными. Являются ли эти бессознательные восприятия — вообще говоря, очень отдаленные, видимо, потому, что механизм соответствия приобретает в раннем детстве — аналогичными тем бессознательным процессам, которым мы будем заниматься в следующих главах? Это уже другой вопрос, но я должен прибавить, что для меня является несомненной их идентичность; существует цепь промежуточных процессов, некоторые из которых описаны самими гештальтистами (например, в «Психологии формы» Поля Гийома), особенно для таких случаев, как обучение езде на велосипеде (что есть у многих авторов). Лично я научился езде на велосипеде, будучи подростком, но я не мог полностью постичь это искусство до тех пор, пока все движения, вначале сознательные, не стали совершенно бессознательными, настолько бессознательными, что я не знал уже, почему то, что у меня не получалось сначала, затем стало получаться.

Видимо, мы можем отождествить это с тем, что Франсис Гальтон¹ называет «прихожей сознания» и описывает следующими словами: «Когда я начинаю размышлять о чем-нибудь, мне кажется, что процесс этого размышления следующий: идеи, которые находятся в моем сознании, как бы притягивают к себе наиболее подходящие из числа других идей, находящиеся поблизости, хотя и не в центре внимания моего сознания. Все происходит так, как если бы в моем уме был зал для приемов, где располагается сознание и где перед ним одновременно представляют две или три идеи; в то же время прихожая полна более или менее подходящими идеями, расположенными вне поля зрения полного сознания. Прибывающие из прихожей идеи, наиболее связанные с идеями, находящимися в зале для приемов, кажутся созванными механически-логическим образом, и каждая по очереди получает аудиенцию».

Слово «подсознательный» в отличие от «бессознательный» можно использовать для того, чтобы отличать такие поверхностные бессознательные процессы; впрочем, существует слово «fringe-consciousness»², созданное Уильямом Джеймсом и использованное затем Уолласом с тем же (насколько я понимаю) значением и которое очень выразительно в этом смысле³ (здесь мы будем говорить «краевое сознание»). Эти подсознательные состояния представляют большую ценность для психологии, так как они поддаются самонаблюдению, что невозможно, — по крайней мере обычно⁴ — для процессов более глубоких. В действительности, только благодаря этим подсознательным процессам возможен самоанализ. Чтобы описать эти процессы, психологи (Уоллас) используют сравнение с чувством зрения: «Область видимости наших глаз состоит из маленького круга полной видимости (фокального круга), окруженного областью периферической видимости, которая становится все более и более расплывчатой и несовершенной по мере приближения к пределу видимости. Вообще говоря, мы не отдаем себе отчета в существовании области периферической видимости, потому что, если там происходит что-нибудь интересное, у нас возникает естественное желание повернуться в соответствующем направлении. Используя эту терминологию, мы можем сказать, что одной из причин,

¹Francis Galton "Inquiries into Human Faculty", 1908, p. 146.

²Краевое сознание (англ.). — *Прим. перев.*

³Термин «предсознание» использовался Варендонком и другими авторами фрейдистской школы для обозначения особых психических состояний, но сомнительно, чтобы он мог быть использован у нас.

⁴Бессонная ночь Пуанкаре (стр. 15–16) является исключением. Другим возможным примером, хотя и менее достоверным, является случай изобретателя, упомянутый Клапаредом на заседании в Центре синтеза.

из-за которой мы не знаем умственных процессов, происходящих в периферическом сознании, является та, что в нас сильна тенденция перевести их в область полного сознания, если они представляют для нас интерес; тем не менее, мы можем иногда интенсивным усилием оставить их на периферии сознания и там наблюдать».

Обычно трудно заметить границу между сознанием и краевым сознанием. Однако эти трудности оказываются значительно меньшими при анализе изобретательского творчества — предмета нашего исследования. Причина в том, что изобретательская работа сама по себе неуклонно направляет мысль на решение проблемы, и как только это решение получено — и только тогда — рассудок может воспринять то, что происходит в «краевом сознании». Этот факт будет представлять для нас огромный интерес.

Последовательные слои бессознательного

Мы видим, что существует по меньшей мере два вида, или, точнее, две ступени бессознательного.

Почти невозможно сомневаться (и мы сможем это подтвердить в дальнейшем), что в бессознательном должен существовать даже целый ряд последовательных слоев, наиболее поверхностный из которых мы только что рассмотрели. Более удаленным является слой, который проявляется в «машинальных» записях: еще глубже лежат слои, которые связаны с вдохновением, о котором мы говорили в предыдущей главе. В конце нашего исследования мы увидим и еще более глубокие слои. Кажется, что существует своего рода непрерывный переход между полным сознанием и все более и более скрытыми уровнями бессознательного: последовательность, которая, как мне кажется, особенно хорошо описана в книге Тэна «Об уме», где он пишет¹: «Можно сравнить рассудок человека с театральной сценой неопределенных размеров, рампа которой очень узка, но сцена, начиная от рампы, расширяется. Перед этой освещенной рампой есть место лишь для одного актера. Далее, на разных планах сцены, находятся различные группы, которые тем менее отчетливы, чем дальше они от рампы. Еще дальше этих групп, в кулисах и на далеком заднем плане, находится множество темных форм, которые иногда внезапный вызов выводит на сцену или даже к огням рампы. Этот муравейник актеров всех разрядов всегда в каком-то брожении, которое выдвигает

¹Впервые это добавлено Тэном в издании 1897 г. (Taine "De l'Intelligence", tome V, 1897, p. 278). (Русский перевод, сделанный с более ранних изданий, см. Тэн Ипполит. «Об уме и познании», т. 1–2, СПб. 1872, II изд. СПб, 1894).

корифеев, поочередно появляющихся перед нами как бы в волшебном фонаре¹.

Это поразительное описание совершенно аналогично данному в 10-й книге «Исповеди» св. Августина, но этот последний говорит лишь о памяти; тем не менее, мне кажется, что он отчетливо понимает — а для меня это несомненно — что память принадлежит к области бессознательного.

Как предполагает Фуэе, краевое сознание имеет, очевидно, некоторые аналогии с очень расплывчатыми, но осознанными идеями, в то время как на другом конце цепи последовательность бессознательных слоев, вероятно, непрерывно смыкается с рефлекторными явлениями, как это заявляет Спенсер². Таким образом, два состояния, которые Фуэе желает противопоставить бессознательному, являются, видимо, лишь его крайними случаями; это заключение, однако, Фуэе отбрасывает³ на основании аргументов, которыми бесполезно утруждать читателя.

¹ На первый взгляд кажется, что некоторые новые психологические школы, как, например, Фрейд, не согласны с этой точкой зрения и признают лишь один вид бессознательного мышления (истинное). Один мой компетентный друг и коллега сообщил мне, что это неверная интерпретация мысли Фрейда.

Мы уже видели (сноска на стр. 22), что идеи со временем становятся все более бессознательными — обстоятельство, с которым мы снова встретимся в гл. VII (см. стр. 79–81).

²Spenser “The Principles of Psychology”, tome I, chap. IV. (Русский перевод см. по изданию: Спенсер Герберт «Основания психологии». Т. 1–4, СПб, 1876, изд. И. И. Библин).

³Fouillée “L’Evolutionnisme des Idées — Forces”, p. XIV и конец p. XIX.

БЕССОЗНАТЕЛЬНОЕ И ОТКРЫТИЕ

Сочетание идей

То что мы только что рассмотрели относительно изобретения вообще, будет пересмотрено под другим углом зрения, когда мы будем говорить о связи изобретения с открытием.

Немного позже мы увидим, что возможность приписать открытие чистой случайности исключена уже наблюдениями Пуанкаре, если их внимательно изучить.

С другой стороны, тот факт, что в процессе бессознательной работы имеет место вмешательство случайных процессов (бессознательные процессы включают в себя случайные процессы, не будучи с ними в противоречии), очевиден, как это показал Пуанкаре, если принимать во внимание не только результаты самоанализа, но и саму природу вопроса.

В самом деле, очевидно, что независимо от того, идет ли речь о математике или о чем-нибудь другом, изобретение или открытие совершается путем сочетания идей¹. Но ведь существует чрезвычайно большое количество таких сочетаний, в большинстве лишенных интереса, и лишь некоторые из них могут оказаться плодотворными. Какие же из них выбирает наш рассудок — я хочу сказать — наш сознательный рассудок? Лишь те, которые плодотворны или могут ими стать. Но чтобы их найти, необходимо построить очень много возможных сочетаний, среди которых нужно выбрать полезные.

Нельзя не признать, что эта первая операция в некоторой степени производится наудачу, так что роль случая несомненна на этом первом этапе умственного процесса. Но мы видим, что это вмешательство случайности происходит на уровне бессознательного, так как большинство этих сочетаний — точнее те, которые бесполезны — нам остаются неизвестными.

¹Макс Мюллер замечает, что латинский глагол «сogito» означающий «думать», этимологически означает «волноваться вместе»: св. Августин также отмечает это и добавляет, что слово «intelligo» означает «выбирать среди». Любопытная связь с излагаемым нами материалом.

Кроме того, сказанное лишний раз показывает множественный характер бессознательного — эта множественность необходима для построения многочисленных сочетаний и для их сравнения между собой.

Следующий этап

Очевидно, что этот первый процесс выработки многочисленных сочетаний является только началом творчества, только, это следует подчеркнуть, предварительным этапом. Как мы только что видели и как это показал Пуанкаре, творить — это значит не заниматься бесполезными сочетаниями, а исследовать только полезные, которые составляют лишь небольшое меньшинство. Изобретение — это распознавание, выбор.

Изобретать — это выбирать

Этот замечательный вывод покажется нам тем более удивительным, если мы его сравним с тем, что пишет Поль Валери¹: «Для того, чтобы изобретать, надо быть в двух лицах. Один образует сочетания, другой выбирает то, что соответствует его желанию и что он считает важным из того, что произвел первый.

То, что называют «гением», является не столько заслугой того, кто комбинирует, сколько характеризует способность второго оценивать только что произведенную продукцию и использовать ее».

Здесь видно, насколько математик согласен с поэтом в этом фундаментальном вопросе: изобретение представляет собой выбор.

Эстетика в творчестве

Как может осуществиться такой выбор? Правила, которые здесь действуют, «предельно деликатны и тонки, их почти невозможно выразить точными словами; они легче чувствуются, чем формулируются; можно ли при таких условиях представить себе аппарат, который их применяет автоматически?» (Пуанкаре).

Хотя мы непосредственно не видим, как функционирует этот аппарат, мы можем ответить на этот вопрос, так как отдаем себе отчет о результатах его деятельности — речь идет о сочетаниях идей, воспринимаемых нашим сознательным мышлением. Эти результаты не подлежат сомнению: «Среди бессознательных идей привилегированными, т. е. способными стать сознательными, являются те, которые прямо или косвенно наиболее глубоко воздействуют на наши чувства.

¹Paul Valéry "De la simulation". *Nouv. Revue Française*, tome XXVIII (mai 1927), p. 620.

Может вызвать удивление обращение к чувствам, когда речь идет о математических доказательствах, которые, казалось бы, связаны только с разумом. Но это означало бы, что мы забываем о чувстве математической красоты, гармонии чисел и форм, геометрической выразительности. Это настоящее эстетическое чувство, знакомое всем настоящим математикам. Воистину, здесь налицо чувство!» (Пуанкаре).

Тот факт, что эмоциональный элемент является существенной частью открытия или изобретения, более чем очевиден, и многие мыслители это подтверждали; ясно, что никакое важное открытие или изобретение не может совершиться без желания его сделать. Но вместе с Пуанкаре мы говорим о несколько ином предмете, о вмешательстве чувства красоты, играющего роль незаменимого посредника при открытии. Итак, мы пришли к двойному заключению: изобретение — это выбор; этим выбором повелительно руководит чувство научной красоты.

Возвращение к бессознательному

В какой области — принимая это слово скорее в символическом, чем в буквальном смысле, — в какой области ума производится этот отбор? Ясно, что не в сознании¹, которое из всех возможных сочетаний идей знает лишь полезные.

Пуанкаре сначала выдвигает идею, что и бессознательное воспринимает лишь интересные комбинации. Он не настаивает на этой первой гипотезе и, по правде сказать, я не могу ее считать заслуживающей дальнейшего рассмотрения. Видимо, в ней зарегистрирован только первый шаг перед тем, как сделать второй, и дело здесь только в словах, в определении. Мы должны узнать, в «какой области» происходит исключение неинтересных сочетаний, и нет никакого основания не называть эту «область», если она существует, другой частью бессознательного.

Таким образом, остается лишь последнее заключение Пуанкаре, что бессознательное решает не только сложную задачу создания различных идей, но и существенную и деликатную задачу выбора сочетаний, удовлетворяющих нашему чувству красоты и, следовательно, имеющих шансы оказаться полезными.

¹ Хотя письмо Моцарта (см. стр. 17) показывает, что в его случае выбор был сознательным процессом, мы считаем, что, вероятно, ему предшествовал первоначальный бессознательный выбор так как иначе мы пришли бы к гипотезе чистого случая.

Другие точки зрения на инкубацию

Эти соображения априори могли бы быть сами по себе достаточными, чтобы подтвердить заключение Пуанкаре. Однако это заключение подверглось атакам различных авторов, и некоторые из них как будто движимы тем же страхом перед бессознательным, о котором мы уже говорили в предыдущей главе¹. Посмотрим, как они объясняют такой поразительный факт, как озарение.

Нет необходимости вновь говорить о доктрине чистого случая, которую мы обсуждали в первой главе и в начале текущей. Мы будем считать общепризнанным, что обычно озарению предшествует инкубация². Во время периода инкубации не заметно никакой сознательной работы ума, но вместо того, чтобы принять существование бессознательной работы, не можем ли мы принять, что вообще ничего не происходит? По этому поводу имеются две основные гипотезы³:

А. Что возможной причиной нового состояния ума, способного на озарение, могло бы быть то, что ум с в е ж, мозг отдохнул. Эту гипотезу мы назовем г и п о т е з о й о т д ы х а. Пуанкаре, вовсе ее не принимавший, думал о ней, но в связи с одним особым случаем (см. дальше).

Б. Что существенной причиной озарения могло бы быть о т с у т с т в и е п о м е х, которые препятствуют продвижению на подготовительной стадии работы. «Когда мыслитель становится на ложный путь, как это часто случается, он незаметно соскальзывает на придорожную колею и в данный момент может оказаться неспособным выбраться из нее... Инкубация состоит в избавлении от этих ложных путей и от этих стесняющих предположений, так что проблема рассматривается непредвзято». Мы можем назвать это г и п о т е з о й з а б в е н и я.

¹Россман (Rossman "Psychology of the Inventor", tome VI, p. 86) пишет: «Гипотеза о том, что подсознание определяет окончательное поведение, не решает проблему. Она лишь дает название тому, что нас мистифицирует и затрудняет». Однако бессознательные процессы — это не просто названия, они реально существуют. Хотя их трудно наблюдать непосредственно, они существуют, как мы видели, независимо от того, являются ли они причиной озарения или нет. Ссылка на «психологические и химические условия тела», как это делает данный автор — конечно, не пытаюсь точно определить, что это такое — наталкивается хотя бы на то же самое возражение, а именно, что мы только называем то, чего не понимаем. И это заявление Россмана, если оно имеет смысл, содержит лишь другое название гипотезы отдыха.

²К исключению относятся такие случаи, как с Моцартом и (по описанию Катрин Патрик в указанной ниже работе — см. стр. 32, сноски) с А. Е. Хаусманом. Однако по причинам, о которых говорилось выше, я считаю, что эти исключения, безусловно, кажущиеся, дело здесь в стремительности инкубации.

³См. Woodworth "Experimental Psychology", p. 823.

Обсуждение этих гипотез

Для защиты гипотезы отдыха был призван авторитет Гельмгольца. Гельмгольц заявляет, что «счастливые идеи» (его название озарения) ему никогда не приходят в состоянии умственной усталости или когда он сидит за своим рабочим столом¹ и, заметив, что он уже изучал данный вопрос, Гельмгольц прибавляет: «Когда пройдет усталость, вызванная этой работой, нужно иметь час полного физического отдыха, прежде чем появятся хорошие идеи», — заявление, которое лишь сомнительным образом может поддержать рассматриваемую гипотезу, так как Гельмгольц здесь заявляет, что озарение происходит не тогда, когда ум на отдыхе, но приблизительно один час спустя².

Кроме того, случай Гельмгольца не является общим, имеются и противоположные наблюдения. Профессор К. Фридрихс³ писал мне, что «творческие идеи приходят большей частью внезапным образом, часто после большого умственного напряжения, в состоянии умственной усталости, сочетающейся с физическим отдыхом». Подобное же заявление мне было сделано художественным критиком доктором Стирлингом, который занимается установлением подлинности картин: он заметил, что вдохновение приходит обычно после долгого сознательного усилия, когда он уже устал, — как будто бы для того, чтобы могли выступить бессознательные идеи, необходимо, чтобы было ослаблено сознательное я.

Этот пример показывает, и нужно это помнить, что в таких вопросах правила не обязательно являются неизменными. Процессы могут быть различными не только у разных индивидов, но и у одного и того же человека. Действительно, уже наблюдения Пуанкаре дают нам три вида творческой работы, существенно различные с нашей точки зрения: а) работа полностью сознательная; б) озарение с предшествующей инкубацией; в) совершенно особый процесс его первой бессонной ночи⁴.

¹Предпочитают ли математики работать сидя или стоя, является одним из тех вопросов, которые поставлены в вопроснике «Математического образования». Привычки такого типа являются сугубо индивидуальными. Из рассказов Гельмгольца и Пуанкаре можно заключить, что они обычно работали, сидя за столом. Я этого не делаю никогда, за исключением тех случаев, когда приходится делать письменные вычисления (к которым я испытываю некоторое отвращение). За исключением ночей, когда я не могу уснуть, все, что я нашел, я нашел, расхаживая по комнате; я придерживаюсь на этот счет точки зрения персонажа Эмиля Ожье, который говорил: «Ноги — колеса мысли».

²См. прим. редактора на стр. 122.

³Математик, современник Пуанкаре. — *Прим. ред.*

⁴К сожалению, рассказав, что эта ночь не была единственной, когда он мог наблюдать работу своего подсознания, Пуанкаре не указал никаких других деталей, хотя любые справки по этому вопросу были бы для нас очень ценными.

Кроме того, мы говорили, что Пуанкаре думал о гипотезе отдыха. Он о ней думал (не склоняясь к тому, чтобы с ней согласиться даже тогда) в связи с одним особым случаем (отличным, видимо, от вышеприведенных трех случаев и очень сходным со случаем, описанным Гельмгольцем), а именно: сперва неплодотворный период работы, затем отдых, затем новые полчаса работы (Гельмгольц говорит о часе), после чего произошло открытие. Как он сам отмечал, это можно объяснить гипотезой отдыха, но возражение то же, что и в случае Гельмгольца.

Существуют и другие возможные процессы. Очень любопытный случай был рассказан химиком Типлем¹, который только через полчаса заметил, что он работал над вопросом, не отдавая себе в этом отчета и находясь в столь рассеянном состоянии духа, что в течение этого времени он забыл, что принял ванну, и готовился принять вторую; это особый случай бессознательного процесса, так как мыслитель не сознавал своей умственной работы пока она шла, но заметил ее, когда она закончилась.

Таким образом, существуют многие возможности, и некоторые из них могут объясняться гипотезами отдыха или забвения. Я охотно допускаю, что «свежим» или «открытым» умом, т. е. умом, который забыл неплодотворные попытки, можно объяснить возможность открытия, если это открытие отделено от первого периода сознательной работы долгим промежутком времени, скажем, несколькими месяцами. Я говорю в этом случае об открытии, но не об озарении, так как в этом случае нельзя говорить об озарении в чистом виде: решение не появилось внезапным и неожиданным образом, а было обусловлено возобновленной работой.

Как заметил профессор Вудворт² явлением забвения можно, видимо, также объяснить озарения, которые открывали очень простые решения, не замеченные в первый раз. Все другие решения требовали бы, в рамках выдвинутых нами гипотез, нового умственного усилия, чтобы заняться вопросом в новой обстановке (как, например, с отдохнувшим умом или забыв старые идеи). Поэтому нужно не колеблясь отбросить эти объяснения в таких неожиданных случаях, как случай Пуанкаре и других авторов. Пуанкаре не работал в тот момент, когда он поднялся в омнибус в Кутансе: он болтал с одним из своих товарищей. Идея озарила его ум в течение менее чем одной секунды, а именно, в течение времени, нужного для того, чтобы поставить ногу на ступеньку и войти в омнибус. С другой стороны, нельзя сказать, что идея была так проста, что не требовала никакой работы: Пуанкаре говорит, что он должен

¹См. Platt et Baker. *Journ. Chem. Educ.*, tome VIII (1931), p. 1969–2002.

²Woodworth “*Experimental Psychology*”, p. 40.

был работать по возвращении в Кан, чтобы ее проверить. Он приводит примеры и других озарений, хотя и менее ограниченных во времени, но происходящих с той же внезапностью и отсутствием подготовки, что исключает объяснения А или Б страницы 29. Если бы мы приняли одно из этих объяснений, то озарения должны были бы происходить в результате новой работы того же вида, что и первоначальная, и отличались бы от нее лишь тем, что не использовали бы результат этой первой работы, который был бы — вещь парадоксальная — крайне вреден (как плод усталости или ошибочной идеи). Но наблюдение показывает, что процесс озарения имеет иную природу, чем предшествующая работа. Эта последняя действительно является работой, включающей в себя более или менее напряженное умственное усилие и часто многочисленные попытки; озарение же происходит вдруг, без видимого усилия.

Более того, если мы примем гипотезу забвения, предполагающую, что многочисленные предшествующие и ненужные идеи мешали в течение некоторого времени появлению правильной идеи, то мы должны были бы осознать эти предшествующие идеи (так как эти теории отрицают всякую роль бессознательного). Однако, напротив, чаще всего случается, что вместо того, чтобы наметить несколько путей, которые предполагаешь ведущими к решению, не видишь никакого.

Итак, мы видим, что гипотезы отдыха или забвения могут быть приняты в некоторых случаях; но в других, а именно, для озарений особенно типичных, отмеченных Пуанкаре и другими, эти объяснения находятся в противоречии с фактами¹.

Другие точки зрения на озарение.

Стадия предчувствия

По поводу описаний явления озарения, которые дают Гельмгольц и Пуанкаре, было выдвинуто менее существенное возражение совершенно

¹Катрин Патрик (Catherine Patrick. *Archives of Psychology*, tome XXVI (1935), № 178) провела эксперимент, связанный с поэтическим творчеством; она попросила нескольких человек (некоторые из них были профессиональными поэтами, другие же — нет) написать стихотворение, тема которого была подсказана картинкой, которую она им показала. В противоположность ее мнению, я не могу считать этот процесс сравнимым с теми процессами, которые мы изучаем. Время эксперимента — едва больше двадцати минут — показывает, что она исследует совершенно другой вопрос: то, что она называет инкубацией (во время которой испытуемый должен вслух рассказать ход своих мыслей в процессе выполнения заданной работы), совершенно не связано с тем процессом инкубации, который рассматривают Гельмгольц и Пуанкаре и во время которого течение мыслей, связанное с поисками решения проблемы, может быть совершенно неизвестно испытуемому.

другого рода¹. Не происходит ли озарение частично в краевом сознании?

Краевое сознание и собственно сознание так близки друг к другу, обмены между ними столь непрерывны и быстры, что кажется почти невозможным различить их роль в столь внезапном явлении, как озарение. Тем не менее, на основании того, что мы будем констатировать в гл. VI, мы будем иметь возможность сделать некоторые выводы по этому вопросу.

Было замечено и другое, одно из наиболее любопытных явлений: у некоторых мыслителей, погруженных в творческую работу, озарению предшествует предчувствие того, что нечто такое наступит, хотя они и не знают, каким оно будет точно. Уоллас дал этому особенному явлению название «предчувствие». Я никогда не испытывал этого чувства, и Пуанкаре не говорит об этом, что он несомненно сделал бы, если бы с ним это случалось. Было бы полезным расспросить по этому поводу ученых.

Последнее возражение против идей Пуанкаре было выдвинуто Уолласом: этот автор допускает, что Пуанкаре мог быть прав, когда «он говорит, что без достаточно сильно развитого эстетического чувства никто никогда не будет крупным творцом в математике», но прибавляет, «что совершенно невероятно, чтобы один только эстетический инстинкт был тем «мотором», которым приводит в действие «механизм» его мыслей».

Я могу лишь дословно воспроизвести этот текст Уолласа, так как совершенно его не понимаю. Он, как мне кажется, путает две вещи, которые надо различать²: «мотор» (т. е. «кто делает») и «механизм»³ («как это делать»). Мы будем говорить о «моторе» в гл. IX (и мы снова покажем, что чувство красоты является двигательной силой); сейчас же мы будем говорить только о механизме и в том, что представляет собой этот механизм, у меня не возникает никаких сомнений. Уоллас считает, что Пуанкаре думает таким образом потому, что он был другом Э. Бутру⁴ (который был другом Уильяма Джеймса), или же на него оказали влияние идеи школы «механистов». Но не только заявление Пуанкаре является результатом его собственных наблюдений, а не внушения кого бы то ни было другого; лично я испытываю то же чувство, что и он, и не потому, что я близкий друг Бутру или Уильяма

¹Graham Wallas "The Art of Thought", p. 96.

²См. Woodworth "Dynamic Psychology".

³Я вынужден почти одновременно пользоваться двумя словами — «механизм» и «механисты», — значения которых совершенно различны и независимы. Я надеюсь, что это не введет читателя в заблуждение.

⁴Известный французский философ. — *Прим. ред.*

Джеймса и изучал идеи механистической школы (что на самом деле не так) или какой-нибудь другой школы, но в силу моих собственных самонаблюдений, потому что идеи, выбранные моим бессознательным мышлением, достигают моего сознания, и при этом я констатирую, что они находятся в полном соответствии с моим эстетическим чувством.

Я думаю, что фактически каждый математик, если не каждый ученый, разделяет это мнение. Я мог бы прибавить, что некоторые из них в письмах высказывали совершенно самостоятельно (без моих вопросов) ту же точку зрения, причем выраженную совершенно определенно.

Другие теории бессознательного

Несомненно, что заключения, к которым мы пришли, являются до некоторой степени удивительными. Они поставили перед Пуанкаре озадачивающий вопрос. Обычно говорят, что бессознательное действует автоматически, и в некотором смысле это несомненно, так как оно не подчинено нашей воле — по крайней мере, ее прямому воздействию — и даже выходит за рамки нашего сознания. А теперь мы находимся перед противоположным заключением: «бессознательное «я» не только автомат, оно способно здраво судить, оно обладает чувством меры и чувствительно, оно умеет выбирать и догадываться». Да что говорить! Оно умеет догадываться лучше, чем сознательное «я», так как преуспевает там, где последнее потерпело неудачу.

Одним словом, подсознательное «я» не выше ли сознательного?»¹.

Такая идея дорога метафизикам недавнего времени и даже более старых эпох. Тот факт, что хотя бессознательное и проявляется время от времени, но фактически остается для нас неизвестным, придавал ему таинственный характер, и ввиду этого таинственного характера ему иногда приписывали высшую власть². Предположение, что бессознательное не имеет своего начала в нас и даже сопричастно божеству, было принято как будто уже Аристотелем. По мнению Лейбница, бессознательное осуществляет связь человека со всей вселенной, в которой ничто не может произойти без того, чтобы не отразиться на каждом из нас; можно найти нечто аналогичное у Шеллинга; Фихте также апеллировал к божеству и т. д.

Позднее на этом принципе была создана целая философская доктрина. Ее создали Майерс и — затем сам Уильям Джеймс (хотя этот

¹Здесь Пуанкаре намекает на Эмиля Бутру, чье влияние на него в данном случае несомненно.

²Видимо, то же самое происходит и по отношению к снам, которым с самого сотворения мира приписываются некие пророческие свойства. Но было бы слишком непочтительно сравнивать метафизические теории бессознательного с вульгарными «толкователями снов».

крупный философ в своем более раннем произведении «Принципы психологии» иногда высказывается так, как если бы он сомневался в самом существовании бессознательного). В соответствии с этой доктриной бессознательное осуществляет связь человека с миром, который недоступен нашим чувствам, и с некоторыми видами духов.

Тем временем, некоторым авторам бессознательное кажется следом предшествовавшего существования; другие полагают, что оно — результат действия бесплотных существ.

Учитывая, что иногда выдвигают причины небесные, мы не должны особенно удивляться, услышав, что привлекаются также и дьявольские силы. Один дерзкий немецкий философ фон Гартман рассматривает бессознательное как универсальную злую силу, которая действует на вещи и людей пагубным образом; и пессимизм, который порождает в нем страх перед этим ужасным бессознательным, таков, что он советует даже не индивидуальное самоубийство, которое он считает недостаточным, но «самоубийство космическое», надеясь, что мощные разрушительные силы, которые подготовит человечество, позволят ему разрушить единым ударом всю планету — в некотором роде предчувствие того, что теперь стало возможным.

Мы видели, что некоторые авторы испытывали своего рода страх перед бессознательным и даже отказывались признать его существование. Этот отказ, может быть, реакция на полет воображения, которому были подвержены другие. Тот таинственный характер, который приписывают бессознательному, видимо, отталкивал других исследователей.

Таким образом, вопрос в том, представляет ли собой бессознательное тайну, точнее, тайну особого рода. На самом деле, тайной является существование любой мысли, всякого умственного процесса, каков бы он ни был. Эти умственные процессы связаны способом, о котором мы знаем не больше, чем люди, жившие тысячи лет назад, — с работой мозговых ячеек. Существование многих видов процессов этого типа не более таинственно, чем существование одного из них.

Что касается вопроса, «выше» или «ниже» бессознательное мышление сознательного, то я считаю, что такой вопрос не имеет ни малейшего смысла, и полагаю, что никакой вопрос «превосходства» не является научным вопросом. Когда вы едете верхом, лошадь «выше» или «ниже» вас? Она сильнее и может бежать быстрее вас; тем не менее, вы ее заставляете делать то, что вы хотите. Я не знаю, какой смысл имело бы считать, что кислород выше или ниже водорода; и правая нога не является выше левой: при ходьбе они действуют совместно. То же делают сознательное и бессознательное мышление. И теперь мы переходим к изучению этого сотрудничества.

ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ СТАДИЯ. ЛОГИКА И СЛУЧАЙ

Сознательная работа

В отчете о докладе Пуанкаре литературный критик Эмиль Фаге писал: «Проблема внезапно проясняется, когда ее больше не изучают и, вероятно, потому, что ее больше не изучают; когда собираются отдохнуть, расслабиться на короткий период. Это факт, который мог бы служить доказательством того, что отдых является условием открытия (и следует опасаться, что лентяи воспользуются этим во вред)».

Конечно, было бы очень удобно, если бы, ознакомившись с условиями задачи, мы могли бы удовлетвориться тем, что, подумав, как было бы приятно ее решить, пошли бы спать, и утром при пробуждении нашли бы решение совершенно готовым. По правде говоря, мы могли бы, пожалуй, считать это слишком легким делом с точки зрения морали.

Но что я сказал? Я говорил о проблеме, которую мы поставили, ложась спать; зачем ограничивать себя этим, если играет роль только случай? История должна была бы изобиловать решениями задач, которые даже не были поставлены.

На самом деле все происходит совершенно иначе. Прежде всего, часто случается, что работа является в некоторой части полностью сознательной¹. Так было в некоторых частях работы Пуанкаре, как мы это видели раньше; например, на этапе, непосредственно следовавшим за началом.

С этой точки зрения очень типично открытие Ньютоном закона всемирного тяготения: говорят, что отвечая на вопрос о том, как он к нему пришел, Ньютон сказал: «Думал о нем постоянно». Но нам не нужен этот анекдот (может быть, впрочем, недостоверный), чтобы понять, что его открытие было результатом настойчивой логической

¹ Не следует, однако, понимать слово «сознательный» слишком дословно. Более внимательный анализ нам покажет (см. гл. VI), что существует тесная кооперация между сознанием и поверхностным подсознанием, или «краевым сознанием», о котором мы говорили в гл. II.

работы высшего порядка. Основная идея, что Луна должна на самом деле падать на Землю — является необходимым и неизбежным следствием того факта, что так случается с каждым материальным телом (идет ли речь о яблоке или о чем-нибудь другом). Упорное постоянство, внимания, «верность своей цели, верность добровольная и часто самоотверженная»¹ были там необходимы.

Значит ли это, что мы должны принять тезис Бюффона, согласно которому гений — это лишь долготерпение? Эта идея находится, очевидно, в противоречии со всем тем, что мы видели раньше. Я признаюсь, что не могу ни разделить восхищения, которое она вызывает, ни даже с ней согласиться. В случае с открытием Ньютона можно, конечно, с самого начала видеть ход мысли, идущей неукоснительно к своей цели, но этот процесс был рожден начальной уверенностью в том, что вопрос заслуживает этого непрерывного внимания, этой «верности добровольной и самоотверженной». И тут идет речь о вдохновении, о выборе, но о таком, что совершается совершенно сознательно.

Сознательная работа в качестве подготовки

Рассмотрим теперь противоположный случай, случай неожиданных вдохновений, которые много раз озаряли ум Пуанкаре. Мы приняли, что они являются следствием бессознательной работы, более или менее интенсивной и длительной. Но является ли действием без причины сама эта бессознательная работа? Мы глубоко бы ошиблись, думая так. Достаточно вернуться к докладу Пуанкаре, чтобы прийти к обратному заключению. Его первое озарение, когда он поднимался в омнибус в Кутансе, следует за первоначальным периодом упорной работы; после этого мы его видим изучающим вопросы теории чисел «без большого видимого результата» и, наконец, «разочарованного своей неудачей», после чего у него обнаруживаются новые плодотворные этапы. В это время он принимается за основную оставшийся вопрос: «Я предпринял систематическую осаду и успешно брал одно за другим передовые укрепления, однако оставалось еще одно, которое держалось и взятие которого означало бы падение всей крепости. Однако сперва ценой всех моих усилий я добился лишь того, что лучше понял, в чем состоит трудность проблемы и это уже кое-что значило». И он замечает еще раз что вся эта работа была совершенно сознательной.

Лишь после того, как он был вынужден еще раз оставить на некоторое время проблему, к нему внезапно пришло решение.

¹Henri Delacroix “L’Invention et le Génie”.

Как мы видели, во всех этих последовательных этапах «внезапные вдохновения (и примеры, которые я приводил, это доказывают достаточно хорошо) происходят лишь после нескольких дней сознательных усилий, которые казались абсолютно бесплодными и когда предполагаешь, что не сделано ничего хорошего, и кажется, что выбрана совершенно ошибочная дорога. Эти усилия, следовательно, не столь бесплодны, как это думают; они пускают в ход машину бессознательного, без них она бы не пришла в действие и ничего бы не произвела».

Точно так же Гельмгольц заметил, что тому, что мы назвали инкубацией и озарением, должна предшествовать эта стадия *подготовки*. После Гельмгольца и Пуанкаре ее существование было признано психологами, которые считают ее общим фактом, существующим, вероятно, даже тогда, когда его не замечают в явном виде, как в случае Моцарта (который не упоминает об инкубации).

Небесполезно заметить, что независимо от доводов, которые мы уже приводили раньше, сказанное здесь само по себе достаточно, чтобы решить вопрос, является ли открытие делом чистого случая. Открытие не может быть сделано лишь благодаря случаю, хотя последний может играть в нем некоторую роль, — так же, как неизбежная роль удачи в артиллерии не исключает необходимости для артиллериста наводить, и притом наводить с большой точностью. Открытие обязательно зависит от более или менее интенсивной предварительной сознательной работы.

Это не только отвечает на вопрос о гипотезе случая, но в то же время мешает принять и другие гипотезы, которые мы исследовали в предыдущей главе. В самом деле, можно было заметить, что гипотезы забвения и отдыха имеют одну общую характеристику: подготовительная работа, если она прямо не приносит результата, в обеих гипотезах предполагается бесполезной и даже вредной. Таким образом, открытия происходили бы, как будто подготовительной работы не было совсем, так что мы должны были бы снова вернуться к неприемлемой гипотезе чистого случая.

Точка зрения Пуанкаре на роль подготовительной работы

Придя к этому выводу, мы не можем больше считать сознание подчиненным бессознательному. Напротив, оно развязывает его действия и в какой-то мере определяет общее направление, по которому должно действовать бессознательное.

Чтобы проиллюстрировать это направляющее действие, Пуанкаре использует удивительное и очень плодотворное сравнение. Он предлагает вообразить, что идеи, которые являются элементами нашей

будущей комбинации, представляют собой «что-то похожее на атомы-крючочки Эпикура. Во время полного отдыха мозга эти атомы неподвижны, они как будто бы прикреплены к стене; этот полный отдых может продолжаться неопределенное время, атомы при этом не встречаются и, следовательно, никакое их сочетание не может осуществиться». Процесс исследования проблемы состоит в том, что приводятся в движение идеи, причем не любые, но лишь те, с помощью которых мы надеемся получить желаемое решение. Может случиться, что эта работа не дает непосредственного результата. «Считают, что не сделано ничего хорошего, так как эти элементы передвигали тысячами различных способов с целью найти возможность их сочетать, а удовлетворительной комбинации найти не удалось». Но, видимо, на самом деле все происходит так, как если бы атомы были брошены, как снаряды, разлетаясь в пространстве во всех направлениях. «После того импульса, который им был сообщен по нашей воле, атомы больше не возвращаются в свое первоначальное неподвижное состояние. Они свободно продолжают свой танец».

Можно теперь предвидеть последствия: «атомы, приведенные в движение, начинают испытывать соударения и следовательно, образовывать сочетания друг с другом или с теми атомами, которые ранее были неподвижны и были задеты при их движении». В этих новых комбинациях, в этих косвенных результатах нашей предшествовавшей сознательной работы заложены возможности вдохновения, которое кажется спонтанным.

Логика и случай

Хотя Пуанкаре считает это сравнение очень грубым — и это не могло быть иначе — оно оказывается на самом деле глубоко поучительным.

Мы сейчас увидим, что, следуя ему, мы сможем разъяснить другие вопросы. Рассмотрим, например, с этой точки зрения вопрос о роли логики и случайности в открытии, вопрос, по которому мнения различных авторов расходятся особенно сильно. Некоторые из них, не заходя так далеко, как Николь, настаивают на важности случая, в то время как другие подчеркивают приоритет логики. Из двух психологов, которых мы упоминали в начале книги, Полан принадлежит ко второй категории, а Сурио к первой. На основании самонаблюдения мне кажется, что мы сможем достигнуть хорошего понимания вопроса, если используем сравнение Пуанкаре с брошенными атомами. Это сравнение я дополню, приравнивая это бросание к стрельбе из охотничьего ружья; известно, что хорошие охотничьи патроны имеют желаемое рассеивание: если рассеивание слишком большое, прицеливаться бесполезно, но если оно

недостаточно, слишком много шансов промахнуться. Мне кажется, что в нашем случае обстоятельства совершенно аналогичны.

Снова сравним идеи с атомами Пуанкаре: может случиться, что мозг их бросает точно или почти точно в некоторых определенных направлениях. Поступая таким образом, мозг имеет то преимущество, что количество счастливых встреч между этими идеями будет сравнительно высоко по отношению к количеству встреч с бесплодными идеями; но можно опасаться того, что эти встречи будут недостаточно различны между собой. Напротив, может случиться, что атомы брошены достаточно беспорядочным образом; в этом случае большинство встреч будут неинтересными, но, с другой стороны, как в лотерее, этот беспорядок может иметь высокую ценность, так как те редкие встречи, которые окажутся полезными, будут исключительной природы, и поскольку они происходят между идеями, которые кажутся очень далекими друг от друга, они могут оказаться наиболее ценными.

Сурио выражает это удивительно верной фразой: «Чтобы изобрести, нужно думать около»; и даже в математике — хотя в этой области эта фраза имеет несколько иное значение, чем в экспериментальных науках, — мы можем вспомнить заявление Клода Бернара: «Те, кто непомерно верят в свои идеи, плохо вооружены, чтобы делать открытия».

Ошибки и провалы

Различия между смыслом, который принимают слова Бернара в математике и в экспериментальных науках, состоит в том, что если в этом последнем случае слишком упрямо следовать одной идее, то это может привести к ошибке, т. е. к неточным выводам.

Напротив, в нашей области у нас нет необходимости настаивать на ошибках. Когда их делают хорошие математики — что не так редко — они вскоре это замечают и исправляют. Что касается меня (а мой случай — это случай многих математиков), то я их делаю гораздо чаще, чем мои ученики, но я их всегда исправляю так, что не остается никакого следа в конечном результате. В самом деле, когда допущена ошибка, то пронизательность — та самая научная чувствительность, о которой мы говорили — предупреждает меня, что мои вычисления не имеют того вида, который они должны были бы иметь.

Здесь, однако, имеются известные исключения, касающиеся некоторых деликатных сторон рассуждения; и они могут иногда оказаться более глубокими, чем точные результаты, как, например, недостаточное доказательство «Принципа Дирихле» у Римана.

Но в обеих областях, математической и экспериментальной, то, что недостаточно следует принципу «думать около», является одной

из наиболее обычных причин неудачи — когда не находят решения, которое мог бы найти более вдумчивый мыслитель, — неудачи, которая для психологии по меньшей мере столь же интересна, сколь и открытие.

Этим, в частности, объясняются неудачи, которые можно назвать «парадоксальными», — когда мыслитель не замечает непосредственного и важного следствия своих собственных выводов.

Естественно, мы должны подчеркнуть, что речь идет лишь о непосредственных и очевидных следствиях. Если же тот, кто сделал открытие, узнает, что из его открытия кто-то другой нашел важное следствие, требующее определенного усилия, он станет это рассматривать не как неудачу, а как успех: он имеет право сказать, что есть и его вклад в это новое открытие.

На коллоквиуме, о котором мы уже упоминали, Клапаред рассказал о ряде парадоксальных промахов, и, по-моему, они должны быть объяснены так, как мы только что об этом говорили. Наиболее поразительный случай, который он приводил, касается изобретения офтальмоскопа. Физиолог Брюкке искал средство для освещения глазного дна, что ему и удалось сделать. Но лишь Гельмгольцу, подготавливавшему доклад о результате Брюкке, пришла идея о том, что оптические изображения могут быть порождены лучами, отраженными таким же образом от сетчатки, — идея почти очевидная, так что казалось, что Брюкке не мог ее не заметить. Мне кажется очевидным, что в данном случае мысль Брюкке была слишком сильно сконцентрирована на его проблеме.

Клапаред рассказывает также о том, как деля Рив не заметил метода гальванопластики, а Фрейд прошел мимо применения кокаина для хирургии глаза.

Личные случаи

Каждый автор может, вероятно, рассказать об аналогичных своих неудачах. Что касается меня, то я несколько раз не видел результатов, из-за, должно быть, какого-то ослепления, так как они были непосредственными следствиями результатов, которые я получил. Причина большинства таких промахов все та же, а именно, слишком концентрированное внимание.

Первый случай, который я вспоминаю из своей жизни, касался формулы, которую я получил в самом начале моей исследовательской работы; я решил ее не публиковать и добиться вывода из нее важных следствий. В это время все мои мысли, как и мысли многих аналитиков, были прикованы к единственному вопросу: доказательству знаменитой «теоремы Пикара». Полученная мною формула давала совершенно

очевидно один из результатов, который я открыл четырьмя годами позднее гораздо более сложным путем; и я не отдавал себе в этом отчета, пока через много лет Иенсен не опубликовал эту формулу и не отметил, как ее непосредственное следствие, результаты, которые я, к счастью для моего самолюбия, уже получил в этот промежуток времени. Ясно, что в 1888 г. я думал исключительно о теореме Пикара.

Следующая моя работа была моей диссертацией. Две теоремы, важные для темы¹, были такими очевидными и непосредственными следствиями идей, содержащихся в работе, что позднее другие авторы мне их приписывали, и я был вынужден признаваться, что как бы очевидны они ни были, я их не видел.

Несколькими годами позднее я занимался обобщением на гиперповерхности классического понятия кривизны поверхности. Мне нужно было определить понятие кривизны поверхности в римановых пространствах, — обобщение более элементарного понятия кривизны поверхности в обычном пространстве. Мне хотелось получить эту кривизну Римана как кривизну некоторой поверхности S , проведенной в рассматриваемом пространстве, причем форма этой поверхности выбрана таким образом, чтобы кривизна оказалась минимальной. Я сумел показать, что полученный таким образом минимум был в точности выражением Римана; но, думая над этим вопросом, я не обратил внимания на обстоятельства, при которых достигается этот минимум, т. е. на то, как для достижения этого минимума построить S . Изучение этого вопроса привело бы меня к принципу «абсолютного дифференциального исчисления», открытие которого принадлежит Риччи и Леви-Чивита.

Абсолютное дифференциальное исчисление находится в тесной связи с теорией относительности; и по этому поводу я должен признаться, что, увидев, что уравнение распространения света инвариантно относительно некоторой группы преобразований (известных теперь под названием преобразований Лоренца), в которую входят пространство и время, я прибавил, что «такие преобразования явно лишены физического смысла». А эти преобразования, которые я считал лишенными физического смысла, составляют основу теории Эйнштейна!

Продолжая разговор о моих промахах, я отмечу еще один, о котором я особенно сожалею: речь идет о знаменитой задаче Дирихле, которую я в течение многих лет пытался решать тем же методом, который избрал Фредгольм, а именно, сводя ее к системе с бесконечным числом

¹Для специалистов: 1. «Если коэффициенты ряда Маклорена являются действительными положительными числами и радиус сходимости равен R , то $x = R$ должна быть особой точкой». 2. «Для ряда Маклорена с конечным радиусом сходимости, вообще говоря, вся окружность круга сходимости является существенно особой линией».

уравнений первой степени с бесконечным числом неизвестных. Но физическая интерпретация, гид, вообще говоря, очень верный и часто мне помогавший, на этот раз сбила меня с пути. Она мне подсказывала необходимость искать решение проблемы, используя «потенциал простого слоя», что в этом случае было тупиком, в то время как надо было искать решение, вводя «потенциал двойного слоя». Это показывает, насколько справедлива фраза Клода Бернара, цитированная выше: не надо слишком упорно следовать определенному принципу, каким бы плодотворным и справедливым он, вообще говоря, ни был.

Как мы видим, во всех этих примерах причина промаха в своей основе одна и та же. Обратное произошло, когда я однажды не заметил, что одна из задач «аналлагматической геометрии» могла быть неопределенной, что привело к интересным свойствам, открытым Андре Блоком¹. На этот раз я не следовал строго выбранному первоначально направлению, что привело бы меня к более глубокому исследованию решенной задачи и, следовательно, к тому, чтобы отметить ее возможную неопределенность. Этот случай в точности противоположен предыдущим: я был недостаточно верен своей основной идее.

Я должен закончить перечисление этих промахов случаем, который я совершенно не могу объяснить: каким образом, найдя метод для построения условий разрешимости задачи из теории уравнений в частных производных², который очень сложным и запутанным образом привел к искомому результату, я не увидел в моих собственных вычислениях деталь, которая освещала всю задачу, и оставил это открытие более счастливым и вдумчивым последователям? Это мне трудно постичь.

Случай Паскаля

Вероятно, многие исследователи, если не все, могут припомнить аналогичные случаи. Утешительно думать, что то же самое может произойти и с самыми великими.

В своем произведении «Искусство убеждать» Паскаль выдвинул принцип, методологически фундаментальный не только в математике, но и в любой дедуктивной задаче и в любом рассуждении, а именно: «Заменять то, что определено, его определением».

С другой стороны, дальше он подчеркивает очевидный факт, что как невозможно все доказать, так же и по тем же причинам невозможно

¹Французский математик (André Bloch). — *Прим. ред.*

²Для специалистов, см. стр. 351–355 моих «Лекций о задаче Коши» («Leçons sur le Problème de Cauchy», Yale).

Улучшенное решение дано в «Методах математической физики» Гильберта и Куранта, на базе работ Джона и Асгейрсона.

все определить. Существуют первоначальные понятия, которые определить нельзя.

Если бы ему только пришло в голову расположить рядом эти два тезиса, он бы очутился перед основным противоречием и, следовательно, перед великой проблемой Логики, которая приводит к необходимости аксиоматических определений (что придает знаменитому постулату Евклида его действительное значение); этим была бы совершена глубокая революция во всей логике — революция, которую Паскаль, следовательно, мог бы осуществить тремя веками раньше, чем это действительно случилось. Но он не сопоставил эти две идеи. Мы, вероятно, никогда не узнаем, было ли это потому, что его мысли были слишком интенсивно сконцентрированы на теологических следствиях, как в этом меня убеждал один мой друг.

Попытки управлять бессознательным

Рассмотренные примеры показывают нам, что для исследователя может быть вредным слишком рассеивать свое внимание, хотя излишняя концентрация внимания в определенном направлении также может быть пагубной для открытия.

Что мы можем сделать, чтобы обойти эти две противоположные трудности?

Естественно, большое значение имеет то, в каком направлении мы ведем подготовительную работу, дающую в свою очередь толчок работе бессознательного; и действительно, особенно в свете концепции Пуанкаре, это может рассматриваться как способ воспитывать наше бессознательное мышление. Формулу Сурио: «Чтобы изобретать, нужно думать около», надо понимать в этом смысле.

Но это еще не является достаточным: поступая таким образом, мы будем размышлять «около» определенных, предвиденных направлений, но не «около» непредвиденных, которые именно по этой причине наиболее интересны. В связи с этим мы должны заметить, что для того, кто хочет творить, важно не замыкаться лишь в одном разделе науки, а держаться в курсе других.

Можем ли мы найти другие методы влиять на свое бессознательное? Это имело бы большое значение не только для изобретательства, но и для всей жизни, в частности, для воспитания. Изучение этого вопроса, которое заслуживает продолжения, было предпринято журналом «Психология и жизнь»¹. Один выпуск в 1932 г. со статьями нескольких авторов был полностью посвящен этому вопросу. В частности, Двельшауверс (Dwelshauvers) указывает на необходимость анализа условий,

¹La Psychologie et la vie (фр.)

в которых произошло изучаемое событие, как, например, час дня, когда оно произошло, сколько времени прошло между сознательной подготовкой и решением, длится ли такая инкубация часы или дни, пропорциональна ли ее продолжительность трудности вопроса и т. д.

В ожидании результатов такого изучения можно использовать следующее, очевидно полезное правило: работая над некоторыми вопросами и не видя возможности продвинуться, работу прекращают и пытаются заняться другим вопросом с намерением возобновить прежнюю работу через несколько месяцев. Это правило полезно сообщить каждому начинающему исследователю.

Можно ли лучше познать бессознательное? Я слишком мало знаю психоанализ, чтобы судить, каковы здесь его возможности (естественно, речь идет о действительно научном познании).

С другой стороны, существует ли состояние человека, в котором можно было бы заставить говорить бессознательное? Некоторые считают, что таково положение при гипнозе. Если это серьезно, чего я не знаю, то стоило бы поставить опыт на крупных математиках, предложив им в состоянии гипноза проблему, решение которой неизвестно (например, одну из тех, о которых мы говорим в гл. VIII). Если бы они нашли при этом решение, то доказали бы одновременно данную теорему и такое действие гипноза.

ДАЛЬНЕЙШАЯ СОЗНАТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Четвертый этап

С помощью Гельмгольца и Пуанкаре мы научились теперь различать следующие три этапа изобретательского творчества: подготовка, инкубация и озарение. Но Пуанкаре показывает необходимость и важность четвертого и последнего этапа, который вновь является сознательным процессом. Это новое выступление сознания после бессознательной работы необходимо не только ради очевидной цели изложить устно или письменно полученные результаты, но еще по трем мотивам, которые, впрочем, сильно связаны между собой.

1) Для проверки результатов. Чувство абсолютной уверенности, сопровождающее вдохновение, обычно соответствует действительности; но может случиться, что оно нас обманывает¹. Поэтому здесь нужна проверка с помощью нашего, так сказать, настоящего разума — задача, решение которой является сознательным процессом.

2) Для их «завершения», т. е., чтобы точно выразить полученные результаты. Как указывает Пуанкаре, «бессознательное» нам никогда не дает полностью и в законченном виде результатов достаточно длинного вычисления. Если бы в отношении к бессознательному мы придерживались первоначальной идеи «автоматизма», который ему приписывают, мы должны были бы предположить, что думая об алгебраическом вычислении перед сном, мы могли бы надеяться к моменту пробуждения найти результаты совершенно готовыми; но этого не случается никогда, и мы теперь начинаем понимать, что автоматизм бессознательного не должен пониматься таким образом. Напротив, настоящие вычисления, требующие дисциплины, внимания и воли (и, следовательно, сознательного состояния), зависят от второго этапа сознательной работы, который следует за вдохновением.

Мы приходим, таким образом, к заключению, кажущемуся парадоксальным (к которому, впрочем, нужно будет сделать поправку, как

¹ Пуанкаре замечает, что у него это случилось чаще всего с идеями, приходящими «утром или вечером в постели, в полусонном состоянии».

мы это делали в случае Ньютона), а именно, что вмешательство воли, т. е. одного из высших качеств нашей души, происходит в достаточно механической части работы, там, где она в некотором роде подчинена бессознательному, хотя и проверяет его. Вторая операция неотделима от первой, от проверки. Сознание выполняет их одновременно.

Рассказ Поля Валери

То, что мы только что видели в области математических исследований, в частности эта координация работы «завершения» с первоначальным вдохновением, снова согласуется с тем, что говорит Поль Валери по поводу изобретения совершенно иного рода (разве что это описание Валери показывает, что факты могут быть еще более сложными и деликатными, чем их считает он сам или Пуанкаре, и заслуживают еще более глубокого изучения). Поль Валери говорит в докладе¹, который мы уже цитировали (гл. I, стр. 17): «Есть период темной фотокамеры: здесь нет энтузиазма, так как вы можете при этом испортить вашу фотопластинку, нужно иметь реактивы, нужно работать, как будто вы являетесь служащим у самого себя. Хозяин снабдил вас вспышкой, вы должны с помощью ее что-нибудь получить. Любопытно, что за этим может последовать разочарование. Случаются обманчивые проблески: пересматривая полученные результаты, хозяин замечает, что это не было плодотворно; было бы очень хорошо, если бы это оказалось верно. Иногда вмешивается серия суждений, которые аннулируют друг друга. Наступает в некотором роде состояние раздражения: кажется, что никогда не сможешь записать то, что ты обнаружил».

Эта стадия «завершения» при изобретении является опять-таки вполне общим фактом, ее наблюдали даже наиболее «спонтанные» творцы. Тот же Ламартин, который как мы видели, писал очень быстро, без колебания, и почти невольно, когда у него просили несколько строк помногу раз и неумолимо исправлял свои работы, как это видно по его рукописям.

Вычислители-феномены

В одном случае, который часто путают со случаем математиков, процесс протекает несколько иначе: я хочу сказать о тех феноменальных вычислителях — часто не имеющих никакого образования — которые могут очень быстро делать очень сложные подсчеты, как, например, перемножать числа с десятью и более цифрами, и которым

¹ *Bulletin Soc. Philosophie*, t. 28 (1928), p. 16.

требуется лишь мгновение на раздумье, чтобы сообщить вам, сколько минут или секунд прошло с начала нашей эры.

Такой талант в действительности отличен от математических способностей. Кажется, очень немногие из известных математиков им владели: известны примеры Гаусса и Ампера, а также в XVII в. Валлиса. Пуанкаре признается в том, что он плохой вычислитель, и то же самое я могу сказать о себе.

Исключительные вычислители, часто имеют замечательные психологические особенности¹. Особенность, которую я хочу отметить, потому что она относится к нашей теме, состоит в том, что в отличие от только что сказанного Пуанкаре, случается, что результаты вычисления (или, по крайней мере, частичные результаты) у них возникают безо всякого сознательного усилия, по вдохновению, «сработанному» в бессознательном.

Может быть, самым искренним свидетельством этого является письмо, адресованное вычислителем Ферролем Мёбиусу² «Когда мне ставили трудный вопрос, то ответ на него появлялся немедленно, так что я сначала даже не знал, каким образом он получен. Исходя из результата, я затем искал метод, с помощью которого можно его получить. Любопытно, что эти интуитивные представления ни разу не привели к ошибке и развивались по мере надобности. Даже теперь у меня часто бывает ощущение, что кто-то, стоящий рядом со мной, нашептывает мне способ найти желаемый результат, и притом способ, который до меня использовали очень немногие, и который я бы никогда не открыл, если бы искал сам.

Часто, особенно когда я один, мне кажется, что я нахожусь в другом мире. Числовые идеи кажутся мне живыми. Проблемы самых разных жанров неожиданно предстают перед моими глазами со своими ответами».

Надо добавить, что Ферроль увлекался не только числовыми вычислениями, но также, и даже в еще большей мере, вычислениями алгебраическими. Это тем более удивительно, что и в этом случае он доводил расчеты до их эффективного завершения бессознательным образом³.

¹Отметим такую любопытную особенность: у некоторых из них эта способность была временной и исчезла спустя несколько лет.

²См. "Die Anlage zur Mathematik", p. 74–76.

³Вмешательство бессознательных процессов в численные расчеты отмечали также Scripture. *American Journ. of Psych.*, tome IV (1891). См. также книги Бинэ «Психология великих вычислителей» и «Игроки в шахматы». (Binet "Psychologie des Grands Calculateurs" и "Joueurs d'Échecs").

Но эти свидетельства не столь позитивны и точны, как свидетельство Ферроля, и возможно смешение частичных результатов, полученных бессознательно, и результатов, заранее выученных на память.

Оценка собственной работы

Как мы относимся к результату, который мы получили? Очень часто исследование, которое меня глубоко интересовало в то время, когда я им занимался, теряет свой интерес сразу же после того, как я нашел решение — к несчастью, в момент, когда я должен его редактировать. Через некоторое время, скажем через два месяца, я могу его оценить более объективно.

Тот же вопрос был задан Полю Валери на собрании Философского общества в Париже; он ответил: «Это всегда плохо оборачивается, я „отчуждаюсь“». И, как мы это видели (стр. 47), описывая процесс изобретения, он сделал аналогичное замечание.

3) Продолжение работы. Результаты-эстафеты. Двойная работа проверки и «завершения» результата принимает другой смысл, когда мы рассматриваем этот результат, как это часто случается, не как конец исследования, но только как некоторый этап (мы находим последовательные этапы такого рода в рассказе Пуанкаре), иными словами, когда мы размышляем о возможности его использования.

Эта возможность требует, чтобы работа была не только проверена, но чтобы она была «уточнена». Действительно, так как мы знаем, что наша бессознательная работа, показывая нам путь для получения результата, не дает нам точного его выражения, то может случиться (и фактически это случается часто), что некоторые свойства этого точного выражения, которые мы не могли полностью предвидеть, оказывают существенное и даже решающее влияние на продолжение работы.

Так было в случае первого этапа в работе Пуанкаре (хотя не было в последующих). Он нам сообщает, что первоначально предполагал, что функции, которые он называл автоморфными, не могли существовать, и только обратный вывод, полученный в результате бессонной ночи, дал его мыслям направление, которое они приняли впоследствии.

Тот закон, что каждая планета вращается вокруг Солнца потому, что она притягивается к нему силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, был открыт Ньютоном как интерпретация двух первых законов Кеплера. Но имеется коэффициент пропорциональности — отношение между силой притяжения и величиной, обратной квадрату расстояния; значение этого коэффициента не меняется во время движения, и его величина должна выводиться из третьего закона Кеплера, который касается сравнения движения различных планет. Вывод таков, что этот коэффициент одинаков для всех планет: все планеты подчиняются одному и тому же закону притяжения; этот вывод не является

следствием более широкого подхода к проблеме, а вытекает лишь из точного и внимательного расчета. Сомнительно, чтобы Ньютон пришел к последнему выводу иначе, как с пером в руке. Итак, если бы результаты этих подсчетов различались, то последний этап открытия, тот, который отождествляет силу, поддерживающую Луну во время ее вращения вокруг Земли, с силой, которая заставляет падать весомое тело (яблоко, если мы будем следовать легенде), этот последний этап не имел бы места.

Может быть, неосторожно представлять себе ход рассуждений, протекающих в голове Ньютона, но можно отметить, что отождествление, которое он сделал, требовало проверки не только алгебраической, но и численной, с использованием получаемых наблюдением оценок порядков величин, входящих в формулы (проверки, которая, как известно, одно время считалась Ньютоном ошибочной). Если же, говоря строго, можно усомниться в этом примере, то имеются другие примеры, совершенно неоспоримые. Например, ясно, что Георг Кантор не мог предвидеть результат, о котором он сам говорил: «Я его вижу, но я ему не верю».

С другой стороны, как бы то ни было, но дальнейшее развитие изобретения, как и вначале, требует проведения подготовительной работы, о которой мы уже говорили. После того, как некоторая стадия исследования закончена, следующая требует нового толчка, который может быть рожден и направлен лишь тогда, когда мы сознательно и точно воспринимаем первый результат.

Возьмем достаточно обычный пример: каждый понимает, что при пересечении двух параллельных прямых двумя параллельными получаются отрезки, попарно равные; каждый знает это, сознательно или нет. Но до тех пор, пока это не высказано сознательно, отсюда нельзя получить никаких следствий, например, подобия.

Возможно, что новая часть исследования будет результатом исключительно сознательной работы, как об этом рассказывает Пуанкаре (точнее, сказал бы я, результатом сознательной работы при сотрудничестве краевого сознания); или, более того, как в примере с Ньютоном, эта часть исследования может заслуживать и требовать длительной систематической сознательной работы. Чтобы это заметить, требуется новое усилие нашей воли, и точное выражение полученного ранее результата является для этого весьма существенным.

Итак, каждый этап исследования должен как бы сочлениваться со следующими этапами с помощью результата, выраженного в точной форме, который я предложил бы назвать результатом-эстафетой (или формулой-эстафетой, если это формула, как в ньютоновской интерпретации третьего закона Кеплера). Когда удается

достигнуть такого сочленения, аналогичного стыковке путей на развилке железной дороги, нужно решить, в каком направлении должно продолжаться исследование. Здесь эти разветвления ясно показывают направляющее действие того сознательного «я», считать которое низшим по отношению к бессознательному мы могли бы быть склонны.

Сделанные выше замечания могут показаться до некоторой степени очевидными и даже ребяческими; но бесполезно заметить, что они нам помогают понять не только процессы, происходящие в уме любого исследователя, но и общую структуру математики. Ее продвижение вперед было бы невозможным не только без проверки результатов, но особенно без систематического использования того, что мы только что назвали результатами-эстафетами, которые очень часто используются настолько, насколько это возможно, вплоть до их крайних следствий. Такова, например, роль простого и классического факта, что, пересекая треугольник прямой, параллельной одной из его сторон, получают другой треугольник, подобный данному — факт, очевидный сам по себе, но который должен быть строго сформулирован, чтобы дать длинный ряд свойств, которые из него вытекают.

ОТКРЫТИЕ КАК СИНТЕЗ. ПОМОЩЬ ЗНАКОВ

Синтез в открытии

Поль Сурио пишет¹: «Знает ли алгебраист, что происходит с его идеями, когда с помощью знаков он их вводит в свои формулы? Прослеживает ли он за ними на протяжении всех этапов, которые он осуществляет? Без сомнения, нет. Он их тотчас же теряет из поля зрения. Он заботится лишь о том, чтобы упорядочивать и комбинировать, в соответствии с известными правилами, материальные знаки, находящиеся у него перед глазами; и он принимает полученный результат как вполне надежный».

В своих исследованиях математики видят вещи под иным, во многом, углом зрения. Не то, чтобы утверждение Сурио было полностью ошибочным. Можно грубо считать его верным применительно к конечному этапу проверки и «завершения», о котором уже говорилось в предыдущей главе; но даже в этом случае не все происходит так, как он это говорит. Математик не оказывает такого слепого доверия результатам, полученным на основании известных правил; он знает, что ошибки в вычислениях возможны и даже часты. Если целью вычисления является проверка результата, который предвидело бессознательное или подсознательное, и если эта проверка не удалась, то нисколько не исключено, что первый подсчет ошибочен, а вдохновение право.

Если же применить это рассуждение не к финальной фазе, а к исследовательской работе вообще, то поведение, описанное Сурио, является поведением ученика (и даже довольно плохого). Действительный ход мысли при построении математического рассуждения надо, скорее, сравнить с процессом; о котором мы упоминали в гл. II, а именно, с узнаванием чужого лица. Промежуточный случай, иллюстрирующий аналогию этих двух процессов, дает изучение психологии шахматистов некоторые из которых способны играть одновременно десять или двенадцать партий, не видя шахматных досок. Рядом исследователей, в

¹ «Théorie de l'Invention», p. 127.

частности Альфредом Бинэ¹, проводились специальные исследования с целью понять, как это происходит. Результаты этих исследований можно резюмировать так: для многих из этих шахматистов каждая партия имеет свое лицо, которое позволяет ему думать о ней как о чем-то едином, как бы сложна она не была, точно так же, как мы видим лицо человека в целом.

Такое же явление обязательно происходит при изобретениях любого вида. Мы это видели в письме Моцарта (гл. I); подобные заявления были сделаны такими художниками, как Энгр и Роден (их цитирует Анри Делакруа, «Изобретение и гений»). Но тогда как Моцарт, любимец муз, не нуждается, кажется, ни в малейшем усилии, чтобы представить себе свое произведение как единое целое, Роден пишет: «Нужно, чтобы до конца своей работы, он (скульптор) энергично удерживал в полном свете своего сознания свою идею ансамбля с тем, чтобы непрерывно пополнять ее мельчайшими деталями своего произведения и увязывать их с нею. И без очень напряженного усилия мысли дело идет плохо».

Точно так же, всякое математическое рассуждение, как бы сложно оно ни было, должно мне представляться чем-то единым; у меня нет ощущения, что я его понял, до тех пор, пока я его не почувствовал как единую, общую идею. И, к сожалению, это часто требует от меня, как и от Родена, более или менее мучительного усилия мысли.

Использование знаков

Исследуем теперь вопрос, который, как я намерен показать, имеет отношение к предыдущему: помощь, оказываемая мысли конкретными представлениями. Такое исследование, принадлежащее к области прямого самонаблюдения, возможно лишь благодаря тому краевому сознанию, которое мы упоминали в конце гл. II. Вместе с тем мы увидим, что основные результаты этого исследования, вероятно, применимы и для исследования глубоко бессознательных процессов, хотя последние нам прямо и неизвестны.

Слова и мысли без слов

Наиболее классическим типом знаков, которые могут кооперироваться с мыслями, являются слова. Мы здесь находимся перед любопытным вопросом, мнения по которому являются совершенно различными.

¹См., например, статью А. Binet. *Revue des Deux Mondes*, série 3, tome 117 (mai-juin 1893), p. 826–859, и особенно гл. IV.

Впервые я обратил внимание на этот вопрос, когда в 1911 г. я прочел в «Le Temps»¹: «Идея может быть понята лишь с помощью слов и существует лишь с помощью слов»². У меня сложилось твердое впечатление, что идеи редактора по рассматриваемому вопросу были довольно посредственными.

Но еще более поразительным для меня было узнать, что такой известный филолог и востоковед, как Макс Мюллер, утверждает³, что никакая мысль невозможна без слов⁴, и даже написал следующую фразу, совершенно непонятную для меня: «Как мы знаем, что небо существует и что оно голубое? Знали ли бы мы небо, если бы не было для него названия?» И он не только вместе с Гердером допускает, что «без языка человек никогда не мог бы достигнуть своего разума», но он также прибавляет, что без языка человек не мог бы никогда обладать даже чувствами. Разве глухонемые лишены всех чувств?

Это заявление Макса Мюллера является тем более любопытным, что он заявляет, что в том факте, что мысль невозможна без слов, он находит аргумент против всякой теории эволюции, доказательство, что человек не мог произойти ни от какого животного. Но со значительно большим основанием заявление Макса Мюллера можно было бы повернуть против него самого принимая во внимание, например, книгу Кёлера «Mentality of Apes»⁵ и действия его шимпанзе, действия, которые подтверждают их способность к рассуждениям.

Макс Мюллер дает исторический обзор мнений, высказанных по вопросу об использовании слов в мышлении (из которого мы проанализируем наиболее существенные); обзор этот не лишен интереса, во-первых, сам по себе и затем в связи с той точкой зрения, которую он защищает. Мы там, например, находим, что первоначально греки использовали одно и то же слово *logos* для обозначения разговорного языка и мысли, и только позднее стали различать эти два понятия разными эпитетами — и Мюллер, естественно, заявляет, что сначала их побуждения были правильнее, чем в конце.

¹«Время» — французская газета тех лет. — *Прим. ред.*

²Точно так же однажды на бакалорiate по философии в Париже была дана следующая тема (тема, достойная сожаления, насколько я могу судить): «Показать, что язык нам столь же необходим для мышления, как и для передачи наших мыслей».

³Max Müller “Three Introductory Lectures on the Science of Thought”, London, 1887; см. также более полный его труд “The Science of Thought”, опубликованный в том же году.

⁴Весьма вероятно, что безграничное доверие Макса Мюллера к словам вытекает из его работы как лингвиста, которой он посвятил всю свою жизнь.

⁵Köhler “Mentality of Apes”, N. Y., 1923; см., например, эксперимент с шарнирно-сочлененной палкой.

Схоластики средних веков подобным же образом (что, может быть, в природе вещей) ведут себя по отношению к этому началу греческой философии. Абельяр заявлял в XII веке: «Речь порождена интеллектом и порождает интеллект». Аналогичное мнение выражал и более современный философ Гоббс, который обычно симпатизировал схоластам.

Но, как правило, благодаря потоку идей, идущих от Декарта, взгляды людей по этому, как и по многим другим вопросам, оказываются иными. В Германии был лишь один период около 1800 г. (Гумбольдт, Шеллинг, Гегель, Гердер), когда философские умы были близки к «правде» (т. е. к мнению Макса Мюллера). Гегель коротко замечает: «Мы думаем словами» — как будто бы никто никогда не подвергал это сомнению.

Но другие великие философы нового времени не так уверены в идентичности речи и разума. Действительно, самые значительные среди них — идет ли речь о Локке и Лейбнице или даже о Канте и Шопенгауэре и более близком к нам Джоне Стюарте Милле — согласны между собой в своих сомнениях. Это не значит, что Лейбниц не думает словами, но он признается в этом с явным сожалением¹. Философ Беркли абсолютно категоричен, но в обратном смысле: он убежден, что слова — большой тормоз мысли.

Пылкость, с которой Макс Мюллер защищает свою точку зрения, приводит его к тому, что это общее поведение современных мыслителей он начинает называть «отсутствием смелости» (в то время как всякий другой назвал бы это научной осторожностью), — как будто бы никакого искреннего мнения, отличающегося от его, быть не может.

Приемлемо ли оно для него или нет, но оно существует. Как только он опубликовал свои «Лекции о мышлении», поднялись протесты, идущие со всех сторон². Прежде всего, раздался авторитетный голос первоклассного мыслителя Франсиса Гальтона, выдающегося генетика, который, начав как путешественник, выпустил, кроме всего прочего, важное произведение по психологическим вопросам. Большая привычка к самонаблюдению, которую он имел, позволила ему утверждать, что его ум никогда не работал в соответствии с тем стандартом, который Макс Мюллер считает единственным. Играет ли Гальтон в бильярд и рассчитывает траекторию бильярдного шара, или изучает вопросы, более возвышенные и более абстрактные, его мысли никогда не сопровождаются словами.

¹ «Диалог о соотношении между мыслями и словами»: «Меня сильно смущает (Noscunt me male habet) то, что я никогда не могу узнать, открыть или доказать никакой истины, не используя в уме слов или других вещей».

² См. обмен письмами в конце «Introductory Lectures».

Гальтон прибавляет, что иногда в процессе его рассуждений случается, что он слышит аккомпанемент слов, лишенных смысла, «как мелодия песни может сопровождать мысль». Естественно, слова, лишенные смысла, являются вещью совершенно иной, чем реальные слова; мы увидим позднее, с какого вида образами их можно разумно сравнить.

Эта склонность ума Гальтона не лишена для него неудобства; вот что он пишет: «Тот факт, что я не могу свободно думать словами, является для меня серьезной помехой, когда я что-либо пишу; еще более, когда я объясняюсь. Часто случается, что после того, как я долго работал и достиг результатов, которые для меня совершенно ясны и удовлетворительны и которые я хочу выразить словами, я должен настраивать себя в совершенно другом интеллектуальном плане. Я должен перевести свои мысли на язык, который дается мне нелегко. Я теряю много времени, отыскивая подходящие слова и фразы, и я отдаю себе отчет, что, когда мне приходится выступать без подготовки, меня часто трудно понять из-за такой неуклюжести речи, а отнюдь не из-за неясности моих представлений. Это одна из наибольших неприятностей в моей жизни».

Я хотел воспроизвести полностью это заявление Гальтона, потому что в его случае я узнаю свой собственный, включая досадное следствие, из-за которого я переживаю то же, что и он.

Тот факт, что Макс Мюллер не может вспомнить молнию, не подумав о ее названии, не означает, что «мы» неспособны это сделать. Что касается меня, то когда я вспоминаю молнию, я вижу мысленно ее вспышку, которую я наблюдал много раз, и мне потребовалось бы мгновение размышления — короткое, конечно, но обязательно мгновение — если бы я пожелал вспомнить соответствующее слово. В точности так же, как для Гальтона, такой перевод мысли на язык требует от меня всегда более или менее напряженного усилия. Являются ли стихи Буало:

«То, что верно понято, ясно произносится,

И слова для этого рождаются легко»

справедливыми по отношению к другим людям или нет, верно то, что они не таковы для меня. У меня для этого есть осязаемое доказательство — я бы мог сказать «объективное» — то что мне трудно прочесть лекцию на любую тему, кроме математической, если я не написал ее целиком — единственный способ избежать постоянного и мучительного колебания в выражении мыслей, которые для меня совершенно ясны.

Гальтон справедливо замечает, насколько странно то, что Макс Мюллер совершенно неспособен понять, что другие умы отличны от его; ошибка эта является очень общей, но поразительно обнаружить

ее у человека, привыкшего к психологическим исследованиям. Например, как мы только что видели, различия между умами неоспоримы, поэтому этот вопрос следовало бы решать не полемикой, а с помощью анкет, обращенных к каждой человеческой расе и ко всем возможным классам людей (мы увидим, что в этом могут встретиться трудности), а не только к людям умственного труда. Гальтон, собиравший информацию, насколько ему это позволяли обстоятельства, рассказывает, что он обнаружил некоторый (впрочем, незначительный) процент людей, обычно думающих без помощи слов, произносимых или не произносимых. Можно удивиться, что Гальтон, так хорошо знающий статистические операции, не дает точного процента; но ниже мы приведем возможное объяснение¹.

Образы в повседневном мышлении

Мысль может сопровождаться другими конкретными образами, нежели слова. Аристотель считал, что мы не можем думать без образов. Тэн в своем известном произведении «Об уме» уделяет особое внимание роли образов в выработке идей, образов, которые он определяет в начале тома II как повторные ощущения, живучие и внезапно появляющиеся. Тем не менее, сейчас считают, что он преувеличил эту роль и приписал ей слишком исключительное значение.

Приблизительно в ту же эпоху Альфред Бинэ сделал важный шаг в изучении этого вопроса, занимаясь им экспериментально². Он исследовал около двадцати человек, но особо тщательно были исследованы две девочки-подростка из его собственной семьи (в возрасте 13 и 14 лет), чья ценная помощь в столь нежном возрасте в таких тонких психологических исследованиях особенно замечательна. Иногда он их подвергал опытам в чистом виде, но чаще всего опытам в сочетании с самонаблюдением. Например, ставя вопрос или произнося слово, он спрашивает, какие идеи, представления и т. д. им внушает эта тема. Такой метод был подвергнут критике, и действительно он вызывает возражение, которое можно выдвинуть против почти всех видов психологических опытов, а именно, что возможно невольное внушение, исходящее от самого экспериментатора. Но этого не следует опасаться, если результаты оказываются совершенно неожиданными, каковыми были некоторые из результатов Бинэ. По существу метод Бинэ рассматривается

¹Гальтон в “Inquiries into Human Faculties” проводил интерпретировавшиеся по правилам статистики опросы относительно роли воображения, которое рассматривалось само по себе. Нам следовало бы теперь провести подобный опрос о роли воображения в качестве помощника мышления.

²“Etude Expérimentale de l'Intelligence”, 1903.

психологами как эффективный, несмотря на указанное выше и аналогичные возражения, так как Бюлер (Bühler) дал убедительные ответы на эти возражения¹; позднее подобный метод был использован в так называемой Вюрцбургской школе. Но фактически его создатель Бинэ.

В опытах Бинэ вопрос о словах был затронут лишь попутно. Ответ в данном случае в пользу Гальтона, а не Макса Мюллера. Одной из девочек² ответ в словах представляется как «образ, который прерывает мысль». Мысль же является ей внезапно, как и все виды чувств.

Более неожиданным является то, что даже вмешательство образов уменьшено до минимума, в противоположность теории Тэна. Точность ответа поразительная³: «Для того, чтобы у меня появились образы, нужно, чтобы мне не о чем было думать. Они (мысли и образы) отделены друг от друга и никогда не приходят вместе. У меня никогда не бывает образов, когда какое-либо слово внушает мне очень много мыслей. Нужно, чтобы я подождала немного. Когда у меня исчерпаются все мысли по поводу этого слова, появляются образы; если-мысли приходят снова, образы стираются, и наоборот».

По этому поводу сам Бинэ заключает: «Позднее я мог убедиться, что Арманд права. Я допускаю, что существует некоторый антагонизм между образом и мышлением, особенно когда образ очень яркий. Самые красивые образы возникают в мечтах и снах». Он отмечает также факт, замеченный Гальтоном и другими, что у женщин и детей больше красивых образов, чем у взрослых мужчин, которые сильнее в рассуждениях.

Последующие опыты Двельшауверса⁴, проведенные на студентах, привели к тем же основным выводам об условиях появления образов, что и опыты Бинэ. Он констатирует, что образы появляются лишь тогда, когда мы представляем нашим идеям неконтролируемую свободу, то есть когда мы грезим наяву. Как только возвращается сознание, образы слабеют, меркнут; кажется, что они уходят в какую-то неизвестную область.

Умственные образы при концентрированном мышлении

Проблемой слов и образов в мышлении занимались более современные авторы (Делакруа, Джеймс Анджелл, Титченер, Варендонк и др.). Но большинство из их произведений нас непосредственно не касается из-за одного отличия, которое особенно существенно для нашей темы.

¹Bühler. *Archiv f. die Ges. Psych.*, t. IX (1907); t. XII (1908), особенно стр. 92–123. См. также G. Dumas “*Traité de Psychologie*”, t. I, chap. 4.

²“*Etude Expérimentale de l'Intelligence*”, p. 107.

³Там же, стр. 124.

⁴Dwelschauvers “*Les Mécanismes Subconscients*”.

Психологи различают два вида мысли. Есть «свободная» мысль, когда мы предоставляем нашим мыслям возможность блуждать, не направляя их к определенной цели; и есть мысль «контролируемая», когда направление задано¹. Этот второй термин не является достаточно точным для нашей цели. У мысли есть направление уже тогда, когда спрашивают, какой сегодня день; но случай изобретательской мысли явно от этого отличается. Она требует некоторого концентрированного усилия; она не только контролируема, она сконцентрирована.

Нет никаких оснований считать, что процессы при этих трех видах мышления одинаковы; и действительно они таковыми не являются. Но только третий случай касается нас непосредственно.

Точка зрения Бинэ

Резюмируя свои опыты, Бинэ склоняется к выводу², что слова или чувственные образы могут быть полезными для того, чтобы придать точную форму чувствам или мыслям, которые без их помощи оставались бы слишком туманными; или даже для того, чтобы мы имели возможность полностью осознать мысль, которая без этого оставалась бы бессознательным актом ума; кроме того, они используются для перехода идей из области бессознательного в сознание, точнее, из бессознательного, где они расплывчаты, в сознание, где они уточняются.

Одно время я был склонен принимать концепцию Бинэ. Действительно, она до некоторой степени удовлетворяла двойному условию, кажущемуся противоречивым:

а) что помощь образов абсолютно необходима для сопровождения моей мысли;

б) что образы никогда не вводят меня в заблуждение и я не боюсь, что это произойдет.

Но последующие рассуждения привели меня к другой концепции. Действительно, опыты Бинэ или Двельшауверса не соответствуют тому случаю, который мы рассматриваем: они касаются контролируемой, но не концентрированной мысли. Двум девочкам ставят вопросы типа: «Что вам приходит в голову, когда вы думаете о том, что делали вчера?» Наиболее трудный вопрос, который я видел в книге Бинэ, был следующим: «Подумайте, что бы вы предпочли делать, если бы могли остаться на три часа одна и совершенно свободной в своих действиях?»

¹R. S. Woodworth "Psychology", стр. 33, 4-го издания. Однако Вудворт говорит здесь о случае, когда задается трудный вопрос, что, скорее, соответствует нашей третьей категории концентрированной мысли, чем мысли просто контролируемой.

²"Etude Expérimentale de l'Intelligence", p. 108.

Личные наблюдения

Случай исследовательской работы является, естественно, совершенно иным, поэтому я хотел понять, что же происходит в моем уме, когда я начинаю строить или понимать математическое рассуждение (я сказал вначале, что существенной разницы между этими двумя вещами нет).

Я утверждаю, что слова полностью отсутствуют в моем уме, когда я действительно думаю, и что я полностью отождествил бы свой случай и случай Гальтона в том смысле, что когда я услышу или прочитаю вопрос, все слова исчезают точно в тот момент, когда я начинаю думать; слова появляются в моем сознании¹ только после того, как я окончу или заброшу исследование, точно так же, как и у Гальтона, и я полностью согласен с Шопенгауэром, когда он пишет: «Мысли умирают в тот момент, когда они воплощаются в слова».

Я думаю, что существенно также подчеркнуть, что я веду себя так не только по отношению к словам, но и по отношению к алгебраическим знакам. Я их использую, когда я делаю простые вычисления; но каждый раз, когда вопрос кажется более трудным, они становятся для меня слишком тяжелым багажом: я использую в таком случае конкретные представления, но они совершенно другой природы.

Пример такого типа известен в истории науки, он был дан Эйлером, чтобы объяснить шведской² принцессе свойства силлогизмов. Эйлер представляет общие идеи кругами; если мы должны думать о двух категориях вещей A и B так, что каждая вещь A есть B , мы представляем себе круг A внутри круга B . Если, напротив, никакой элемент A не B , мы представляем себе круг A целиком вне круга B ;

¹Вполне возможно, и даже весьма вероятно, что слова присутствуют в крайнем сознании. Во всяком случае, я думаю, что так бывает со мной, когда я занимаюсь математикой. Но я сомневаюсь, что так же обстоит дело и для процессов мышления в других отраслях науки, так как тогда бы я сумел найти подтверждение этому. Происходит очевидная путаница по существу вопроса, когда, приведя высказывание Уильяма Гамильтона, который замечает, — что «знание формируется раньше, чем мы его можем выразить с помощью символов», так что идея должна обязательно предшествовать словам — Макс Мюллер заявляет, что в этом он с ним согласен (sic), так как из этого заявления Уильяма Гамильтона можно сделать вывод, что мысль и ее обозначение «почти совпадают» по времени. Хотя я являюсь случайным человеком в психологии, я ее знаю достаточно для того, чтобы понять, что умственные процессы часто протекают очень быстро, и было бы абсурдным изучать их, не различая явлений «почти совпадающих» и одновременных. Более того, Уильям Гамильтон очень ярко выразил свой взгляд на вопрос, прибавив: «Таким образом, речь является не матерью, а крестной мысли».

²Автор здесь имеет в виду рассуждения Эйлера в «Письмах к немецкой (не шведской!) принцессе» — *Прим. ред.*

если же, наконец, лишь некоторые элементы A суть B , то два круга должны пересекаться.

Итак, если я должен думать о каком-нибудь силлогизме, я о нем думаю не словами — слова мне не позволили бы понять, правилен ли силлогизм или ложен, — а с помощью интерпретации, аналогичной интерпретации Эйлера, пользуясь, однако, не кругами, а какими-то пятнами неопределенной формы, так как для того, чтобы представлять себе эти пятна находящимися одно внутри или вне другого, я не должен их видеть имеющими строго определенную форму.

Чтобы рассмотреть несколько менее тривиальный случай, возьмем элементарное и хорошо известное доказательство теоремы: «Последовательность простых чисел не ограничена». Я повторю последовательные этапы классического доказательства этой теоремы, записывая рядом с каждым из них соответствующий образ, возникающий в моем мозгу. Например, нам нужно доказать, что существует простое число, большее 11:

Этапы доказательства	Мои умственные образы
Я рассматриваю все простые числа от 2 до 11, то есть 2, 3, 5, 7, 11.	Я вижу неопределенную массу.
Я образую их произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = N$.	Так как N — число достаточно большое, я представляю себе точку, достаточно далеко удаленную от этой массы.
Я прибавляю к этому произведению 1 и получаю $N+1$.	Я вижу вторую точку, недалеко от первой.
Это число, если не является простым, должно иметь простой делитель, который и является искомым.	Я вижу некоторое место, расположенное между неопределенной массой и первой точкой.

Какая может быть польза от такого странного и неопределенного представления? Оно, конечно, не используется здесь для того, чтобы напомнить мне какое-нибудь свойство делимости, так как всякая информация, данная таким образом, могла бы оказаться неточной и сбить меня с пути. Этот механизм удовлетворяет, таким образом, условию б), поставленному выше. Наоборот, это условие лишь частично выполняется при гипотезе Бинэ: уточнить бессознательные идеи всегда связано с риском их исказить.

Но в то же время можно легко понять, почему мне мог быть необходим механизм такого типа для понимания доказательства, приведенного выше. Он мне необходим для того, чтобы единым взглядом охватить все элементы рассуждения, чтобы их объединить в одно целое — наконец, чтобы достичь того синтеза, о котором мы говорили в начале этой главы, и чтобы придать проблеме свое лицо. Этот механизм не раскрывает мне ни одного звена в цепи рассуждения (т. е. не содержит

никаких свойств делимости или простых чисел), но он мне напоминает о том, как эти звенья должны быть соединены. Если мы еще раз обратимся к сравнению Пуанкаре, то скажем, что это представление необходимо для того, чтобы не потерять уже полученные полезные комбинации.

Фактически всякое математическое исследование принуждает меня строить аналогичную схему, которая всегда носит и должна носить неопределенный характер, чтобы не сбить с пути. Я приведу менее элементарный пример, взятый из моих ранних исследований (поя диссертация): я должен был рассмотреть сумму бесконечного числа слагаемых и оценить порядок ее величины. Итак, когда я обдумываю этот вопрос, я вижу не собственно формулу, а место, которое она бы занимала, если бы ее написали: нечто вроде ленты, более широкой или более темной в местах, соответствующих членам, которые могут оказаться существенными, или же я вижу нечто вроде формулы, прочесть которую, однако, невозможно, как будто бы я смотрю без очков (у меня сильная дальновзоркость), причем в этой формуле буквы немного более отчетливы в местах, которые предполагаются более важными (хотя их также невозможно прочесть).

Друзья мне говорили, что у меня был особый взгляд, когда я занимался математическими исследованиями. Я не сомневаюсь, что это явление сопровождается, прежде всего, построение требуемой схемы.

Сказанное имеет отношение к вопросу об умственной усталости. Я спросил у нескольких известных психологов, и в частности у Луи Лалика, каким образом умственная работа может вызывать утомление, хотя никакая «работа» (в том смысле, какой физик придает этому слову) при этом, видимо, не производится. Мнение Лалика в то время было таково, что умственная работа может быть сравнена лишь с процессом переворачивания страниц книги. Итак, умственная работа существует; с объективной и физиологической точек зрения она была изучена в важной книге Бинэ и Виктора Анри; с тех пор по этому вопросу должен был быть достигнут большой прогресс, за которым я не уследил. С точки зрения психологической можно с уверенностью утверждать, что усталость определяется синтезирующим усилием (как мы это видели у Родена) в смысле придания исследованию единства и, следовательно, по крайней мере в моем случае, усилие расходуется на то, чтобы выработать соответствующую схему.

Можно добавить несколько замечаний.

Если бы я использовал черную доску и написал бы выражение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, то схема, описанная выше, исчезла бы из моего рассудка, так как стала бы, очевидно, бесполезной и была бы автоматически заменена формулой, которую я имел бы перед глазами.

Должен заметить, что я принадлежу полностью к слуховому типу¹, и именно поэтому мои умственные представления являются исключительно визуальными. Причина этого для меня совершенно ясна: визуальные представления этого вида являются, естественно, более неопределенными, и мы видели, что это является необходимым условием для того, чтобы руководить моим сознанием, не сбивая на ложный путь.

Я добавлю также, что случай, который мы только что исследовали, касается, прежде всего, изучения теории чисел, алгебры или анализа. Когда я занимаюсь геометрическими исследованиями, мне представляется обычно вид самой фигуры, хотя и в неадекватной или неполной форме; это представление позволяет мне, однако, осуществить необходимый синтез — тенденция, которая, как мне кажется, является результатом тренировки, полученной в раннем детстве.

Как бы это ни казалось парадоксальным, но очень часто для решения этих геометрических задач я успешно использую процесс, совершенно противоположный синтезу, о котором я говорил выше. Случается, что я выделяю отдельную часть фигуры и рассматриваю ее независимо от остального; это рассмотрение приводит меня к «результату-эстафете». Тем не менее, общее рассуждение даже в этом случае ощущается как единое целое, как синтез, в который включается и промежуточный результат, если он существует. Этот процесс, как утверждает Пьер Бутру², ссылаясь на Декарта, часто применялся в греческой геометрии.

Взаимоотношения полного и краевого сознания

Наблюдения, которые мы только что сделали, касаются функционирования мысли, когда она интенсивно концентрируется, идет ли речь о полностью сознательной работе или о подготовительной сознательной работе. Но, как мы это заметили в конце гл. II, та же самая концентра-

¹У меня очень плохая память на лица и я часто не узнаю людей или ошибаюсь, узнавая их; к звучанию названий, напротив, я очень чувствителен; и повидать такие реки как Мохок (Mohawk) и Маттавамкег (Mattawamkeag) мне хочется гораздо больше, чем этого заслуживает их красота, так как одни их названия рождают в моем воображении представление о лесах и жизни индейцев. Я меньше, чем другие люди, замечаю сходство в лицах, и более чувствителен к сходству голосов.

Многочисленные ошибки при машинальных записях происходят из-за слухового воображения (см. гл. II, стр. 21). Примеры такого рода являются классическими. Лично со мной это случается часто: в моем сознании возникает слово, которое я бессознательно пишу вместо другого, если они похожи по звучанию. Так, когда я писал эту книгу на английском языке, я часто писал: *simple* вместо *same* *place* и *will she* вместо *we shall*. Я думаю, что ошибки такого типа случаются чаще, когда я пишу по-английски, чем когда я пишу по-французски, что вполне естественно.

²Бутру не дает, однако, точной ссылки.

ция позволяет нам различать полное сознание и сознание краевое; это различие достаточно трудно уловить при других обстоятельствах, но в этом случае оно относительно легко поддается наблюдению.

Что дают наблюдения относительно описанного выше феномена?

Априори можно предположить, что звенья рассуждения существуют в полном сознании, в то время как соответствующие представления вырабатываются в подсознании. Мои личные наблюдения с неизбежностью приводят меня к противоположному заключению: в фокусе моего сознания проходят последовательные образы, или, точнее, общий образ; сами же рассуждения ожидают, так сказать, в прихожей (см. стр. 23), чтобы быть введенными лишь в начале стадии «завершения».

Этот случай очень ясно иллюстрирует природу и роль краевого сознания, которое находится, так сказать, на службе у полного сознания, готовое появиться каждый раз, когда в нем возникает необходимость.

Другие стадии исследования

Что происходит во время периода инкубации, когда действуют более глубокие слои бессознательного? Естественно, мы не располагаем прямым ответом, но есть все основания предполагать, что и в данном случае работает аналогичный механизм, поскольку он, видимо, наилучшим образом может удовлетворить двойному условию а) и б) (стр. 59), которое должно быть выполнено.

Уатт¹ отмечал, что образ и его значение должны быть частично связаны и в то же время независимы. Мне кажется, что такой тип одновременной взаимосвязи и независимости объясняется вмешательством краевого сознания.

Затем следует этап проверки и «завершения». На этом окончательном этапе я могу использовать алгебраические знаки; но достаточно часто я их не использую общепринятым и нормальным образом. Я не трачу времени на то, чтобы полностью записывать уравнения — моя единственная забота состоит в том, чтобы увидеть, так сказать, какой вид они имеют. Эти уравнения (или некоторые из их членов) часто бывают расположены весьма странным образом, как актеры на сцене, благодаря чему они мне «говорят», пока я продолжаю их рассматривать. Но если, после перерыва в работе, я рассматриваю эти каракули на следующий день, то они «мертвы» для меня. Обычно мне остается лишь бросить лист и начать все сначала, если только накануне я не получил одну или две формулы, которые я полностью проверил и которые я могу использовать как формулы-эстафеты.

¹Watt. *Archiv f. die Ges. Psych.*, t. 4 (1904); см. также G. Dumas "Traité de Psychologie", t. I, chap. 4.

Что касается слов, то они полностью отсутствуют в моем мозгу до того момента, когда я начинаю сообщать эти результаты в устной или письменной форме или (очень редко) как результаты-эстафеты; в этом последнем случае они могут играть, как заметил Уильям Гамильтон, роль посредника, «необходимого, чтобы придать стабильность нашему умственному процессу, чтобы сделать из каждого нашего шага новую отправную точку для дальнейшего движения вперед» — в чем Гамильтон прав, с той лишь оговоркой, что эту роль может играть не любой результат-эстафета¹.

Другая концепция

Узнав немного о школе бихевиористов, я заинтересовался, какой точки зрения они придерживаются по вопросу, который мы обсуждаем, и согласны ли они с моими наблюдениями. Мне кажется, что с точки зрения бихевиоризма мышление словами не является необходимым, но, с другой стороны, наши мысли могли бы «состоять» из мускульных движений, как, например, пожиманий плечами, движений век или глаз и т. д.

Я не могу припомнить движений такого рода во время моей исследовательской работы. Естественно, я не могу наблюдать свои движения, будучи глубоко погружен в работу, но свидетели моей частной жизни и работы могут подтвердить, что никогда не видели ничего подобного. Они лишь замечали «отсутствующий» взгляд, который у меня часто бывает, когда я напряженно работаю. Я могу лишь сказать, что не представляю себе такого типа движений, которые могли бы мне помочь иметь ясную точку зрения на ход более или менее сложных рассуждений; в то время как мы видели, что умственные образы, наоборот, явно способны помочь этому.

Анкета среди математиков

По этому вопросу было бы естественно опросить математиков. К сожалению, я не мог опросить французских математиков, так как занялся

¹ Уильям Гамильтон использует интересное сравнение: строительство тоннеля в песчаной почве. «При этом нельзя добиться успеха, если не укреплять каждый метр, нет, каждый сантиметр каменной кладкой, прежде чем продолжать дальнейшую выемку. И речь в процессе мышления является тем же, чем каменная кладка при строительстве тоннеля. Умение думать и умение копать не зависят от слов, в первом случае, и от каменной кладки — во втором; но без этих вспомогательных процессов мы остались бы на стадии примитивных попыток».

Вообще говоря, только что описанная зависимость демонстрирует то, что было названо результатом-эстафетой. В процессе изобретения они не обязательно включают в себя слова.

этой проблемой лишь после отъезда из Европы (эта книга была написана в 1943–1944 гг.).

Для математиков, которых я опросил в Америке, явления в большинстве своем аналогичны тем, которые я заметил на собственном опыте. Практически все — в противоположность заключению Гальтона, к которому его привел опрос случайных людей — избегают не только мысленного употребления слов, но так же, как и я, мысленного употребления точных алгебраических или других знаков; как и я, они используют расплывчатые образы. Имеется два или три исключения, самым важным из которых является математик Джордж Биркгофф, один из наиболее выдающихся во всем мире, который имеет привычку представлять себе математические знаки и мысленно с ними работать. Норберт Винер отметил, что ему случается думать и со словами, и без слов. Джесси Дуглас обычно думает без слов и алгебраических знаков; в конце работы его мысль связывается со словами, но лишь с их ритмом, в результате чего получается своего рода азбука Морзе, где отчетливо лишь число слогов. Конечно, это не имеет ничего общего с тезисом Макса Мюллера и скорее похоже на употребление Гальтоном слов без смысла.

Естественно, я опросил и одного из самых авторитетных ученых нашей эпохи — профессора Эйнштейна¹. Вот его ответ:

«В этом письме я пытаюсь кратко и по мере моих сил ответить на ваши вопросы, но я сам не удовлетворен своими ответами...

Слова, написанные или произнесенные, не играют, видимо, ни малейшей роли в механизме моего мышления. Психическими элементами мышления являются некоторые, более или менее ясные, знаки или образы, которые могут быть «по желанию» воспроизведены и скомбинированы.

Существует, естественно, некоторая связь между этими элементами и рассматриваемыми логическими концепциями. Ясно также, что желание достигнуть в конце концов логически связанных концепций является эмоциональной базой этой достаточно неопределенной игры в элементы, о которых я говорил. Но с психологической точки зрения эта комбинационная игра, видимо, является основной характеристикой творческой мысли — до перехода к логическому построению в словах или знаках другого типа, с помощью которых эту мысль можно будет сообщать другим людям.

Элементы, о которых я только что говорил, у меня бывают обычно визуального или изредка двигательного типа. Слова или другие услов-

¹ Полный текст письма Эйнштейна в русском переводе напечатан в «Эйнштейновском сборнике», М., 1967. — *Прим. ред.*

ные знаки приходится подыскивать (с трудом) только во вторичной стадии, когда эта игра ассоциаций дала некоторый результат, и может быть при желании воспроизведена.

Из того, что я сказал, ясно, что игра в элементы нацелена на аналогию с некоторыми разыскиваемыми логическими связями».

Что касается «обычного» мышления, то профессор Эйнштейн объясняет, что его образы являются «зрительными или двигательными. На том этапе мышления, когда слова почти не появляются, образы являются чисто слуховыми, слова же, как я уже говорил, появляются лишь во второй стадии...». Он оканчивает свое письмо словами: «Мне кажется, что то, что вы называете полным сознанием, является лишь предельным случаем, который полностью никогда не осуществляется. Мне это кажется связанным с явлением, которое называют узостью сознания (*Enge des Bewusstseins*)».

И он прибавляет следующее замечание: «Профессор Макс Вертгеймер пытался проводить опрос по поводу различия между комбинированием или ассоцированием воспроизводимых элементов и пониманием (*organisches Begreifen*); я не могу судить, в какой мере его психологический анализ затрагивает существо вопроса»¹.

Случай Г. Пойя — я намерен говорить только о людях, сделавших безусловно важные открытия — совершенно другой. Чтобы закончить работу, он использует слова: «Я думаю, — писал он мне, — что решающая идея, которая приводит к решению проблемы, достаточно часто бывает связана с хорошо выбранным словом или фразой. Слово или фраза проясняет ситуацию, или, говоря вашими словами, дает вещам облик. Они могут немного предшествовать решающей идее, или следовать за ней непосредственно, или могут появиться одновременно с ней... Точное слово, тонко подобранное, помогает восстановить математическую идею, может быть менее полно и менее объективно, чем чертеж или математическая запись, но аналогичным образом... Это может способствовать тому, что оно останется связанным с идеей». Более того, он считает, что удачное обозначение — т. е. удачно выбранная для обозначения математической величины буква — может ему принести подобную же помощь и что некоторые каламбуры, плохие или хорошие,

¹Как видно, мыслительные процессы профессора Эйнштейна в общем аналогичны процессам, описанным в гл. VI, но естественно, что некоторые детали носят специфический характер. Наиболее существенное и замечательное различие связано с последним вопросом, оно касается роли краевого и полного сознания. Профессор Эйнштейн ссылается на «узость сознания»: тема, которую мы обсудили бы в гл. II, если бы не боялись зайти слишком далеко; этот вопрос исследуется в «Психологии» Уильяма Джеймса (гл. XIII, стр. 217 и следующие).

Было бы интересно сравнить идеи Макса Вертгеймера (связанного со школой гештальт-психологии) не только со сказанным в гл. VI, но и с первой частью гл. VII.

также могут быть полезными для этого. Например, преподавая в одном из Швейцарских университетов на немецком языке, Пойя обращал внимание своих студентов, что буквы *Z* и *W* являются начальными буквами немецких слов «Zahl» (число) и «Wert» (значение), и точно означают роли, которые *Z* и *W* должны играть в излагаемой им теории.

Случай Пойя мне кажется совершенно исключительным (я встречал еще лишь один такой случай среди тех, кто мне ответил)¹. Но даже Пойя не использует слов как эквивалентов идеям, так как он использует одно-единственное слово или одну-две буквы, чтобы символизировать всю линию мысли; его психологический процесс перекликается с заявлением Стенли²: «Если речь играет роль указателя (индикатора), то она может это делать, лишь внушая нашему сознанию предмет, мысль или чувство, хотя практически этот предмет может появляться в наиболее обобщенной и наименее осознанной форме».

Мысленные образы математиков, от которых я получил ответы, чаще всего бывают зрительными, но они могут быть также и другого типа, например, двигательными. Могут быть и слуховые образы; но даже в этом случае, как это показывает пример Дугласа, они сохраняют свой неопределенный характер³. Для Купмана «образы имеют скорее символическую, чем изобразительную связь с рассматриваемыми математическими идеями» — заявление, аналогичность которого со сказанным выше очевидна. Наблюдения профессора Купмана сходны с моими и в том, что такие образы возникают в полном сознании, тогда как соответствующие рассуждения временно остаются в «прихожей».

То же самое мы можем сказать и о наблюдениях Рибо⁴, собранных им во время опроса математиков. Некоторые из них говорили, что думают чисто алгебраическим образом, с помощью знаков; другие в с е г д а нуждаются в «геометрическом представлении», «построении», даже если они его рассматривают как простую «фикцию».

Некоторые идеи Декарта

В «Правилах для руководства ума», где во второй половине (начиная с 14-го правила) исследуется роль воображения в науке, Декарт как

¹ Аналогичным описанному является случай профессора Шевалле.

² Psychological Review v. 4 (1891), p. 71. Стенли (Stanley) говорит там в основном о поэтическом творчестве, где роль слов очевидно больше, чем в любом другом изобретательском процессе.

³ Один из профессоров Колумбийского университета мне написал, что у него математические раздумья сопровождаются обычно визуальными изображениями и почти никогда никакими словами, кроме тех, которые выражают удивление, раздражение, экзальтацию и т. д.

⁴ Th. Ribot "Evolution des Idées Générales", p. 143.

будто имеет в виду процессы, аналогичные тем, о которых мы говорили. По крайней мере, это можно заключить на основании анализа «Правил», сделанного П. Бутру¹. Например, по Бутру, Декарт считает, что «воображение само по себе неспособно создать науку... Тем не менее..., мы должны в некоторых случаях прибегать к нему. Прежде всего, фиксируя его на объекте, который мы хотим рассмотреть, мы ему помешаем запутаться или стеснять нас; затем, и что особенно важно, оно может пробудить в нас некоторые идеи». Далее: «Воображение будет особенно полезно, когда нужно решить задачу не посредством одной простой дедукции, но с помощью нескольких, не связанных между собой, результаты которых нужно сперва полностью перечислить, а затем согласовать. В самом деле, при этом нам более чем когда-либо будет необходима память в той или другой форме, чтобы помочь нам пересмотреть и связать уже полученные различные элементы доказательства, с тем чтобы вынести из них искомое общее решение; нам она будет необходима также для того, чтобы сохранить исходные данные задачи, если мы не воспользовались вначале всеми этими данными: мы могли бы их забыть, если бы не сохраняли постоянно в голове образа предмета, о котором мы рассуждаем, образа, который предоставляет их нам в любой момент».

Это та же роль образов, о которой мы говорили выше. Но Декарт не доверяет этому вмешательству воображения и желает полностью исключить его из науки. Он даже упрекает древнюю геометрию за его использование. Он хочет исключить воображение из всех отраслей науки, сводя их все к математике (что он безуспешно пытался сделать), так как математика более, чем всякая другая наука, состоит из абстракций.

Чтобы понять, как мы должны расценивать такую идею, мы должны лишь вспомнить, как эта программа Декарта применяется современными математиками.

Прежде всего, как хорошо известно, геометрия может быть полностью сведена к числовым комбинациям с помощью аналитической геометрии, созданной самим Декартом. Но, с другой стороны, мы только что видели, что рассуждения в области теории чисел, по крайней мере для многих математиков, чаще всего могут сопровождаться образами.

Недавно знаменитым математиком Гильбертом на совершенно другой основе была дана более строгая трактовка принципов геометрии, которые, рассуждая логически, были освобождены от всякого обращения к интуиции. Начало этой работы стало теперь классическим для математиков: «Рассмотрим три системы предметов. Мы назовем

¹Pierre Boutroux "L'Imagination et les Mathématiques selon Descartes", tome 10, 1900, p. 11, 18.

т о ч к а м и предметы, составляющие первую систему; п р я м ы м и — составляющие вторую, и п л о с к о с т я м и — третью»; эта редакция ясно означает, что мы не должны никоим образом задаваться вопросом, что могут представлять из себя эти «предметы».

Логически ясно — и это самое существенное, — что поставленная задача полностью достигнута и всякое вмешательство геометрического смысла исключено. Так ли обстоит дело с психологической точки зрения? Конечно, нет. Нет никакого сомнения, что Гильберт, создавая свои «Основания геометрии», постоянно руководствовался своим геометрическим смыслом. Если кто-нибудь стал бы в этом сомневаться (чего не случится ни с одним математиком), то достаточно ему лишь мельком просмотреть книгу Гильберта. Фигуры появляются почти на каждой странице; они не помешают читателям-математикам подтвердить, что, рассуждая логически, ни один из конкретных образов не является необходимым¹.

Здесь снова речь идет о том случае, когда автор руководствуется образами, не полагаясь на них, и это вновь оказывается возможным (по крайней мере для меня) благодаря разделению труда между собственно сознанием и сознанием краевым².

Декарт осуждает также обычай греческих геометров (см. выше) рассматривать отдельно какую-то часть той или иной фигуры. Нет никакого основания для такой критики. Мы находим здесь то же самое смешение процессов психических и логических. Рассматриваемый метод не угрожает строгости рассуждения, как и образ, упомянутый выше, не мешает доказательству того факта, что простые числа образуют неограниченную последовательность.

Другие мыслители

Мы имеем мало сведений по этому вопросу из других нематематических областей знания. Любопытно, что, согласно уже цитированной работе Бинэ (стр. 127–129), даже в «свободном» мышлении неопределенные образы могут возникать как представители более точных идей.

¹ Как замечает Клейн, тот факт, что мы рассуждаем об угле в одну миллионную секунды, в то время как мы совершенно неспособны различить две стороны такого угла, является парадоксальным; и обсуждение этого парадокса Винтером (Winter "Revue de Métaphysique et de Morale", 1908, p. 323), одним из философов, которые лучше других разбираются в научных вопросах, показывает аналогию между этим обстоятельством и наблюдениями, которые мы приводим здесь.

² Другой пример, который мы увидим в гл. VII (см. сноску на стр. 81) проиллюстрирует это еще ярче и более убедительно. При разборе этого примера из гл. VII не возникает никакого сомнения (по крайней мере у меня) по поводу способа, которым производится разделение работы.

Примером, аналогичным только что данному описанию, является пример экономиста Сидгвика (Sidgwick), о котором он сам рассказал на Международном конгрессе экспериментальной психологии в 1892 г. Его рассуждения по экономическим вопросам почти всегда сопровождались образами: «Образы бывали часто совершенно произвольные и иногда с почти необъяснимым значением. Например, мне понадобилось много времени, чтобы понять, что странный символический образ, сопровождавший слово «стоимость», был частью расплывчатого изображения человека, кладущего что-то на весы». Очень любопытные явления, согласно Юлиусу Балью, происходят также у композиторов¹ некоторые из них в своем первоначальном замысле видят свои творения в зрительной форме (то, что Балью называет Tonvision). Один из них чувствует, не имея ни малейшего точного музыкального представления, «основную линию и важнейшие свойства своей музыки. С другой стороны, трудно сказать, до какой степени музыка отсутствует в этой формальной схеме»².

Я опрашивал лишь нескольких человек, из других отраслей умственной деятельности. Их ответы различны, и я не могу утверждать, что результаты не могут отличаться от тех, которые мы здесь приводим³.

Несколько ученых мне говорили о мысленных образах, совершенно аналогичных описанным выше. Например⁴, профессор Леви-Стросс, когда думает над трудным вопросом, касающимся его этнографических исследований, видит, как и я, неопределенные схематические образы, которые обладают, кроме того, замечательным свойством быть трехмерными. Несколько химиков, будучи опрошенными, также ответили, что думают абсолютно без слов, с помощью мысленных образов.

Мозг психолога Андре Майера ведет себя совершенно другим образом: он мне говорил, что мысль ему приходит в совершенно сформулированном виде, так что ему не требуется никакого усилия, чтобы ее записать.

Было бы интересно узнать, как ведут себя в этом смысле врачи во время такого трудного акта, как установление диагноза. Я имел

¹ Julius Bahle "Der Musikalische Schaffensprozess", Hirzel Leipzig, 1936. Цитируется по книге Henri Delacroix "L'Invention et le Génie", p. 520.

² Один художник мне говорил, что на первой стадии работы его визуальные представления являются произвольно расплывчатыми.

³ Аристид Бриан, по словам одного из его ближайших сотрудников, часто имевшего возможность видеть его за работой, не думал словами, когда готовил свои речи. Слова появлялись в тот момент, когда их надо было произносить.

Конечно, стоило бы узнать мнение крупных представителей таких профессий, которым при работе приходится следить за всем ансамблем и за каждой деталью одновременно, например мнение крупных дирижеров.

⁴ Это также случай профессора Романа Якобсона (см. стр. 76).

возможность спросить об этом одного из наиболее известных медиков; он ответил, что думает в этих случаях без помощи слов, хотя и использует слова в своих теоретических и научных исследованиях.

Тип мышления, кажущийся сперва очень странным, был открыт психологом Рибо¹, который встречал его чаще, чем этого можно было бы ожидать: он называет это «визуальным типографским типом». Этот тип мышления состоит в том, что идеи предстают в форме соответствующих напечатанных слов. Первое открытие, которое сделал по этому поводу Рибо, касалось человека, которого он характеризует как хорошо известного физиолога; для этого человека слова «собака», «животное» (он жил среди собак и ежедневно ставил на них опыты) не сопровождались никакими образами, но он их видел напечатанными. Точно так же, когда он слышал имя близкого друга, он его видел напечатанным, и ему нужно было сделать усилие, чтобы увидеть лицо этого друга. Так же было со словами «вода», «углекислый газ» или «водород»; его рассудок видел напечатанными либо их название, либо их химический знак, Рибо был очень удивлен этим заявлением, в искренности и точности которого он не мог сомневаться, но позднее он заметил, что этот случай не был единственным, и что подобное явление встречается у многих людей.

Более того, по Рибо, люди, принадлежащие к этому типу типографского видения, не могут представить, что мысль других людей может протекать по-другому.

Это то же состояние ума, которое мы уже заметили у Макса Мюллера, когда дело касалось более общего способа мышления словами. Этот случай является действительно поразительным, особенно, когда мы его встречаем у людей, привыкших к обсуждению философских вопросов. Как нам удивляться, что людей сжигали на костре из-за расхождений во взглядах по теологическим вопросам, когда мы видим, что такой крупный ученый, как Макс Мюллер в связи с безобидным психологическим вопросом употребляет презрительные слова по адресу своего старого учителя Лотце, так как тот написал, что логическое значение данного предложения не зависит от формы записи, в которой оно выражено?².

¹ «L'Evolution des Ideés Générales», p. 143.

У Жана Перрена, по словам его сына, возникали образные изображения типографского типа. Франсис Перрен думает обычно без слов, но время от времени какое-то слово у него появляется. У Сидгвика идеи возникали в типографском представлении, когда он думал не над экономическими, а над математическими или логическими вопросами.

² Макс Мюллер соглашается, что «при некотором усилии» он может представить себе ход мысли такого явного противника, как Беркли и понять некий «вид философской галлюцинации», говоря его словами. Но он не может понять того мнения, что большинство, а не все наши мысли выражаются в словах, или

Таким образом, мы вовлечены здесь в обсуждение раздела психологии, весьма далекого от предмета нашего изучения. Некоторые части этой главы можно было бы назвать «Случай психологического непонимания».

Это далеко не единичный пример того, что: 1) психология различных индивидов может существенно различаться; 2) в этом случае одному, быть может, почти невозможно понять состояние рассудка другого¹.

Лишено ли неудобств мышление словами?

Разумеется, я должен опасаться того же отсутствия понимания. Конечно, я должен засвидетельствовать, что не понимаю, как возможны типографское или какое-нибудь другое словесное видение, и я с трудом могу себе помешать думать словами Гёте:

«Denn wo Begriffe fehlen,
Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein».²

Но я не могу забывать о том, что такие люди, как Макс Мюллер и другие, не из посредственностей, думают именно так, хотя я и не могу их понять.

что б о л ь ш и н с т в о, а не все люди думают словами. Тот факт, что некоторые из великих авторов говорят об этом не из-за «отсутствия смелости», а потому что так оно и есть, явно выше его понимания.

¹Сколь парадоксальным это ни является, есть два примера такого же типа из области математики. За несколько лет до первой мировой войны один математический вопрос, связанный с метафизикой, вызвал в нашей среде оживленные споры, особенно между мной и одним из моих лучших и наиболее уважаемых друзей, крупным ученым Лебегом. Мы вынуждены были констатировать, что по-разному понимаем очевидность — эту отправную точку уверенности в мышлении всякого рода. Но, естественно, мы не стали презирать друг друга только из-за того, что мы поняли невозможность взаимопонимания.

Второй пример касается теории множеств. Когда в 1879–1884 гг. Георг Кантор опубликовал свои результаты по этой теории (являющейся теперь одной из основ современной науки), один из этих результатов казался настолько парадоксальным и меняющим наши основные понятия, что он вызвал решительную недоброжелательность Кронекера, одного из ведущих математиков того времени. В связи с этим Кронекер даже помешал Кантору получить новый пост в немецких университетах, и ни одно из его произведений не появлялось в немецкой периодике. Нужно ли говорить, что доказательство этого результата является столь же ясным и строгим, как и всякое другое математическое доказательство, и не дает никаких оснований оспаривать его.

²Ибо, где не хватает понятий, там вовремя словечко вставят. См. «Фауст», ч. 1, пер. Б. Л. Пастернака, где эти строки переданы так:

Бессодержательную речь
Всегда легко в слова облечь. — *Прим. ред.*

В связи с этим я сожалею, что Рибо не опубликовал имя физиолога, о котором он говорит, и что поэтому мы не в состоянии составить себе мнение о ценности его труда.

Для тех из нас, кто не думает с помощью слов, основная трудность в понимании тех, кто думает словами, состоит в том, что мы не понимаем, как они могут быть уверены в том, что не введены в заблуждение словами, которые они используют (см. условие б) стр. 59).

Как сказал Рибо¹, «слово похоже на бумажные деньги (банковские билеты, чеки и т. д.), оно столь же полезно и столь же опасно».

Такая опасность не осталась незамеченной, Локк указывает на наличие значительного количества людей, которые используют слова в м е с т о идей, и мы видели, что Лейбниц не мог не испытывать некоторую тревогу, касаясь влияния употребления слов в своем мышлении на ход мысли.

Любопытно, что сам Макс Мюллер косвенно говорит об этом. Он противопоставляет Канту своего друга Гаманна, которого он осыпает похвалами, и цитирует его: «Речь является не только основой всякого мыслительного процесса, но одновременно и центральной точкой, от которой начинается и непонимание рассудком самого себя. Для меня проблемой является выяснение не того, что такое рассудок, но что такое речь. Я подозреваю, что именно там кроется причина ложных умозаключений и противоречий, в которых обвиняют рассудок».

Все было бы хорошо, если бы в заключение Макс Мюллер посоветовал нам остерегаться таких недоразумений, причиной которых является речь; но, напротив, он считает, что слова сами по себе не могли бы никогда повести к ошибке: «Слово само по себе является ясным, простым, точным; но мы сами его перемещаем, засовываем неизвестно куда и этим производим нечто сумбурное».

Я не заговорил бы снова о Максе Мюллере, если бы заявление, содержащееся в этом отрывке из *Introductory Lectures*, не шло бы дальше уже исследованного вопроса употребления слов в мышлении. Однако непосредственно после этой цитаты из Гаманна, следуя, видимо, своему специфическому подходу, он нам говорит о «науке мысли, основанной на науке речи». Не хочет ли он заставить нас поверить, что речь должна не только сопровождать мысль, но должна даже ею руководить?

К несчастью для этого тезиса такая попытка ему не всегда удается: нужен был человек, который отождествляет слова и мысли, чтобы ата-

¹Th. Ribot "Psychologie de l'Attention", p. 85.

Рибо описывает одновременно развитие этой функции слова. Он пишет: «Обучение счету детей, или, еще лучше, дикарей, показывает, как слово, связанное первоначально с предметами, а затем с понятиями, отделяется постепенно от них и становится независимым».

ковать теорию Дарвина¹, принимая во внимание лишь слово «селекция» и пренебрегая как мнимой «метафорической маской», смыслом слова «селекция» у Дарвина.

Напротив, мыслитель, использующий слова в процессе мышления, может понять, что не только слова, но и вспомогательные знаки любого другого вида играют лишь роль своего рода этикетки, скрепленной с идеей. Он более или менее сознательно (что было бы интересно изучить) пользуется методами, пригодными для того, чтобы обеспечить именно такую, а не какую-нибудь другую роль. Мы видели, что сам Пойя, единственный из опрошенных мною математиков, мыслящий с помощью слов, вводит лишь одно слово в целую последовательность мыслей, чтобы выделить центральную идею, в то время как для Джесси Дугласа некоторые из слов представлены простым ритмом их слогов. Один из моих коллег, специалист по литературе, думает с помощью слов, но он вводит время от времени н е с у щ е с т в у ю щ е е слово. При сравнении этого процесса с приводимым Дугласом и Гальтоном, становится очевидно, как мне кажется, что они сводятся к одному и тому же.

Мы можем быть уверены, что в мышлении Лейбница не произошло недоразумений, которых боится Гаманн: во-первых, потому, что это был Лейбниц, и, во-вторых, потому, что он отдавал себе отчет в опасности. И хотя я лишь немного знаком с теориями метафизиков, меня несколько беспокоит то, что (как я прочел в «Эволюции общих идей» Рибо) среди них зрительный типографский тип кажется одним из наиболее общих.

Действительно, среди философов, кажется, имеется некоторая тенденция путать логическую мысль с использованием слов. Например, трудно не отметить этого у Уильяма Джеймса, когда он жалуется², что «мы так подчинены философской традиции, обсуждающей обычно «л о г о с» или рассуждение как единственный путь к правде, что возвращение к жизни животной и «необлеченной в слова» сыграло бы пожалуй роль откровения». Выражение «необлеченной в слова» почти не оставляет сомнения, что он использует слово «логос» в древнегреческом смысле.

Не может ли эта тенденция запутать в конце концов тех, кто ею руководствуется? Читая возражения Фуйе против бессознательного в его произведении «Evolutionnisme des Idées — Forces» (см. гл. II, стр. 21), спрашиваешь себя, не выдвигает ли он слова вместо доводов.

Я испытываю некоторую неловкость, когда вижу, что Локк, как и Стюарт Милль, считает необходимым использование слов каждый раз,

¹ «The Science of Thought», tome I, p. 97,

² William James «A Pluralistic Universe», p. 272.

когда речь идет о сложных идеях. Я, как и большинство ученых, думаю, что чем труднее и сложнее вопрос, тем меньше мы можем доверять словам, тем яснее понимаем, что должны контролировать этого опасного союзника подчас предательскую точность.

Одно ценное описание

Хотя по вопросу об употреблении слов в мышлении встречаются еще различные мнения, теперь принято считать, что наличие слов необязательно. С другой стороны, многие современные психологи, продолжая настаивать на словах¹, заметили, как и мы, вмешательство неопределенных образов, которые представляют идеи лишь символически².

Я не буду заниматься резюмированием этих произведений; но я не могу противостоять желанию воспроизвести очень интересное сообщение, любезно адресованное мне профессором Романом Якобсоном, который помимо своих хорошо известных лингвистических работ проявляет глубокий интерес к психологическим вопросам. Вот оно:

«Знаки — необходимая поддержка для мысли. Для мысли, обращенной к обществу (стадия сообщения), и для мысли, находящейся в процессе подготовки к этому (стадия формулировки), наиболее обычной системой знаков является собственно речь; но внутренняя мысль, особенно когда это мысль творческая, охотно использует другие системы знаков, более гибкие и менее стандартизованные, чем речь, и которые оставляют больше свободы, подвижности творческой мысли... Среди этих знаков и символов надо различать, с одной стороны, условные общепринятые знаки и знаки индивидуальные, которые, в свою очередь, могут подразделяться на постоянные знаки, употребляемые обычно, и знаки эпизодические, созданные ad hoc и участвующие лишь в одном созидательном акте».

Этот замечательно точный и глубокий анализ поразительно отчетливо освещает наблюдения типа тех, о которых мы говорили выше. Такое, согласие между умами, работающими в совершенно различных областях, — факт замечательный.

Сравнение с другим вопросом по поводу воображения

Можно сказать, что образы составляют основную тему знаменитого произведения Тэна «Об уме». Он их рассматривает с точки зрения,

¹См. Delacroix “Le Langage et la Pensée”, p. 381 и далее, и сравнить с замечаниями на стр. 406.

²См. также Titchener “Experimental Psychology of the Thought Processus”, в особенности лекцию 1 и соответствующие замечания.

достаточно отличной от нашей (так как концентрированная мысль им не была рассмотрена). Однако на один вопрос, его особенно интересовавший, проведенные нами наблюдения могут пролить, возможно, некоторый свет. Он настойчиво обращал внимание на то, что следовало бы объяснить, как происходит, что некоторые — образы являются нам иногда очень живо, и тем не менее отличаются от реальных ощущений; как ум может различать образы и галлюцинации¹.

Но в нашем случае также имеется вереница образов, развивающаяся параллельно с собственно мыслью. Два умственных процесса, образы и рассуждения, постоянно влекут за собою друг друга, оставаясь в то же время совершенно различными и даже до некоторой степени независимыми; и мы нашли, что это обусловлено сотрудничеством между собственно сознанием и сознанием краевым. Можно предположить, что существует определенная аналогия между этими двумя явлениями и что одно может помочь понять другое.

Можно ли воспитывать воображение?

Проведенное выше исследование подсказывает вопрос, аналогичный уже поднимавшемуся в конце гл. IV. Возможно ли и желательно ли, чтобы наша воля оказывала влияние на природу вспомогательных знаков, используемых при мышлении? Этот вопрос изучался: Титченер проявил замечательную инициативу в этом смысле. Как он объясняет², его естественной тенденцией является использование мысленной речи; но он всегда стремился, и всегда успешно, к большому диапазону и большой гибкости воображения, «опасаясь, что с возрастом возникает тенденция становиться все более словесным типом».

Таким образом, слишком активное вмешательство речи в его мышление сдерживалось постоянной сменой образов. Еще более любопытно то, что он использует с этой целью не только зрительные образы, но также, и даже в основном, слуховые, в частности музыкальные.

Но он использует также и помощь зрительного воображения, «которое всегда в моем распоряжении и которое я могу формировать и направлять по желанию. Читая какое-либо произведение, я интенсивно упорядочиваю факты или аргументы в соответствии со зрительной моделью и я могу думать в терминах этой модели так же легко, как и словами»; и чем лучше произведение соответствует этой модели, тем лучше он его понимает.

¹ Тот же вопрос занимает большое место в некоторых психологических исследованиях Варендонка. См. Varendoncq "Psychology of Day Dreams", особенно chap. II, p. 75–86.

² "Experimental Psychology of the Thought Processus", p. 7 и далее.

Подобное самовоспитание умственных процессов мне кажется одним из самых замечательных достижений психологии.

Общие замечания

Все сказанное касается людей, занимающихся умственной работой. Исследования среди других групп населения связаны со следующей трудностью: как мы видели, законы концентрированной мысли могут очень сильно отличаться от общих законов образования идей встречающихся у обычных людей. Это, вероятно, является причиной, из-за которой Гальтон, хотя и видел необходимость более общей анкеты, не был в состоянии ее провести.

Как бы то ни было, мы видим, что хотя то, что мы говорили в предыдущих главах, кажется общим для различных творческих умов, природа вспомогательных конкретных представлений может у них значительно различаться.

РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УМОВ

Явления, которые мы рассматривали в первых пяти главах, по-видимому, сходным образом наблюдаются у многих специалистов-математиков. Напротив, конкретные представления, изученные в предыдущей главе, были далеко не одинаковыми для всех. Эта глава также будет посвящена различиям между путями, которые избирает математическая мысль. Но по отношению к нашему предыдущему исследованию она представляет собой то же, что представляет различие между зоологическими родами и видами по отношению к общей физиологии.

Случай здравого смысла

Начнем с начала, а именно с людей, рассуждающих просто здраво: мы можем сказать, что у них бессознательное играет большую роль и что они лишь немного пользуются последующей работой сознания.

Кроме того, случается, что их бессознательное является поверхностным, и его результаты несущественно отличаются от нормального рассуждения. Так, Спенсер, напомнив классический силлогизм: «Всякий человек смертен; Петр — человек; значит Петр смертен», предполагает, что вам рассказали о человеке в возрасте 90 лет, который затевает постройку для себя нового дома. Этот силлогизм действительно присутствует в вашем краевом сознании и разница лишь в форме между этим последним и ходом мысли (ходом мгновенным, как обычно в бессознательном), который вас приводит к выводу, что этот человек неразумен. То же самое может иметь место и для многих простых математических умозаключений.

Но в ряде других случаев пути здравого смысла могут сильно отличаться от тех, по которым может пойти четко сформулированное рассуждение. Особенно это касается вопросов конкретной природы, например геометрических и механических. Наши представления по таким вопросам, усвоенные в раннем детстве, по-видимому, глубоко запрятаны в бессознательном; мы не можем их знать точно, и вероятно, что часто они содержат эмпирические выводы, полученные не путем рассуждения, а из чувственного опыта. Приведем несколько примеров.

Представим себе, что мы бросили перед собой «материальную точку» (т. е. крохотное тело, как, например, очень маленький шарик), которая будет продолжать двигаться благодаря своей начальной скорости и своему весу. Здравый смысл нам говорит, что это движение будет происходить в вертикальной плоскости, которая проходит через начальное направление броска. В этом случае почти несомненно, что подсознание использует «принцип достаточного основания», так как нет никаких оснований для того, чтобы точка в своем движении отклонилась скорее вправо, чем влево от этой плоскости.

Математическое доказательство, как оно классически излагается в курсах теоретической механики, основано на совершенно ином принципе и использует несколько теорем дифференциального и интегрального исчисления. Надо, однако, заметить, что доказательство, которое нам дает «здравый смысл», можно превратить в совершенно строгое, используя общую теорему (также относящуюся к интегральному исчислению), которая гласит, что в условиях, изложенных выше (при заданных величине и направлении скорости) движение определено однозначно. Эта теорема может в свою очередь быть строго доказана, но это доказательство приводится лишь в более строгих курсах интегрального исчисления, так что в обычном обучении способ, подсказанный здравым смыслом, действительно кажется менее элементарным, чем другой.

Рассмотрим теперь два геометрических примера. Если я хочу непрерывным движением точки описать в плоскости кривую, то здравый смысл подсказывает, что во всех ее точках (кроме, может быть, нескольких исключительных точек) кривая будет иметь касательную (другими словами, в каждый момент движение обязательно происходит во вполне определенном направлении). Мы не знаем, как здравый смысл — т. е. наше бессознательное — приходит к такому выводу; может быть, благодаря опыту, т. е. вспоминая кривые, которые мы привыкли видеть; или, как это предполагает Ф. Клейн, смешивая геометрические кривые, которые не имеют толщины, с кривыми, которые мы реально можем провести и которые всегда имеют некоторую толщину. В действительности вывод ошибочен: математики умеют строить непрерывные кривые, которые нигде не имеют касательной.

В качестве второго примера рассмотрим замкнутую плоскую кривую, которая не имеет «двойных точек», т. е. нигде не пересекается сама с собой. Для здравого смысла очевидно, что такая кривая, какова бы ни была ее форма, делит плоскость либо на две различные области, либо более чем на две. Точно не известно, как здравый смысл приходит к такому выводу, и вероятно, что здесь снова налицо вмешательство

эмпиризма. На этот раз заключение (теорема Жордана) правильно, но, несмотря на его очевидность для нашего здравого (смысла, его доказательство очень трудное.

С помощью таких примеров можно понять, что, по крайней мере для некоторого класса вопросов, связанных с основами¹, невозможно с уверенностью полагаться на нашу обычную пространственную интуицию: так же, как геометрические свойства могут быть сведены к свойствам аналитическим благодаря аналитической геометрии, рассуждения всегда должны быть полностью арифметизованы; или, по крайней мере, необходимо убедиться, что такая арифметизация возможна, даже если она для краткости не проводится. Слова Паскаля «Все, чего не может геометрия, не можем и мы» заменены современными математиками словами «Все, чего не может арифметика, не можем и мы».

Например, доказательство теоремы Жордана, сформулированной выше, является удовлетворительным лишь тогда, когда оно полностью арифметизовано².

Вторая стадия — изучение математики

После этой стадии здравого смысла приходит следующая стадия — научная. Мы видели, что она характеризуется наличием тройной операции: проверки результата, его «завершения» и особенно его подготовки к использованию, что требует формулировки результата-эстафеты. Мы видели, что это существенно, во-первых, для того, чтобы иметь уверенность в приобретенных таким образом знаниях и для того, чтобы иметь возможность их плодотворно использовать.

Эти особенности помогут нам понять, что происходит, с точки зрения психологии, при переходе от первой стадии ко второй; другими словами, понять то, что происходит при изучении математики.

¹ Вопросы, которых мы здесь слегка коснулись, связаны больше с арифметизацией, чем с теми идеями Гильберта, о которых мы упоминали в главе IV.

² Тут можно сделать то же заключение, что и по поводу «Оснований геометрии» Гильберта. Я дал упрощенное доказательство первой части теоремы Жордана; мое доказательство может быть, естественно, вполне арифметизовано, иначе оно не считалось бы доказательством, но, разыскивая его, я все время думал о фигуре (всегда представляя ее себе в виде весьма извилистой кривой), и так повторяется всегда, когда я думаю об этом доказательстве. Я даже не могу утверждать, что я строго проверил это доказательство или для каждого его звена я проверял возможность его арифметизации (другими словами, арифметизованное доказательство не возникало в моем сознании). Однако ни для меня, ни для какого-либо другого математика, который будет читать доказательство, нет сомнения в том, что каждое его звено может быть арифметизовано; я могу мгновенно дать это доказательство в арифметизованном виде, и это доказывает, что в такой форме доказательство имеется в моем краевом сознании.

Известно, до какой степени обычным делом здесь являются полное непонимание и полный крах. Впрочем, я буду очень краток в этом вопросе, так как он основательно рассмотрен Пуанкаре. Прежде чем его обсуждать, бесполезно заметить, что изучение математики уже входит в тему нашего исследования. Между работой ученика, решающего задачу по алгебре или геометрии, и изобретательской работой разница лишь в уровне, в качестве, так как обе работы аналогичного характера.

Как получается, что столько учеников Неспособны этому виду работы, неспособны понимать математику? Пуанкаре рассмотрел именно этот вопрос¹ и он ярко показал, какова здесь действительная причина, источник которой — тот смысл, который следовало бы придавать слову «понимать».

«Понять доказательство теоремы, — значит ли это исследовать последовательно каждый из силлогизмов, из которых она состоит, и констатировать, что он корректен и соответствует правилам игры? Да, для некоторых; установив это, они скажут: я понял.

«Но не для большинства. Почти все остальные являются гораздо более требовательными; они хотят знать не только, все ли силлогизмы в доказательстве верны, но также почему они связываются в таком порядке, а не в другом. Так как они считают это порождением каприза, а не ума, постоянно и сознательно стремящегося к цели, они считают, что не поняли.

«Несомненно, они не вполне отдают себе отчет в том, чего требуют, и они не сумели бы сформулировать свое желание, но если они не удовлетворены, то они смутно чувствуют что им чего-то не хватает».

Легко понять связь между сказанным и нашими предыдущими рассмотрениями. Чтобы преподавать устно или письменно, надо дать каждую часть доказательства в совершенно осознанном виде, в соответствии с одновременными стадиями проверки и «завершения», которые мы описали выше. При этом, думая о будущих следствиях, обычно стараются увеличить число результатов-эстафет. При таком подходе (который кажется наилучшим для получения ясного и строгого представления у начинающего) не остается ничего от синтеза, важность которого мы подчеркнули в предыдущей главе. Этот синтез является для нас поводом, без которого мы были бы как слепые, умеющие ходить, но никогда не знающие направления, в котором надо идти.

Те, кто может видеть такой синтез, «понимают математику». В противном случае, имеются две тактики, отмеченные Пуанкаре (см. выше), и обычно вторая тактика преобладает: студент чувствует, что чего-то

¹“Science et Méthode”, p. 104.

не хватает, но никак не может понять, в чем же дело; если он не преодолет эту трудность, все потеряно.

В первом из указанных Пуанкаре случаев студент, не найдя никакого подхода для синтеза, обходится без последнего. Хотя это и позволяет ему продолжать учебу (часто в течение многих лет), его случай с некоторой точки зрения хуже, чем у другого; тот понимает, по крайней мере, существование трудности. Так как требуется все больше и больше математиков для различных областей, такой тип студента встречается часто. Однажды я опрашивал студента, который, руководствуясь своим здравым смыслом, знал верный ответ на мой вопрос, но не думал, что он всегда вправе так ответить, и не отдавал себе отчета в том, что указания его подсознания могли быть легко преобразованы в правильное и строгое доказательство.

Любопытные примеры такого типа часто встречаются среди студентов, занимающихся дифференциальным и интегральным исчислением. Чаще всего они задают себе вопрос, можно ли опираться на такую теорему или формулу и выполнены ли условия ее применимости; и они иной раз из-за этого причиняют себе немало хлопот, в то время как здравый смысл указывает, что ответ практически очевиден... и с другой стороны, они пренебрегают такой предосторожностью в тонких вопросах, заслуживающих внимательного исследования! Это замечание и другие аналогичные могут при случае оказаться полезными в педагогике.

Логические и интуитивные умы. Политический аспект вопроса

Поговорив о студентах, перейдем к самим математикам, способным не только понимать математические теории, но и выдвигать новые. Они отличаются не только от студентов, но и между собой. Было подчеркнуто основное различие: некоторые математики «интуитивны», другие — «логики». Об этом различии говорил Пуанкаре, так же как и немецкий математик Клейн. Доклад Пуанкаре на эту тему¹ начинается так:

«Одни прежде всего заняты логикой; читая их работы, думаешь, что они продвигались вперед шаг за шагом с методичностью Вобана, который готовит штурм крепости, ничего не оставляя на волю случая. Другие руководствуются интуицией и с первого удара добиваются побед, но иногда ненадежных, так же, как отчаянные кавалеристы авангарда».

¹Н. Poincare "Valeur de la Science", p. 11.

Клейн доходит до введения в вопрос политики; он утверждал в 1893 г.¹: «кажется, что сильная пространственная интуиция присуща тевтонской науке, в то время как чисто логический критический дух более развит в латинской и еврейской расах». Такое утверждение противоречит фактам, что будет ясно видно, когда мы перейдем к примерам. Несомненно, что, говоря об этом, Клейн недвусмысленно рассматривает интуицию с ее таинственным характером как нечто высшее по отношению к прозаическому пути логики (мы уже встречались с подобной тенденцией в гл. III), и он, очевидно, счастлив провозгласить такое превосходство своих соотечественников. Совсем недавно мы были свидетелями того, как нацисты провозгласили этот особый вид этнографии, мы видим, что нечто подобное существовало уже в 1893 г.!

Такую тенденциозную интерпретацию фактов находишь всякий раз, когда в игру вступают националистические и расистские страсти. В начале первой мировой войны один из наших самых крупных ученых и историков науки физик Дюгем был, точно так же, как и Клейн, сбит с толку, но в противоположном смысле. В достаточно подробной статье² он изображает немецких ученых, особенно математиков, как людей, лишенных интуиции или даже как сознательно ее отметающих. Особенно трудно понять, как он может так характеризовать Римана, который несомненно является одним из наиболее типичных примеров интуитивного ума. Утверждение Дюгема в 1915 г. мне кажется столь же необоснованным, как и утверждение Клейна в 1893 г. Если бы тот или другой был прав, то из всего сказанного читатель сделал бы вывод, что либо французы, либо немцы никогда не делали важных открытий. Единственная, тенденция, в которой я мог бы упрекнуть с этой точки зрения немецкую математическую школу, состоит в систематических попытках — мало обоснованных и несколько педантичных (особенно под влиянием Клейна) — утверждать, что в некоторых доказательствах анализа и в его арифметических приложениях предпочтительнее употреблять ряды, чем интегралы. Как раз в этих вопросах использование рядов кажется более логичным и использование интегралов более интуитивным. В этой тенденции проявляется, может быть, еще некоторый национализм, так как ряды использовались знаменитым Вейерштрассом совершенно очевидным представителем логических умов, — репутация которого и влияние на немецких ученых были огромны, в то время как Коши и Эрмит в

¹ Klein "The Evanston Colloquium", p. 46.

² *Revue des Deux Mondes* (janvier-fevrier 1915), p. 657.

аналогичных случаях вводили интегралы¹ (что делал, впрочем, и Риман).

Точка зрения Пуанкаре на это различие

Пуанкаре — более мудро, я полагаю — не переводит вопроса в политический план. Напротив, он показывает, насколько сомнительна эта точка зрения и, чтобы проиллюстрировать противоположность этих двух видов умов, он сравнивает между собой двух французов, затем двух немцев.

Я был полностью согласен с идеями Пуанкаре на протяжении первых пяти глав, но на этот раз я с ним разошдусь во взглядах. На стр. 84 мы цитировали первую фразу его доклада, воспроизведем теперь вторую.

«Отнюдь не обсуждаемый ими вопрос заставляет их использовать тот или другой метод. Если часто об одних говорят, что они аналитики, а других называют геометрами, то это не мешает тому, что первые остаются аналитиками, даже когда занимаются вопросами геометрии, в то время как другие являются геометрами, даже если занимаются чистым анализом. Сама природа их ума делает их «логиками» или «интуитивистами» и они не могут переродиться, когда принимаются за новую тему».

Что мы должны думать, сравнивая эти два абзаца? Дважды было подчеркнуто различие между интуицией и логикой, но на совершенно различных, хотя и имеющих друг к другу некоторое отношение, основаниях.

Это становится еще более очевидным при рассмотрении примеров, данных Пуанкаре. Жозефу Бертрану, который совершенно очевидно имеет конкретные пространственные представления по всем вопросам, он противопоставляет Эрмита, чьи глаза «кажутся лишенными контакта с миром» и который ищет «видение истины изнутри, а не снаружи» (там же).

Конечно, Эрмит не имел привычки думать конкретно. Он испытывал своего рода ненависть к геометрии и однажды, как ни странно, упрекнул меня в том, что я опубликовал мемуар по геометрии. Естественно, его собственные работы по конкретным вопросам редки и не относятся к числу его самых замечательных. Таким образом, в

¹ Из-за таких взглядов на вещи Клейн считал необходимым изменить доказательство одной знаменитой теоремы Эрмита; в одном месте он даже заявляет, что «доказательство не является еще достаточно простым, в нем видны еще следы идей Эрмита»; и это привело его к новому изменению. На самом же деле эти «упрощения» являются поверхностными и после них, как и раньше, все — абсолютно все существенное — базируется на основной идее Эрмита.

соответствии со вторым заявлением Пуанкаре Эрмит должен рассматриваться как математик с логическим складом ума.

Но считать Эрмита логиком! Ничто не может мне казаться менее правдоподобным. Казалось, что методы всегда рождались в его уме каким-то таинственным образом. На его лекциях в Сорбонне — которые мы слушали с неизменным восторгом — он любил начинать свои рассуждения словами: «Начнем с тождества...»; затем он писал формулу, точность которой можно было гарантировать, но ни происхождения которой, ни метода открытия он не объяснял — и мы не могли о них догадаться. Это качество его ума отчетливо проявилось при открытии им знаменитых квадратичных форм; в этом вопросе возможны два случая и очевидно, что их свойства совершенно различны. В первом случае «приведение» было известно со времен Гаусса. Казалось, что никому не могло прийти в голову применить ко второму случаю выкладки, используемые в первом, так как они, видимо, не имели с ним ничего общего: казалось совершенно абсурдным, что они могут и с этим случае привести к решению; и тем не менее, посредством своего рода колдовства, они к нему привели. Механизм этого исключительного явления был несколькими годами позднее частично объяснен с помощью геометрической интерпретации (данной, естественно, не Эрмитом, а Клейном); но для меня она стала совершенно ясной лишь после того, как я познакомился с соответствующей концепцией Пуанкаре, в одной из его первых заметок¹. Я не могу себе представить

¹ Сам Пуанкаре, несмотря на явление озарения, о котором мы говорили, никогда не производил на меня такого впечатления. Когда я читал одну из его крупных работ, у меня складывалось впечатление, что, как она ни замечательна, ее уже давно должны были бы сделать (что, очевидно, является заблуждением); в то время как работы Эрмита, вроде той, о которой я говорил, вызывали у меня следующую мысль: «Какие замечательные результаты! Как он мог додуматься до такой вещи!»

Ясно, что такое суждение является в некоторой степени субъективным: вывод, который мне кажется логическим, т. е. соответствующий моему мышлению, и который для меня естественен, может показаться другому интуитивным. Почти все математики должны казаться самим себе логиками. Например, меня спросили, как я мог догадаться использовать для интегрирования уравнений в частных производных прием «главной части расходящегося интеграла»; конечно, если этот прием рассматривать сам по себе, то он может показаться типичным примером «мышления около». Но в действительности мой рассудок долгое время противился такой идее, до тех пор, пока я не был вынужден этого сделать; я пришел к ней шаг за шагом и читатель-математик легко проверит это, если возьмет на себя труд посмотреть мои исследования по этому вопросу, особенно мои «Исследования о фундаментальных решениях и по интегрированию линейных уравнений в частных производных», 2-й мемуар, в частности, начиная со стр. 121 (*Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, tome XXII (1905)). Я не мог избежать этого метода, как заключенный в поэме Эдгара По «Маятник и колодец» не мог избежать колодца в центре своей камеры.

более совершенного типа интуитивного ума, чем Эрмит. И так, пример Эрмита неукоснительно показывает, что два определения интуиции и логики, данные Пуанкаре, не совпадают, по крайней мере не вполне совпадают, что в какой-то мере признал сам Пуанкаре именно в связи с примером Эрмита.

Двумя немецкими математиками, которых сравнивает Пуанкаре, являются Вейерштрасс и Риман. Несомненно, что, как заключает Пуанкаре, Риман — типичный интуитивист, а Вейерштрасс — типичный логик. Но по поводу этого последнего Пуанкаре замечает: «Можно просмотреть все его книги, и вы не найдете в них ни одного чертежа». Здесь допущена одна фактическая ошибка¹. Действительно, почти ни в одном из мемуаров Вейерштрасса нет чертежей; существует лишь одно исключение, но оно существует и находится в одном из его самых замечательных и наиболее сжатых произведений, которое производит наиболее яркое впечатление совершенства: я говорю о его фундаментальном методе в вариационном исчислении. Вейерштрасс там помещает один единственный чертеж² и, опираясь на него, все дальнейшее выводит глубоко логическим методом, который является несомненно ему свойственным; так что достаточно каждому, кто хорошо знает математические методы, бросить взгляд на этот чертеж, чтобы восстановить весь ход рассуждений. Но для построения этой фигуры требовалась, естественно, начальная интуиция. Это было тем более трудным и гениальным актом, что требовалось порвать с общепринятыми методами, которые непрерывно приносили все новые успехи со времен изобретения исчисления бесконечно малых; в частности, Лагранж успешно применил исчисление бесконечно малых для получения первой части решения, но больше никому не удавалось его правильно дополнить. Вейерштрасс показал, что для получения результата надо полностью отойти от традиционных методов и оперировать непосредственно.

Как видно, в действительности этот случай является ярким примером того общего факта, что логика идет вслед за начальной интуицией.

Использование полученных нами результатов

Итак, мы вынуждены признать, что не существует единого определения интуиции, противоположной логике, но что их существует по

¹Ошибка, которую, однако, не надо ставить в упрек Пуанкаре (см. следующее замечание).

²Неизвестно, сам ли Вейерштрасс начертил эту фигуру или он только описал ее словесно, так как излагал он этот метод лишь в своих устных курсах и в течение многих лет метод оставался неизвестным для всех, кроме его учеников.

крайней мере два. Чтобы разобраться в этом, почему бы не воспользоваться результатами нашего анализа этих явлений?

Резюмируем результаты этого анализа: вспомним что всякая умственная работа, в частности работа над открытием, влечет за собой сотрудничество бессознательного или поверхностного или (достаточно часто) более или менее глубокого; что в этом бессознательном после предварительной сознательной работы происходит та вспышка идей, которую Пуанкаре сравнил с более или менее беспорядочным выбросом атомов, и что конкретные представления обычно используются умом для фиксации комбинаций и их синтеза.

Следствием этого является прежде всего то, что, говоря строго, практически не существует чисто логических открытий. Вмешательство бессознательного необходимо по крайней мере для того, чтобы стать отправным пунктом логической работы.

С этой оговоркой, мы немедленно замечаем, что процессы, аналогичные только что описанным, могут протекать различно в разного типа умах:

А) более или менее глубоко в бессознательном. Так как мы знаем, что в бессознательном должны существовать различные уровни, некоторые из которых находятся совсем близко к сознанию, а другие лежат более или менее глубоко, то ясно, что уровни, где встречаются и комбинируются идеи, могут быть либо глубокими, либо, напротив, поверхностными; поэтому есть основания считать, что с этой точки зрения каждый ум ведет себя по-своему.

Совершенно естественно говорить об уме более интуитивном, когда зона комбинирования идей находится глубоко, и об уме логическом, если эта зона расположена достаточно поверхностно. Такой способ рассматривать различие мне кажется наиболее соответствующим существу вопроса.

Если эта зона глубока, то результаты будет труднее довести до сведения сознания, и вероятно, что ум будет иметь тенденцию делать это лишь тогда, когда это строго необходимо. Я охотно могу предположить, что таков был случай Эрмита, который никогда не опускал ни одного существенного элемента в результатах своих раздумий, так что его методы были вполне корректны и строги, но при этом не оставалось ни малейшего следа способа, который его к ним привел.

Может произойти обратное: умы могут быть устроены таким образом, что идеи, выработанные в недрах бессознательного, тем не менее полностью доходят до сознания. Я мог бы охотно представить себе это в случае Пуанкаре, идеи которого, хотя и могли быть рождены достаточно глубокой интуицией, обычно казались проделавшими совершенно естественный путь. Как видно, можно казаться логиком при

формулировке своих идей, но после того, как эти идеи были открыты путем интуиции¹.

Б) Мысль более или менее узко направленная: мы видели, что выброс атомов Пуанкаре — образование идей, говоря менее метафорическим языком — может быть более или менее рассеянным. Это еще одно основание для того, чтобы у нас могло сложиться представление или об интуитивном уме (в случае, когда рассеивание велико), или об уме логическом (в противоположном случае); и это второе основание может, априори по крайней мере, не иметь никакого отношения к первому: угол, в котором заключена мысль, может быть различным, но независимо от того, насколько глубок слой бессознательного, в котором эта мысль развивается. Априори мы не знаем, есть ли связь между этими двумя видами «интуитивных тенденций», но один пример (пример Галуа, как мы увидим дальше) нам покажет, что они действительно независимы.

В) Различные вспомогательные представления: мы видели, как сильно различаются ученые по способу использования умственных образов или других конкретных представлений: эти различия могут касаться либо природы представлений, либо способа, которым они влияют на работу мозга. Ясно, что некоторые виды представлений могут дать мысли ход более логический, другие — ход более интуитивный. Но эта сторона вопроса является гораздо менее доступной для изучения именно потому, что явления не всегда сравнимы для различных умов.

Очень общим является использование образов, и они очень часто бывают геометрической природы. Было бы интересно иметь по таким вопросам самонаблюдения Эрмита, который всегда казался витающим вне конкретных представлений (в моем собственном случае, когда я думаю об аналитических вопросах, роль геометрических образов совершенно отлична от той, которую они играют, когда речь идет о геометрических исследованиях).

Другие различия между математическими умами

Вопрос, который мы только что обсуждали, является единственным исследованным до сих пор вопросом, касающимся различных видов математических умов; естественно, нет никакого сомнения, что

¹Вообще говоря, как замечают некоторые авторы (см. Meyerson "Du cheminement de la Pensée", t. 1, цитируется по Henri Delacroix "L'Invention et le Génie", p. 480), часто существует большая разница между открытием какой-нибудь идеи и ее выражением в словах.

математики могут различаться и с других совершенно различных точек зрения.

Например, существует одна теория — теория групп, важность которой в нашей науке не переставала возрастать в течение более чем века, особенно после трудов Софуса Ли в конце XIX века. Некоторые математики, в частности некоторые современники, обогатили ее блестящими открытиями. Другие — и я признаюсь, что принадлежу к их числу — будучи способны использовать ее в простых приложениях, испытывают непреодолимые трудности при попытке познать эту теорию глубже. Было бы интересно открыть психологическую основу такого различия умов, различия, которое мне кажется несомненным.

ПАРАДОКСАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ИНТУИЦИИ

Если у некоторых умов, исключительно интуитивных, идеи могут рождаться и комбинироваться в еще более глубоких слоях бессознательного, как мы только что рассмотрели, то возможно, что даже очень важные звенья дедукции могут оставаться неизвестными даже самому автору. История науки дает несколько замечательных примеров этого.

Ферма (1601–1665). Пьер Ферма был магистром, советником тулузского парламента. В то время жизнь была менее сложной, чем сейчас, и его служебные обязанности, вероятно, не были ему помехой в его весьма значительных математических исследованиях. Кроме участия в первом этапе построения исчисления бесконечно малых и даже в создании теории вероятностей, он активно занимался вопросами теории чисел. Среди трудов древних математиков, которыми он располагал, был перевод Диофанта, греческого ученого, который занимался арифметическими вопросами. После смерти Ферма в его экземпляре Диофанта нашли на полях следующее замечание (по латыни):

«Я доказал, что соотношение $x^m + y^m = z^m$ невозможно в целых числах (x, y, z отличны от нуля, m больше чем 2). Но на полях недостаточно места, чтобы записать доказательство»¹.

Три века прошло с тех пор, и все еще ищут доказательство, которое Ферма мог бы написать на полях, если бы они были больше. Тем не менее кажется, что Ферма не ошибся, так как частные доказательства для некоторых обширных классов значений показателя m найдены; например, нашли доказательство для всех m до 100^2 . Но огромная работа, которая сделала возможным получение этих частных результатов, не могла быть произведена путем прямых математических рассуждений²: эта работа требовала применения нескольких важных

¹ По форме, но не по существу, фраза в тексте несколько отличается от записи, сделанной Ферма. — *Прим. ред.*

² В 1995 году теорема Ферма была полностью доказана американским математиком Э. Уайлсом. — *Прим. ред.*

³ Такого рода подход в течение двух последних веков использовался наиболее знаменитыми математиками, начиная с Абеля. Все важные результаты, которые можно получить в этом направлении, видимо, получены; эти результаты весьма

алгебраических теорий, которые были совершенно неизвестны в эпоху Ферма, и никаких намеков на которые нет в записях Ферма. После того как в течение XVIII и начала XIX века были установлены некоторые основные положения алгебры, немецкий математик Куммер, чтобы приступить к проблеме «последней теоремы Ферма», должен был ввести новое и смелое понятие «идеала» — грандиозная идея, которая полностью революционизировала алгебру. Но, как мы только что сказали, даже это мощное орудие математической мысли дало до сих пор лишь частные случаи доказательства этой таинственной теоремы.

Риман (1826–1866). Бернгард Риман, огромную интуитивную способность которого мы уже отмечали, существенно обновил наши знания о распределении простых чисел, также одного из наиболее таинственных вопросов математики¹. Он научил нас получать результаты в этом направлении, пользуясь методами интегрального исчисления, точнее, изучая некоторую величину, являющуюся функцией переменной s , которая может принимать действительные или мнимые значения. Он доказал некоторые важные свойства этой функции, но два или три важных свойства он указал не приводя доказательства. После смерти Римана в его бумагах нашли запись, в которой говорилось: «Эти свойства $\zeta(s)$ (функции, о которой идет речь) выводятся из одного из ее выражений, которое я не сумел достаточно упростить, чтобы опубликовать».

Мы и сейчас не имеем ни малейшего понятия о том, что могло бы представлять собой это выражение! Что же касается свойств, простой формулировкой которых он ограничился, то мне потребовалось десятка три лет, чтобы я смог их доказать — все, кроме одного. Что касается этого последнего свойства, то оно до сих пор остается недоказанным, хотя благодаря огромной работе, проделанной за последние полвека, получено несколько очень интересных результатов в этом направлении. Кажется все более и более вероятным — но еще никоим образом не достоверным — что гипотеза Римана верна. Естественно, все эти дополнения к трудам Римана могли быть сделаны лишь благодаря фак-

ограничены. Академия Наук ежегодно получает несколько работ на эту тему, большинство из которых являются абсурдными, а в некоторых воспроизводятся уже известные результаты, полученные Абелем и другими.

¹Эти примеры Ферма и Римана относятся к арифметике. Арифметика, хотя с нее начинают преподавание в младших классах школы, оказывается одной из самых трудных (если не самой трудной) из математических наук, когда пытаются в нее углубиться. Существенные результаты в арифметике получают обычно тогда, когда арифметические вопросы сводят к высшей алгебре и к анализу бесконечно малых.

(Слово «арифметика» у французских и немецких авторов часто применяется как синоним теории чисел. — *Прим. ред.*).

там, которые в его время были абсолютно неизвестны; что же касается одного из свойств, которое он сформулировал, то почти невозможно понять, как он мог его открыть, не используя частично этих общих принципов, хотя он не упоминает о них в своем мемуаре¹.

Г а л у а (1811–1831). Одной из наиболее поразительных была личность Эвариста Галуа, чья трагическая жизнь, оборвавшаяся в ранней юности, дала науке один из наиболее важных памятников, которые мы знаем. Страстная натура Галуа была покорена математикой с тех пор, как он познакомился с «Геометрией» Лежандра. Но им неистово владело другое чувство, чувство восторженной преданности республиканским и освободительным идеям, за которые он страстно и порою весьма неосторожно боролся. Однако смерть настигла его в возрасте двадцати лет, не в ходе этой борьбы, а на бессмысленной дуэли².

Галуа провел ночь перед дуэлью, проверяя заметки о своих открытиях. Это были: рукопись, которую отклонила Академия наук как непонятную (не нужно удивляться, что столь высоко интуитивные умы высказываются очень «темно»); затем письмо другу, с короткими поспешными замечаниями о других прекрасных идеях, с многократным повторением на полях одних и тех же слов «У меня нет времени». Действительно оставалось четыре часа до того, как он ушел туда, где его ждала смерть.

Все его глубокие идеи были сначала забыты, и лишь через пятнадцать лет ученые с восхищением обратили внимание на мемуар, который отклонила Академия. В этом мемуаре содержится полное преобразование высшей алгебры, и он проливает яркий свет на то, о чем до тех пор лишь догадывались наиболее крупные математики, одновременно связывая алгебраическую проблему с другими проблемами из совсем иных отраслей науки.

Но в связи с тем, что непосредственно касается нашей темы, рассмотрим отрывок из письма, написанного Галуа его другу, где он формулирует теорему о «периодах» некоторого класса интегралов. Эта теорема, ясная для нас, не могла быть понята учеными, жившими в эпоху Галуа: эти «периоды» не имели смысла при состоянии науки того времени; они приобрели смысл лишь благодаря некоторым принципам теории

¹Заметим, что на примере этого открытия Римана вновь можно наблюдать разницу между двумя видами интуиции, которые Пуанкаре считал идентичными. Вообще говоря, Риман обладал интуицией в высшей степени геометрического характера, как это отмечал Пуанкаре, однако в работе о простых числах, где интуиция Римана достигает вершин глубины и таинственности, геометрические элементы не играют существенной роли.

²Есть основания полагать, что дуэль, на которой был убит Галуа, была подстроена полицией. — *Прим. ред.*

функций, теперь классическим, но открытым четверть века спустя после смерти Галуа. Итак, нужно допустить: 1) что Галуа должен был каким-то образом составить себе представление об этих принципах; 2) что они должны были остаться для него неосознанными, так как на них у него нет и намека, хотя они сами по себе составляют важное открытие.

Случай Галуа заслуживает внимания в связи с подчеркнутым нами выше различием. С некоторой точки зрения он нам напоминает Эрмита. Как и он, Галуа является глубоким аналитиком, хотя и стал энтузиастом науки благодаря курсу геометрии Лежандра. Один из его первых опытов (когда он еще был на лицейской скамье) носил геометрический характер, но он остался единственным. Любопытная вещь: преподаватель математики в лицее у Галуа, г-н Ришар (заслугой которого является то, что он сразу же открыл необыкновенные способности Галуа), через пятнадцать лет стал преподавателем Эрмита; но это надо рассматривать как простое совпадение, так как очевидно, что гений таких людей является даром природы, независимо ни от какого образования.

С другой стороны, Галуа, который был очевидным представителем интуитивных умов по нашему определению (А), не кажется таковым по определению (Б). В доказательстве общей теоремы, которая содержит окончательное решение основной проблемы алгебры, нет следа «рассеянных идей», нет комбинаций разнородных по внешности принципов; его мысль, так сказать, интенсивна, но не экстенсивна. И я склоняюсь к тому, чтобы это же сказать об открытиях, содержащихся в его последнем письме (написанном в ночь перед его роковой дуэлью), хотя чтение его мыслей не могло проявиться так же отчетливо в этой серии лишь кратко высказанных результатов. Это не исключает возможности случайной связи между аспектами (А) и (Б) интуиции; но в случае Галуа эти аспекты кажутся независимыми друг от друга.

Вместе с тем ясно, что Галуа глубоко отличается от Эрмита, чье открытие квадратичных форм — типичный пример «мышления около».

С л у ч а й в р а б о т е П у а н к а р е. Кажется, никто не заметил, что нечто аналогичное есть в труде Пуанкаре «Новые методы небесной механики». В III томе (стр. 261) он говорит о вариационном исчислении и использует достаточное условие для минимума, эквивалентное условию, вытекающему из метода Вейерштрасса (о котором мы говорили на стр. 87). Но он не дает доказательства этого условия: он говорит о нем как об известном факте. Как мы указывали, метод Вейерштрасса не был опубликован к моменту, когда был написан этот том «Новых методов». Более того, у Пуанкаре нет никакого намека на открытие Вейерштрасса, что он должен был сделать, если бы получил

частным образом хоть какие-либо сведения. И особо нужно прибавить, что условие высказано в форме, несколько отличной (хотя в основном эквивалентной) от той, которая классическим образом вытекает из метода Вейерштрасса. Должны ли мы считать, что рассуждение Вейерштрасса — или другое, ему аналогичное — было открыто Пуанкаре, но осталось совершенно им не осознанным?¹

Исторические сравнения

В подобных случаях приходится признать, что некоторые части умственного процесса развиваются в столь глубоких слоях бессознательного, что остаются скрытыми от нашего сознания элементы, которые могут быть даже очень важными. Здесь мы вновь подходим к явлению раздвоения личности в том смысле, как его рассматривали психологи XIX века.

История дает нам даже примеры как бы посредников между этими двумя типами явлений. Сократ был уверен, что его идеи были ему продиктованы его личным демоном, и Нума Помпилий часто консультировался у нимфы по имени Эгерия.

Видимо, можно говорить об аналогичном примере и из области математики. Кардано был не только изобретателем знаменитого «карданова подвеса», но он основательно преобразил математику изобретением мнимых чисел. Напомним, что такое мнимая величина: алгебраические правила показывают, что квадрат всякого числа, положительного или отрицательного, есть число положительное; следовательно, говорить о квадратном корне из отрицательного числа является просто абсурдом. Кардано сознательно допускает такой абсурд и приступает к действиям над этими «мнимыми» числами.

Всякий объявил бы это чистым безумием, и тем не менее все развитие алгебры и анализа было бы невозможным без этого отправного

¹Случай покажется еще более странным, если заметить, что на той же 216 странице третьего тома, всего несколькими строками выше, Пуанкаре пишет: «Это исследование связано с трудным вопросом о второй вариации».

Однако в теории Вейерштрасса, т. е. в нашем современном вариационном исчислении, нет вопроса о второй вариации — она совершенно не используется.

Таким образом, на этой странице «Новых методов» получилось любопытное противоречие. Упоминание о «второй вариации» сделано человеком, который представления не имеет о новой теории. С другой стороны, Пуанкаре, показал, что он ее вполне себе представлял, когда формулировал свое условие (A) (такую форму он придал условию Вейерштрасса). Однако до появления новой теории никто не думал о вещах такого рода: знали лишь классическое, но не столь адекватное «условие Лежандра».

Следует ли сделать заключение, что Пуанкаре испытал своего рода раздвоение личности?

положения, которое, естественно, получило в XIX в. твердое и строгое обоснование. С тех пор стало возможным утверждать, что наиболее короткий и наилучший путь между двумя истинами в действительной области часто проходит через мнимую область.

Мы упоминаем о Кардано одновременно с Сократом и Нумой Помпилием, так как некоторые из его биографов сообщают, что были и в его жизни периоды, когда таинственный голос что-то внушал ему. Но свидетельства на этот счет не лишены противоречий.

ОБЩЕЕ НАПРАВЛЕНИЕ, ДАННОЕ ИССЛЕДОВАНИЮ

Прежде чем попытаться что-либо открыть или попробовать решить определенную задачу, ставится следующий вопрос: что мы будем пытаться открыть? Какую проблему мы попытаемся решить?

Две концепции изобретения

В своем (уже упомянутом) вступительном слове на коллоквиуме в Центре синтеза Клапаред заметил, что существует два вида изобретений: один характеризуется тем, что цель известна и нужно найти средства, чтобы ее достигнуть, так что ум идет от цели к средству, от вопроса к решению; другой, напротив, состоит в том, чтобы открыть факт и затем представить себе, чему он мог бы служить, так что на этот раз ум идет от средства к цели и ответ доходит до нас раньше, чем вопрос.

И вот, как это ни кажется парадоксальным, чаще всего встречается второй вид изобретений, и он становится все более общим по мере развития науки. Практическое приложение находят тогда, когда его не ищут, и можно сказать, что вся программа современной цивилизации зиждется на этом принципе. Когда греки, приблизительно за 4 века до новой эры, рассматривали эллипс. (т. е. плоскую кривую, порожденную движением точки M , сумма расстояний которой $MF + MF'$ от двух данных точек F и F' постоянна), и вывели отсюда многочисленные и замечательные следствия, они не могли думать ни о каком использовании этих открытий. И тем не менее без этих исследований Кеплер не мог бы открыть спустя 2000 лет законы движения планет и Ньютон не мог бы открыть закон всемирного тяготения.

Результаты более практического характера подчиняются тому же правилу. Первоначально воздушные шары наполняли водородом или светильным газом, что создавало серьезную угрозу взрыва. В настоящее время мы можем наполнять эти шары негорючими газами. Этот процесс стал возможен по двум причинам: во-первых потому, что сумели узнать, какие вещества содержатся в атмосфере солнца и какие там не содержатся; и, во-вторых, потому, что учеными, в том числе Рэлеем

и Рамзаем, были начаты исследования по определению плотности азота с точностью до 0,0001 вместо точности до 0,001, которая была получена раньше. Оба этих вопроса были изучены прежде, чем предвидели какое бы то ни было их применение.

Но мы должны прибавить, что, естественно, и приложения полезны и фактически необходимы для теории, потому что они ставят перед теорией новые вопросы. Можно сказать, что приложения и теория находятся в том же отношении, как лист и дерево: дерево держит лист, но лист питает дерево. Не желая перечислять различные важные физические примеры, напомним лишь, что первая математическая основа греческой науки — геометрия — была вызвана практической необходимостью, как это показывает само ее название — «землемерие».

Но этот пример исключителен в том смысле, что чаще всего практические вопросы решаются с помощью существующих теорий: практические приложения открытий чистой науки, как бы важны они не были, приходят обычно гораздо позднее (хотя в последнее время эта отсрочка может быть значительно сокращена, как это было при изобретении радиотелеграфа, который начал функционировать уже через несколько лет после открытия Герцем радиоволн, или совсем недавно, при открытии атомной энергии). Редко бывает, чтобы важные математические исследования были предприняты непосредственно с целью их определенного практического применения. Чаще всего исследователи руководствовались общим мотивом всякой научной работы — желанием знать и понимать. Следовательно, из двух названных нами видов изобретения математикам известен лишь второй.

Выбор темы

Оставляя в стороне практические приложения, которые обычно, если могут быть сделаны, будут сделаны гораздо позднее, заметим, что математические открытия могут быть более или менее богаты теоретическими следствиями. Чаще всего они остаются нам неизвестными так же полностью неизвестными, как людям, установившим впервые химический состав солнечной атмосферы были неизвестны невозгораемые воздушные шары.

Как же мы должны выбирать тему исследования? Этот деликатный выбор является одной из наиболее важных сторон исследования — именно по этому выбору мы обычно судим о значении ученого.

Уже на этом выборе мы основываем наше суждение о начинающих исследователях. Студенты у меня часто консультировались по вопросу выбора темы; когда ко мне обращаются за таким советом, я его охотно даю, но должен признаться, что при этом (предварительно, конечно)

я склонен считать спросившего человеком второго сорта. В другой области такого же мнения придерживается крупный индолог Сильвен Леви, который мне рассказал, что когда ему был задан такой вопрос, у него было желание ответить: «Мой юный друг, вы слушали мои лекции в течение трех или четырех лет и вы ни разу не заметили, что нужно было бы углубить?».

Но чем руководствоваться в этом важном и трудном выборе? Ответ почти не вызывает сомнения: это тот же ответ, который нам дал Пуанкаре по поводу средств делать открытия, тот же для «мотора», что и для «механизма». Гид, которому мы должны довериться, это то чувство красоты, та особая эстетическая чувствительность, важность которых он подчеркивал.

Как это отмечает Ренан¹, научный вкус существует так же, как существует вкус художественный или литературный; и этот вкус может быть более или менее верным в зависимости от индивида.

О плодотворности наших будущих результатов, о которой, строго говоря, мы чаще всего заранее ничего не знаем, нас может информировать это чувство красоты, и я не вижу ничего другого, что бы нам позволило строить догадки. По крайней мере, как мне кажется, оспаривать это — было бы лишь спором о словах. Не зная ничего более, мы чувствуем, что продолжать исследование по такому-то направлению стоит труда; мы чувствуем, что вопрос сам по себе заслуживает внимания и что его решение будет иметь некоторую ценность для науки независимо от того, будет ли оно или не будет иметь в будущем приложение. Каждый волен называть это чувством красоты или нет. Бесспорно, это то, о чем думали греческие геометры, изучая эллипс, так как они не могли думать ни о чем другом.

Что касается приложений, даже совершенно непредвиденных, то в дальнейшем они чаще всего появляются, если наше начальное чувство было верным. Я приведу несколько личных примеров, но прошу извинить это неоднократное, обращение к моему личному опыту, о котором я, естественно, осведомлен лучше всего.

Когда я представил мою докторскую диссертацию на рассмотрение Эрмиту, он заметил, что было бы очень полезно найти приложения. В тот момент я не знал ни одного возможного приложения. Но в промежутке между днем, когда я подал рукопись, и днем, когда я защищал диссертацию, я узнал, что французский институт предложил в качестве конкурсной темы решить одну важную проблему (ту, о которой мы говорили на стр. 93 в связи с Риманом); и оказалось, что результаты моей

¹Renan "L'Avenir de la Science", p. 115 (см. рус. перевод: Эрнест Ренан, «Будущее науки», т. 1-2, Киев, изд. К. Б. Фукс, 1902).

диссертации дают решение этого вопроса. Я руководствовался лишь чувством интереса к проблеме, и оно меня вывело на правильный путь.

Несколькими годами позднее, снова занимаясь этими же вопросами, я получил один очень простой результат¹, который мне показался элегантным; я его сообщил моему другу, физику Дюгему; он меня спросил, каковы применения этого результата. Когда я ответил, что до сих пор не думал над этим, Дюгем, который был не только выдающимся физиком, но и замечательным художником, сравнил меня с живописцем, который начал рисовать пейзаж не выходя из мастерской, и который затем идет на прогулку, чтобы открыть в природе пейзаж, соответствующий его картине. Это сравнение показалось мне верным, но в действительности я был прав, не заботясь о приложениях: они пришли позднее.

За несколько лет до этого (в 1893 г.) меня заинтересовал один алгебраический вопрос (об определителях). Решая его, я не подозревал, что он может быть как-то полезен, и удовлетворился лишь чувством, что он заслуживает интереса; а в 1900 г. появилась теория Фредгольма², для которой результат, полученный в 1893 г., был существен.

Чрезвычайно удивительные, я бы даже сказал ошеломляющие, факты такого рода дает нам поразительное развитие современной физики. В 1913 г. Эли Картан один из первых французских математиков, стал размышлять в связи с теорией групп об одном замечательном классе аналитических и геометрических преобразований. Для специального рассмотрения этих преобразований в ту эпоху не было никакого основания, кроме их эстетических свойств. А через 15 лет физики открыли опытным путем удивительные явления, связанные с электронами, и они смогли их понять лишь благодаря идеям Картана 1913 г.

Но нельзя привести более типичный пример в этом смысле, чем современный функциональный анализ. Когда Иоганн Бернулли искал в XVIII в.³, какова должна быть форма кривой, падая вдоль которой небольшое весомое тело проходит расстояние в минимальный промежуток времени, он был привлечен красотой этой проблемы, столь отличной от всего, что рассматривалось до тех пор, хотя и представлявшей явную аналогию с проблемами, которые уже рассматривались в исчислении бесконечно малых. Им могла руководить лишь эта красота. Нельзя было и подозревать в его время, что впоследствии вариационное

¹Для специалистов: это была «теорема композиции».

²Это та самая теория, мимо которой я прошел, «не заметив ее», как я рассказывал об этом в гл. IV. Утешением для моего самолюбия было лишь то, что я дал звено, оказавшееся необходимым для выводов Фредгольма.

³Небольшая неточность автора: задача о брахистотроне была поставлена и решена Иоганном Бернулли (а также Лейбницем, Ньютоном, Яковом Бернулли и Лопиталем) в конце XVII века. — *Прим. ред.*

исчисление — т. е. теория проблем такого вида — поможет усовершенствовать механику в конце XVIII и в начале XIX в.

Еще более удивительным оказалась судьба того обобщения этой первоначальной концепции, которое было развито в конце XIX в., главным образом под мощным влиянием Вольтерра. Почему этот крупный итальянский геометр стал оперировать с функциями так, как в исчислении бесконечно малых оперируют с числами, т. е. рассматривая функцию как непрерывно меняющийся элемент? Только потому, что он отдавал себе отчет в том, что этот метод должен был гармонично дополнить структуру математического здания, точно так же, как архитектор видит, что здание будет лучше уравновешено, если прибавить к нему одно крыло. Уже тогда можно было представить себе (как мы объясняли в гл. III), что гармоничное творение такого типа может помочь решать такие связанные с функциями проблемы, которые раньше рассматривались лишь с одной точки зрения; но то, что эти «функционалы», как называли это новое понятие, могут быть непосредственно связаны с действительностью, нельзя было считать ничем иным, как нелепостью. Функционалы казались математическим понятием, существенно и полностью абстрактным.

И вот, произошла именно нелепость: столь мало понятное и трудно постижимое новое понятие, каким оно могло казаться современным физикам, с которым умеют обращаться только студенты, уже свободно владеющие математическим анализом, оказалось абсолютно незаменимым, чтобы математически представить любое физическое явление (согласно недавней теории «волновой механики»). Каждую из доступных наблюдению величин — давление, скорость и т. д., — которую обычно определяли с помощью чисел, нельзя больше рассматривать как число — математически она представляется функционалом!

Эти примеры дают достаточно полный ответ на сомнение, выраженное Уолласом по поводу значения чувства красоты в качестве «двигателя» открытия. Наоборот, создается впечатление, что у нас в математике это чувство является чуть ли не единственным полезным.

Мы еще раз видим, что выбор направления мысли включает в себя эмоциональные элементы, и последнее обязательно имеет место при непрерывности внимания, при той верности ума своей цели, о важности которой мы говорили в гл. IV¹. На этой стадии, как и для вдохновения, выбор руководствуется чувством красоты; но на этот раз мы обращаемся к нему сознательно, в то время как в области бессознательного это чувство работает, чтобы дать нам вдохновение.

¹Рассматривая один из вопросов аналагматической геометрии (см. гл. IV), я недооценил его красоты и не уделил ему в достаточной мере внимания.

Направление изобретательской работы и стремление к оригинальности

Могут ли другие причины влиять на выбор исследователем направления?

Один психоаналитик с полным основанием указал мне, что на исследовательскую работу часто могут оказывать влияние причины эмоционального характера (он мне привел некоторые типичные примеры, взятые из жизни Фрейда). Однако шансов на то, что это относится к математике, меньше — ввиду абстрактного характера этой науки, где, употребляя знаменитое выражение Бертрانا Рассела, «никогда не знают, о чем говорят, и верно ли то, что говорят».

Поднимался также вопрос, не могут ли исследователи руководствоваться менее похвальным видом страсти, проистекающим из человеческого тщеславия: желанием сделать что-нибудь оригинальное.

Мне кажется, что в искусстве или в литературе подобная вещь возможна. Или, точнее, оставляя в стороне вопрос о тщеславии, отметим, что оригинальность является одним из тех требований, которое должен предъявлять к себе каждый артист или писатель. Само собой разумеется, это замечание не относится к действительно великим творцам. Например, как видно из письма Моцарта, ему не нужно было думать о том, чтобы быть оригинальным. Но не отразилась ли эта необходимость на формировании некоторых школ живописи? Или на произведениях, в которых некоторые писатели пытались парадоксальным образом изобразить поступки или психологию известных личностей? Такой вопрос можно поставить.

Возможно, что есть какая-то связь между подобными случаями и теми хорошо известными случаями, когда поэты (или другие художники) создавали произведения, находясь в аномальном состоянии (например, Колридж в состоянии сна, вызванного опиумом). Уоллас¹, который рассказывает о таких примерах, считает, что легкая диссоциация духа» может быть полезной художнику, который желает порвать со своими собственными привычками мыслить и видеть, и с традициями своей школы». Не составляет особого исключения то, что как доводится слышать, поэтические произведения создаются во время сна, тогда как мы видели, что это редкое, если не вообще малоправдоподобное явление для математического творчества.

¹“The Art of Thought”, p. 206–210.

Уоллас указывает на тот факт, что очень крупные ученые не стремятся к оригинальности, им это не нужно. Он говорит, что для них «в моменты работы устанавливается гармония между интенсивной деятельностью всей высшей и низшей нервной системы, с одной стороны, и сознательным волевым усилием, с другой».

В случае математика, который, как мы говорили вначале, является служителем, а не хозяином, положение действительно иное. Каждый результат, каждое решение, которое становится ему известным, ставит перед ним новые проблемы. И действительно, мне трудно было бы привести больше чем две или три работы, которые я назвал бы скорее странными, чем действительно оригинальными.

Тем не менее, ученый может часто оказаться в затруднительном положении, приступая к изучению той или иной проблемы не потому, что он знает, что она была решена, а наоборот, потому, что он не знает, решена ли она, что сделало бы его работу бесполезной; или — и это более бескорыстно с его стороны — естественно, что его внимание может привлечь вопрос (не лишенный сам по себе значения) просто потому, что им пренебрегали до сих пор. Так бывало часто со мной; я даже могу добавить, что, начав однажды работу над группой вопросов и заметив, что некоторые авторы избрали то же направление, я оставил эту тему и попытался найти что-нибудь другое. Мне говорили, что некоторые корифеи современной физики не раз поступали таким же образом.

Должны ли мы изображать ученых как людей, желающих сделать какое-нибудь открытие с единственной целью «привлечь внимание публики» или «обеспечить себе приятное и независимое положение»? (Поль Сурио). Можно допустить, что в жизни некоторых ученых иногда существенны мотивы такого рода, которые когда мы склонны ослабить наши усилия, играют роль классической фразы: «Ты спишь, Брут». Возможно это была не простая отписка со стороны Ампера, когда он отвечая на постоянные напоминания и опасения Юлии Ампер, писал, что опубликование одного из его открытий — хорошее средство, чтобы получить место преподавателя в лицее. Но не такие чувства привели его к открытию; и я не могу даже себе представить, чтобы ученый мог сделать открытие, руководствуясь, главным образом, таким чувством. Исследователи с подобным направлением ума могут получить лишь посредственные результаты; идет ли речь о выборе темы или о методе ее исследования, человек, лишенный известной любви к науке, не может добиться успеха, так как он не в состоянии сделать правильный выбор¹.

¹ Точка зрения, аналогичная нашей, изложена в недавно выпущенной брошюре Харди (G. H. Hardy "A Mathematician's Apology"). Хотя он и не дает полного определения красоты (или «серьезности», как он это называет) математического вопроса или результата, — определения, которое, естественно, должно учитывать и эстетическую сторону дела, но Харди очень тонко и глубоко анализирует вопрос об условиях, которые должны быть соблюдены при таком определении.

Он рассматривает также вопрос о том, что влияет на исследователя. Он указывает три важных мотива и первым из них является, естественно, желание узнать истину. По причинам, о которых я говорил, я больше чем он отстаиваю положение, что именно этот мотив преобладает и даже необходим.

Заключительные замечания

Я попытался резюмировать и интерпретировать личные наблюдения, собранные с помощью коллег, занимающихся исследовательской работой. Было бы интересно исследовать другие важные аспекты темы, особенно «объективные» аспекты, о которых нам случалось упоминать: например, возможные связи между изобретательской мыслью и физиологией организма. Стоило бы уделить внимание идеям, в какой-то мере аналогичным идеям Галля. Но как? Для этого нужен более квалифицированный специалист, чем я, и лучше знающий физиологию мозга. Но мы наталкиваемся здесь на трудность, о которой я говорил вначале и которая заключается в том, что, с одной стороны, математики недостаточно знают нейробиологию, а с другой, — нельзя требовать от нейробиологов, чтобы они настолько глубоко изучили математику, как это требуется. Настанет ли такое время, когда математики будут настолько знать физиологию мозга, а нейробиологи будут в такой степени в курсе математических открытий, что станет возможным действенное сотрудничество?

Я не отважился также сказать что-нибудь о социальных и исторических факторах, которые, несомненно, влияют на изобретение, как и на все прочее. Я мало что знаю о механизме этого влияния, и сомнительно, что этот механизм кому-либо известен. Попытки, подобные попытке Тэна в его «Философии искусства», несомненно, преждевременны; хотя на принципах, из которых при этом исходили, печать гения, выводы, к которым пришли, весьма гипотетичны. В самом деле, трудности при таких попытках очевидны: не только невозможен какой-либо эксперимент в этой области, но и слишком редки люди с большим творческим дарованием, не говоря уже о гениях), чтобы можно было широко применить сравнительные методы. Поэтому проблема, которой мы здесь занимались, как и проблема, которой занимался Тэн, одна из самых трудных среди выдвигаемых перед нами историй. Воздействие общества определяет прогресс математически так же неосознанно и в достаточной мере таинственно, как оно определяет развитие литературы и искусства. Несомненно кое-что верно в том что говорит Клейн (в связи с теорией Гальтона о наследственности) об интуитивных и логических качествах ума (и то же самое можно сказать о математической

способности вообще, и о том, как различные люди используют конкретные представления); но очень маловероятно, чтобы все обстояло так просто, как это представляли себе в школе Тэна.

Конечно, не случайно, что в эпоху Возрождения, особенно в Италии, было столько необыкновенных людей во всех сферах человеческой деятельности: Бенвенуто Челлини и Леонардо да Винчи одновременно с Галилеем; но сомнительно, что причины этого замечательного явления таковы, как предполагает Тэн¹.

Положение могло бы стать яснее, если бы вместо того, чтобы рассматривать общие случаи, мы изучили несколько индивидуальных. Говоря это, я имею в виду Кардано, который жил в ту же эпоху и поистине был одним из самых необыкновенных людей этого необыкновенного периода. И вполне естественным было бы ожидать, что открытие мнимых чисел, которое кажется скорее безумным, чем логичным, и которое осветило всю математику, было сделано человеком, чья полная приключений жизнь не всегда была образцовой с точки зрения морали, человеком, который с детства страдал галлюцинациями до такой степени, что Ломброзо выбрал его как типичный пример в главе «Гений и безумие» своей книги «Гений».

Если не прибегать к рассмотрению столь особых случаев, то исключительный характер рассматриваемых явлений становится препятствием для исследования, как только мы отходим от данных, получаемых путем самонаблюдения. С другой стороны, можно поставить вопрос, не могут ли помочь такого рода явления при изучении процессов, происходящих в других областях психологии. Например, мы видели, что рассмотренные В гл. VI проблемы имеют общие черты с вопросом о роли образов, рассмотренным Тэном или с проблемами, изучаемыми гештальтпсихологией. В соответствии с правилом, которое кажется применимым к любой естественной науке (и из фактов, отмеченных на стр. 91–92 (гл. VIII) следует, что оно применимо даже к математике), именно исключительное явление может помочь объяснить явление обычное; следовательно, все, что мы можем обнаружить в связи с изобретательским творчеством или даже, как в этой работе, с особой областью изобретательской деятельности, может пролить свет на психологию в целом.

¹Случайно ли сходство эволюций идей у греческих философов и у мыслителей нашей эры по вопросу о словах и о мышлении без слов и не проявляется ли в этом какой-то общий закон эволюции мышления? Естественно, этого нельзя утверждать, основываясь лишь на двух приведенных примерах. Но если бы это было доказано, такой факт был бы многозначителен. Возможно, что большой интерес представляет изучение этой проблемы в азиатской или в арабской философии (особенно испанского периода).

АНКЕТА О МЕТОДАХ РАБОТЫ МАТЕМАТИКОВ

Enseignement Mathématique («Математическое образование»)
т. IV (1902) и т. VI (1904)

1. Когда и при каких обстоятельствах, по вашим воспоминаниям, появился у вас интерес к математике? Является ли он у вас наследственным? Есть ли среди ваших предков или других членов вашей семьи (братьев, сестер, дядей, двоюродных братьев и сестер и т. д.) люди, имеющие математические способности? Оказали ли влияние на формирование вашей склонности к математике их пример и их личное воздействие?

2. К каким отраслям математики вы чувствуете наибольшую склонность?

3. Что вас больше интересует; математика как таковая или ее применение в естествознании?

4. Помните ли вы точно методику вашей работы во время учебы, когда вы стремились не столько к собственным исследованиям, сколько к усвоению чужих результатов? Можете ли вы сообщить что-нибудь интересное по этому поводу?

5. Как вы намеревались продолжать свое образование после прохождения обычного математического курса (соответствующего программе для получения степени лиценциата или звания «агреже»¹)? Стремись ли вы до опубликования серьезных вещей расширять свои знания по многим направлениям математики, или, наоборот, углубленно изучали узкий вопрос, не касаясь того, что не было необходимым для его решения, и лишь постепенно расширяли круг вопросов? Или вы предпочитали другие методы; можете ли вы их указать? Какой из них вы предпочитаете?

6. Обращали ли вы внимание на то, как происходил процесс получения вами тех результатов, которые вы больше всего цените?

7. Какую роль по-вашему играют случай или вдохновение в математических открытиях? Так ли велика эта роль, как кажется?

8. Замечали ли вы когда-нибудь, что открытия или решения вопросов, которыми вы раньше бесплодно занимались, получались у вас внезапно, когда вы уже думали над вопросами совершенно иного характера?

Случалось ли вам вычислять или решать задачи во сне? Являлись ли вам при утреенном пробуждении совершенно готовые решения или открытия

¹Примерно соответствует сдаче кандидатского минимума по специальности — *Прим. ред.*

либо совершенно неожиданные, либо те, над которыми вы тщетно думали накануне или в предыдущие дни?

9. Считаете ли вы, что ваши основные открытия являлись результатом целенаправленной работы, или они возникали у вас, так сказать, спонтанно?

10. Занимаясь работой, которую вы намерены опубликовать, вы получаете некоторые промежуточные результаты. Формулируете ли вы сразу каждую часть работы? Или, напротив, записывая результаты в виде простых пометок, вы редактируете затем всю работу целиком?

11. Какое значение придаете вы изучению специальной математической литературы? Какой совет дали бы вы по этому поводу молодому математику, имеющему обычное классическое образование?

12. Прежде чем приступить к какому-либо вопросу, стараетесь ли вы сначала изучить работы, посвященные этой же теме?

13. Или, напротив, вы предпочитаете предоставить своему разуму полную свободу и лишь при последующем чтении соответствующей литературы устанавливаете, какая часть полученных вами результатов принадлежит вам?

14. Приступая к какому-нибудь вопросу, пытаетесь ли вы рассматривать поставленные проблемы наиболее общим способом? Или же вы предпочитаете рассматривать сначала частные случаи или случай упрощенный, постепенно их обобщая?

15. Различаете ли вы с методической точки зрения творческую и редакционную работу?

16. Считаете ли вы, что ваш стиль работы после окончания обучения остался по существу тем же самым?

17. В процессе работы над вашими основными исследованиями занимались ли вы непрерывно изучаемым вами вопросом или же прерывали эту работу, возвращаясь к данной теме позднее?

Если вы испробовали оба метода, то какой из них вам кажется лучше?

18. Какое на ваш взгляд минимальное время следует уделять математике в течение дня, недели, года, чтобы, имея и другие каждодневные занятия, математик смог бы плодотворно развивать которые ее ветви? Считаете ли Вы, что при возможности выбора наилучшим способом являются ежедневные, хотя бы кратковременные занятия, минимум по часу, например?

19а). Какие занятия или развлечения вы предпочитаете помимо изучения математики в часы вашего досуга, каковы ваши основные вкусы?

19б). Считаете ли вы, что занятия живописью, литературой, музыкой или поэзией отвлекают от математического творчества, или по-вашему, наоборот, они ему способствуют, давая отдых мозгу?

19в). Интересуетесь ли вы вопросами метафизического, этического или религиозного характера или, напротив, они вас отталкивают?

20. Если ваша служба занимает основное ваше время, то как вы ее сочетаете с личной научной работой?

21. Какие советы в заключение вы дадите:

а) молодому человеку, получающему математическое образование;

б) молодому математику, окончившему обычное обучение и желающему заниматься научной работой?

Вопросы, касающиеся образа жизни математика

22. Считаете ли вы полезным для математика придерживаться некоторого режима: диеты, определенных часов приема пищи, соблюдения интервалов?

23. Какую ежедневную продолжительность сна вы считаете нормальной?

24. Считаете ли вы, что занятия математикой в течение дня должны прерываться другими занятиями или физическими упражнениями, соответствующими возрасту и силам каждого?

25. а) Считаете ли вы, напротив, что лучше сидеть за своей работой целый день, не отвлекаясь ничем, а последующие дни полностью отдыхать?

б) Бывают ли у вас периоды особенного увлечения работой и возбуждения, сменяющиеся затем периодами депрессии и неспособности работать?

в) Замечали ли вы регулярность в смене таких периодов, и если да, то сколько дней продолжается у вас фаза активности и сколько — фаза инертности?

г) Оказывают ли ощутимое влияние на вашу работоспособность окружающие вас физические и материальные условия (температура, свет и темнота, время года и т. д.)?

26. Какие физические упражнения вы делаете или делали для отвлечения от умственной работы? Какие из них вы предпочитаете?

27. Утром или вечером вы предпочитаете работать?

28. Используете ли вы время отпуска, если вы его берете, для занятий математикой (и в какой степени), или вы целиком посвящаете отпуск развлечениям и отдыху?

Заключительные замечания

Имеется, конечно, множество других деталей, которые было бы полезно выяснить с помощью анкеты:

29. а) Стоя, сидя или лежа легче работать?

б) пользуясь черной доской или бумагой?

в) в какой степени оказывает влияние внешний шум?

г) можно ли продолжать думать над проблемой во время прогулки, во время поездки по железной дороге?

д) влияние возбуждающих и успокаивающих средств: табака, кофе, алкоголя и т. д. — на количество и качество работы.

30. Было бы интересно, с психологической точки зрения, узнать, какого рода «внутренний язык» используют математики, являются ли их внутренние образы двигательными, слуховыми, визуальными или смешанными в зависимости от темы.

Если кто-нибудь, близко знавший одного из умерших математиков, мог бы сообщить некоторые сведения, отвечающие на часть вышеназванных вопросов, мы бы попросили их сделать это. Этим они бы внесли важный и полезный вклад в историю математики и ее развитие.

Добавление автора

Последний, 30-й вопрос имеет отношение к нашей дискуссии в гл. VI, и было бы особенно важно получить ответы по этому поводу. Эти ответы должны быть двух видов, относящихся соответственно к обычной мысли и к мысли исследовательской. Более того, было бы полезным прибавить к 30-му вопросу еще следующие:

31. а) Присутствуют ли в процессе изобретения мысленные образы или слова, в сознании или в краевом сознании (в том смысле, в каком оно было определено в книге Уолласа «Art of Thought» или под названием «Прихожая сознания» в книге Гальтона «Inquiries into Human Faculty», стр. 203, издание 1883 г., и стр. 146, издание 1910 г.)?

б) Тот же вопрос относительно того, что эти представления или мысленные слова могут символизировать?¹

¹ Лишь несколько математиков ответили на вопросы 31 а) и 31 б), в частности в связи с топологическими рассуждениями типа доказательства теоремы Жордана (см. гл. VII стр. 81). У всех без исключения геометрический аспект рассуждения является вполне сознательным. Один или двое из них чувствуют сразу же возможность выразить в аналитической форме любое звено этого рассуждения и даже способны немедленно найти этот перевод на аналитический язык (так что аналитическая форма доказательства должна находиться в краевом сознании); другим нужно приложить для этого большее или меньшее усилие.

ДРУГОЕ РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ УМАМИ: ВЗГЛЯД НА ОСНОВУ МОРАЛИ

В гл. VI мы установили существование двух различных видов умов: у представителей одного из них (например, у Макса Мюллера) мысль обязательно сопровождается словами, у представителей же другого вида (таких, как Гальтон) этот внутренний язык не является необходимым атрибутом мышления. Эти две категории людей оказались настолько взаимоисключающими, что существование одной из них является для другой явлением трудно объяснимым.

Однако этот случай не является единственным, когда я мог заметить подобное разделение: оно существует и по поводу одного из самых основных, — если не самого основного — вопросов психической жизни человека, а именно, по вопросу об основе морали.

Впервые я обратил на это внимание во время бесед, которые я вел в Бордо с крупным философом Эмилем Дюркхеймом: он считал, что мораль может и должна базироваться на научной основе. Я же считаю, что одна лишь научная основа не является достаточной для построения морали — мнение, которое Дюркхейм встретил фразой вроде следующей: «Вы увидите, он еще наговорит глупостей».

Тогда я не уделил этому мнению того внимания, которого оно заслуживало, но оно вновь проявилось в связи с моей статьей, посвященной моральной роли науки и идеям, высказанным по этому поводу нашим знаменитым Анри Пуанкаре. Эту статью я послал в один из журналов. Подчеркивая важную моральную роль науки для формирования и развития того высокого качества, которое называют научной честностью, Пуанкаре, тем не менее, отказался считать науку единственной основой морали, говоря, что в действительности речь идет о двух различных логических областях, о двух видах предложений, из которых одни формулируются в изъявительном наклонении, а другие — в повелительном. И Пуанкаре считал невозможным, исходя из того, что есть, и извлекая из этого все возможные следствия, объявлять то, что должно быть (т. е. то, что философы нашей эпохи называют «нормативными» предложениями).

«Желание вывести из посылок в изъявительном наклонении заключения в повелительном наклонении является принципиально абсурдным», — заявил Пуанкаре.

Итак, когда я послал в журнал упомянутую выше статью, где я рассматривал эти идеи Пуанкаре, представитель редакции журнала попросил меня

устранить как «катастрофическое» место, касающееся этого принципиального положения. Он объяснил, что редакция считает, «в противоположность мнению Пуанкаре, что отношения между наукой и моралью не могут содержать коренных разногласий. Если верно то, что наука изучает реальные факты, а мораль диктует правила поведения, то эти правила могут быть применимы лишь в том случае, когда они основаны на изучении человечества т. е. базируются на психологических и социальных науках. Мораль подобна медицине, целью которой является осуществить идеальное здоровье людей, но эта цель может быть достигнута лишь благодаря науке. Поскольку мораль ведет к идеалу человеческого существования, только психология и социология могут дать средства для реализации этого идеала».

Я считаю первую часть этой последней фразы единственным нормативным элементом, и именно с этим связано принципиальное положение Пуанкаре. Это положение представляется абсурдным тем, кто воспринимает последнюю фразу как единое целое, не различая двух элементов, ее составляющих. Оно кажется неизбежным тем, кто проводит такое различие.

Таким образом, мы находимся в ситуации, совершенно подобной той, которая возникает в связи с вопросом об употреблении слов в процессе мышления; перед нами две категории умов, из которых одна отрицает то, что кажется очевидным для другой, и каждая считает другую безрассудной и взирает на нее с сожалением.

Кант ввел в философию понятие «а п р и о р и» для обозначения того, что предшествует эксперименту и обуславливает его. Такая система а п р и о р н ы х понятий лежит в основе всех тех идей, которыми мы обмениваемся между собой. Но надо, чтобы эти а п р и о р н ы е понятия были общими для всех. Обычно так оно и бывает (без чего, очевидно, не существовало бы человеческого разума). Однако мы видим, что указанный принцип допускает по крайней мере одно исключение.

А. Пуанкаре. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО

Генезис математического творчества является проблемой, которая должна вызывать живейший интерес психолога. Кажется, что в этом процессе человеческий ум меньше всего заимствует из внешнего мира и действует, или только кажется действующим, лишь сам по себе и сам над собой. Поэтому, изучая процесс математической мысли, мы можем надеяться постигнуть нечто самое существенное в человеческом сознании.

Это было понято уже давно, и несколько месяцев назад журнал «Математическое образование», издаваемый Лезаном и Фэром, опубликовал вопросник, касающийся умственных привычек и методов работы различных математиков. К тому моменту, когда были опубликованы результаты этого опроса, мой доклад был в основном уже подготовлен, так что я практически не мог ими воспользоваться. Отмечу лишь, что большинство ответов подтвердило мои заключения; я не говорю об единогласии, так как при всеобщем опросе на него и нельзя надеяться.

Первый факт, который должен нас удивлять, или, вернее, должен был бы удивлять, если бы к нему не привыкли, следующий: как получается, что существуют люди, не понимающие математики? Если математики используют лишь логические правила, которые принимаются всеми разумными людьми; если математика основана на принципах, которые являются общими для всех людей и которые никто, не будучи сумасшедшим, не станет отрицать, то как получается, что есть люди, совершенно не приемлющие математики?

Тот факт, что не все способны на открытие, не содержит ничего таинственного. Можно понять еще и то, что не все могут запомнить доказательство, которое когда-то узнали. Но то обстоятельство, что не всякий человек может понять математическое рассуждение, когда ему его излагают, кажется совершенно удивительным. И тем не менее людей, которые лишь с большим трудом воспринимают эти рассуждения, большинство; это неоспоримо, и опыт учителя средней школы подтверждает это.

И далее, как возможна ошибка в математике? Нормальный разум не должен совершать логической ошибки, и тем не менее есть очень тонкие умы, которые не ошибутся в коротком рассуждении, подобном тем, с которыми ему приходится сталкиваться в обыденной жизни и которые не способны провести или повторить без ошибки более длинные математические доказательства, хотя в конечном счете последние являются совокупностью маленьких

¹Добавлено в русском издании. — *Прим. ред.*

рассуждений совершенно аналогичных тем, которые эти люди проводят так легко. Нужно ли прибавить, что и сами хорошие математики не являются непогрешимыми?

Ответ, как мне кажется, напрашивается сам собой. Представим себе длинный ряд силлогизмов, у которых заключения первых служат посылками следующих; мы способны уловить каждый из этих силлогизмов и в переходах от посылки к рассуждению мы не рискуем ошибиться. Но иной раз проходит много времени между моментом, когда некоторое предложение мы встречаем в качестве заключения силлогизма, и моментом, когда мы вновь с ним встретимся в качестве посылки другого силлогизма, когда много звеньев в цепи рассуждений, и может случиться, что предложение забыто или, что более серьезно, забыт его смысл. Таким образом, может случиться, что предложение заменяют другим, несколько от него отличным, или что его применяют в несколько ином смысле, и это приводит к ошибке.

Если математик должен воспользоваться некоторым правилом, естественно, он сначала его доказывает и в момент, когда это доказательство свежо в его памяти, он прекрасно понимает его смысл и пределы применения и поэтому не рискует его исказить. Но затем, доверяя своей памяти, он применяет его механически, и если память его подведет, то правило может быть применено неверно. В качестве простого и почти вульгарного примера можно привести тот факт, что мы часто ошибаемся в вычислении, так как забыли таблицу умножения.

С этой точки зрения математические способности должны были бы сводиться к очень надежной памяти или к безупречному вниманию. Это качество подобно способности игрока в вист запоминать сброшенные карты; или — на более высоком уровне — способности шахматиста, который должен рассмотреть большое число комбинаций и все их держать в памяти. Каждый хороший математик должен был бы быть одновременно хорошим шахматистом и обратно; точно так же он должен был бы быть хорошим вычислителем. Действительно, так иногда случается и, например, Гаусс был одновременно гениальным геометром и рано проявившим себя очень хорошим вычислителем.

Но есть исключения, хотя я, пожалуй, не прав, называя это исключениями, так как иначе исключения оказались бы более многочисленными, чем правила. Напротив, это Гаусс был исключением.

Что касается меня, то я вынужден признать свою совершенную неспособность выполнить сложение без ошибки. Я был бы также очень плохим шахматистом; я мог бы хорошо рассчитать, что, совершив такой-то ход, я подвергся бы такой-то опасности; я рассмотрел бы много других ходов, которые я отбросил бы по другим причинам, и кончил бы тем, что совершил бы рассмотренный ход, забыв между делом об опасности, которую я раньше предвидел.

Одним словом, у меня неплохая память, но она недостаточна, чтобы сделать меня хорошим шахматистом. Почему же она меня не подводит в трудном математическом рассуждении? Это, очевидно, потому, что она руководствуется общей линией рассуждения. Математическое рассуждение не есть

простая совокупность силлогизмов; это силлогизмы, помещенные в определенном порядке, и порядок, в котором эти элементы расположены, гораздо более важен, чем сами элементы. Если я чувствую этот порядок, так что вижу все рассуждение в целом, то мне не страшно забыть один из элементов: каждый из них встанет на место, которое ему приготовлено, причем без всякого усилия со стороны памяти. Когда я изучаю некоторое утверждение, мне кажется, что я мог бы сам его открыть, или, вернее, если это иллюзия и я недостаточно силен, чтобы открыть его, я переоткрываю его во время изучения.

Отсюда можно сделать вывод, что это интуитивное чувство математического порядка, которое позволяет нам угадать гармонию и скрытые соотношения, доступно не всем людям. Одни не способны к этому деликатному и трудному для определения чувству и не обладают памятью и вниманием сверх обычных; и они совершенно неспособны понимать серьезную математику; таковых большинство. Другие обладают этим чувством в малой степени, но они имеют хорошую память и способны на глубокое внимание. Они запоминают наизусть детали одну за другой, они смогут понять математику и иногда ее применять, но они неспособны творить. Наконец третьи в большей или меньшей степени обладают той специальной интуицией, о которой я говорил, и они могут не только понимать математику, но и творить в ней и пытаться делать открытия с большим или меньшим успехом в зависимости от степени развития этой интуиции, несмотря на то, что их память не представляет собой ничего особенного.

Что же такое в действительности изобретение в математике? Оно состоит не в том, чтобы создавать новые комбинации из уже известных математических фактов. Это мог бы делать любой, но таких комбинаций было бы конечное число, и абсолютное большинство из них не представляло бы никакого интереса. Творить это означает не создавать бесполезных комбинаций, а создавать полезные, которых ничтожное меньшинство. Творить — это уметь распознавать, уметь выбирать.

Как делать этот выбор, я объяснял в другом месте: математические факты, которые заслуживают того, чтобы быть изученными, — это такие, которые по своей аналогии с другими фактами могут нас подвести к познанию математического закона, подобно тому, как экспериментальные факты подводят нас к познанию физического закона. Это такие факты, которые открывают нам связь между другими законами, известными уже давно, но ошибочно считавшимися не связанными друг с другом.

Среди выбранных комбинаций наиболее плодотворными часто оказываются те, которые составлены из элементов, взятых из очень далеких друг от друга областей. Я не хочу сказать, что для того, чтобы сделать открытие, достаточно сопоставить как можно более разношерстные факты; большинство комбинаций, образованных таким образом, было бы совершенно бесполезным, но зато некоторые из них, хотя и очень редко, бывают наиболее плодотворными из всех.

Я уже говорил, что изобретение — это выбор; впрочем, это слово, может быть, подобрано не совсем точно, — здесь приходит в голову сравнение с

покупателем, которому предлагают большое количество образцов товаров, и он исследует их один за другим, чтобы сделать свой выбор. В математике образцы столь многочисленны, что всей жизни не хватит, чтобы их исследовать. Выбор происходит не таким образом. Бесплодные комбинации даже не придут в голову изобретателю. В поле зрения его сознания попадают лишь действительно полезные комбинации и некоторые другие, имеющие признаки полезных, которые он затем отбросит.

Все происходит так, как если бы ученый был экзаменатором второго тура, который должен экзаменовать лишь кандидатов, успешно прошедших испытания в первом туре. Но все то, что я до сих пор говорил, можно заметить или заключить, лишь достаточно вдумчиво вчитываясь в труды по математике.

Настало время продвинуться немного вперед и посмотреть, что же происходит в самой душе математика. Я полагаю, что лучшее, что можно для этого сделать, это привести собственные воспоминания. Я припомню и расскажу вам, как я написал первую свою работу об автоморфных функциях. Я прошу прощения за то, что буду вынужден употреблять специальные термины, но это не должно вас пугать, так как вам их понимать совсем необязательно. Я, например, скажу, что при таких-то обстоятельствах нашел доказательство такой-то теоремы; эта теорема получит варварское название, которое многие из вас не поймут, но это не важно: для психолога важна не теорема, а обстоятельства.

В течение двух недель я пытался доказать, что не может существовать никакой функции, аналогичной той, которую я назвал впоследствии автоморфной. Я был, однако, совершенно неправ; каждый день я садился за рабочий стол, проводил за ним час или два, исследуя большое число комбинаций, и не приходил ни к какому результату.

Однажды вечером, вопреки своей привычке, я выпил черного кофе; я не мог заснуть; идеи теснились, я чувствовал, как они сталкиваются, пока две из них не соединились, чтобы образовать устойчивую комбинацию. К утру я установил существование одного класса этих функций, который соответствует гипергеометрическому ряду; мне оставалось лишь записать результаты, что заняло только несколько часов. Я хотел представить эти функции в виде отношения двух рядов и эта идея была совершенно сознательной и обдуманной; мной руководила аналогия с эллиптическими функциями. Я спрашивал себя, какими свойствами должны обладать эти ряды, если они существуют, и мне без труда удалось построить эти ряды, которые я назвал тета-автоморфными.

В этот момент я покинул Кан, где я тогда жил, чтобы принять участие в геологической экскурсии, организованной Горной школой. Перипетии этого путешествия заставили меня забыть о моей работе. Прибыв в Кутанс, мы сели в omnibus для какой-то прогулки; в момент, когда я встал на подножку, мне пришла в голову идея, без всяких, казалось бы, предшествовавших раздумий с моей стороны, идея о том, что преобразования, которые я использовал, чтобы определить автоморфные функции, были тождественны преобразованиям неевклидовой геометрии. Из-за отсутствия времени я не

сделал проверки, так как, с трудом сев в omnibus, я тотчас же продолжил начатый разговор, но я уже имел полную уверенность в правильности сделанного открытия. По возвращении в Кан я на свежую голову и для очистки совести проверил найденный результат.

В то время я занялся изучением некоторых вопросов теории чисел, не получая при этом никаких существенных результатов и не подозревая, что это может иметь малейшее отношение к прежним исследованиям. Разочарованный своими неудачами, я поехал провести несколько дней на берегу моря и думал совсем о другой вещи. Однажды, когда я прогуливался по берегу, мне так же внезапно, быстро и с той же мгновенной уверенностью пришла на ум мысль, что арифметические преобразования квадратичных форм тождественны преобразованиям неевклидовой геометрии.

Возвратившись в Кан, я Думал над этим результатом, извлекая из него следствия; пример квадратичных форм мне показал что существуют автоморфные группы, отличные от тех, которые соответствуют гипергеометрическому ряду; я увидел, что могу к ним применить теорию тета-автоморфных функций и что, следовательно, существуют автоморфные функции, отличающиеся от тех, которые соответствуют гипергеометрическому ряду — единственные, которые я знал до тех пор.

Естественно, я захотел построить все эти функции; я предпринял систематическую осаду и успешно брал одно за другим передовые укрепления. Оставалось, однако, еще одно, которое держалось и взятие которого означало бы падение всей крепости. Однако, сперва ценой всех моих усилий я добился лишь того, что лучше понял, в чем состоит трудность проблемы, и это уже коечто значило. Вся эта работа была совершенно сознательной.

Затем я переехал в Мон-Валерьян, где я должен был продолжать военную службу. Таким образом, занятия у меня были весьма разнообразны. Однажды, во время прогулки по бульвару, мне вдруг пришло в голову решение этого трудного вопроса, который меня останавливал. Я не стал пытаться вникать в него немедленно и лишь после окончания службы вновь взялся за проблему. У меня были все элементы и мне оставалось лишь собрать их и привести в порядок. Поэтому я сразу и без всякого труда полностью написал эту работу.

Я ограничусь лишь этим одним примером. Бесполезно их умножать, так как относительно других моих исследований я мог бы рассказать вещи совершенно аналогичные и наблюдения, приводимые другими математиками в ответах на вопросы журнала «Математическое образование», только подтверждает мои¹.

То, что вас удивит прежде всего, это видимость внутреннего озарения, являющаяся результатом длительной неосознанной работы; роль этой бессознательной работы в математическом изобретении мне кажется несомненной и ее следы можно найти и в других случаях, когда это менее очевидно. Часто, когда работают над трудным вопросом, с первого раза не удается ничего хорошего, затем наступает более или менее длительный период отдыха и

¹См. прим. ред. на стр. 122.

потом снова принимаются за дело. В течение первого получаса дело вновь не двигается, а затем вдруг нужная идея приходит в голову. Можно было бы сказать, что сознательная работа стала более плодотворной, так как была прервана и отдых вернул уму его силу и свежесть. Но более вероятно предположить, что этот отдых был заполнен бессознательной работой и что результат этой работы внезапно явился математику точно так, как это было в случае, который я рассказывал; только озарение вместо того, чтобы произойти во время прогулки или путешествия происходит во время сознательной работы, но совершенно независимо от этой работы, которая, самое большее, играет роль связующего механизма, переводя результаты, полученные во время отдыха, но оставшиеся неосознанными, в осознанную форму.

Есть еще одно замечание по поводу условий этой бессознательной работы: она возможна или, по крайней мере, плодотворна лишь в том случае, когда ей предшествует и за ней следует сознательная работа. Приведенный мной пример подтверждает в достаточной мере, что эти внезапные вдохновения происходят лишь после нескольких дней сознательных усилий, которые казались абсолютно бесплодными, когда предполагаешь, что не сделано ничего хорошего и когда кажется, что выбран совершенно ошибочный путь. Эти усилия, однако, не являются бесполезными, как это думают; они пустили в ход бессознательную машину, без них она не пришла бы в действие и ничего бы не произвела.

Необходимость второго периода сознательной работы после озарения еще более понятна. Нужно использовать результаты этого озарения, вывести из них непосредственные следствия, привести в порядок, отредактировать доказательство. Но особенно необходимо их проверить. Я вам уже говорил о чувстве абсолютной уверенности, которое сопровождает озарение; в рассказанных случаях оно не было ошибочным и чаще всего так и бывает; но следует опасаться уверенности, что это правило без исключения; часто это чувство нас обманывает, не становясь при этом менее ярким, и заметить это можно лишь при попытке строго сознательно провести доказательство. Особенно я наблюдал такие факты в случае, когда идея приходит в голову утром или вечером в постели, в полусознательном состоянии.

Таковы факты; рассмотрим теперь выводы, которые отсюда следуют. Как вытекает из предыдущего, или мое «бессознательное я» или, как это называют, мое подсознание, играет основную роль в математическом творчестве. Но обычно рассматривают подсознательные процессы как явления, чисто автоматические. Мы видим, что работа математика не является просто механической и ее нельзя было бы доверить машине, сколь бы совершенной она ни была. Здесь дело не только в том, чтобы применять правила и создавать как можно больше комбинаций по некоторым известным законам. Комбинации, полученные таким образом, были бы слишком многочисленными, громоздкими и бесполезными. Истинная работа ученого состоит в выборе этих комбинаций, так чтобы исключить бесполезные или, вернее, даже не утруждать себя их созданием И правила, которыми нужно руководствоваться при этом выборе, предельно деликатны и тонки, их почти невозможно

выразить точными словами; они легче чувствуются, чем формулируются; как можно при таких условиях представить себе аппарат, который их применяет автоматически?

Отсюда перед нами возникает первый вопрос: «Я — подсознательное» нисколько не является низшим по отношению к «я — сознательному», оно не является чисто автоматическим, оно способно здраво судить, оно имеет чувство меры и чувствительность, оно умеет выбирать и догадываться. Да что говорить, оно умеет догадываться лучше, чем мое сознание, так как преуспевает там, где сознание этого не может.

Короче, не стоят ли мои бессознательные процессы выше чем мое сознание? Вы понимаете важность моего вопроса. Э. Бутру вам показал в докладе, сделанном здесь же два месяца назад, как этот вопрос возникает при совершенно других обстоятельствах и какие следствия вытекают из утвердительного ответа. Не вытекает ли такой утвердительный ответ из фактов, которые я только что вам изложил? Я утверждаю, что не могу с этим согласиться. Итак, исследуем еще раз факты и посмотрим, не содержат ли они другого объяснения.

Несомненно, что комбинации, приходящие на ум в виде внезапного озарения после достаточно длительной бессознательной работы, обычно полезны и глубоки, как будто они прошли уже первый отбор. Значит ли это, что подсознание образовало только эти комбинации, интуитивно, догадываясь, что лишь они полезны, или оно образовало и многие другие, которые были лишены интереса и остались неосознанными?

При этой второй точке зрения все комбинации формируются механизмом подсознания, но в поле зрения сознания попадают лишь представляющие интерес. Но и это еще очень непонятно. Каковы причины того, что среди тысяч результатов деятельности нашего подсознания есть лишь некоторые, которые призваны пересечь его порог, в то время как все прочие остаются по ту сторону? Не просто ли случай дает им эту привилегию? Конечно нет. К примеру, среди всех ощущений, действующих на наши органы чувств, только самые интенсивные обращают на себя наше внимание, по крайней мере, если это внимание не обращено на них по другим причинам. В более общем случае среди бессознательных идей привилегированными, т. е. способными стать сознательными, являются те, которые прямо или косвенно наиболее глубоко воздействуют на наши чувства.

Может вызвать удивление обращение к чувствам, когда речь идет о математических доказательствах, которые, казалось бы, связаны только с умом. Но это означало бы, что мы забываем о чувстве математической красоты, чувстве гармонии чисел и форм, геометрической выразительности. Это настоящее эстетическое чувство, знакомое всем настоящим математикам. Воистину, здесь налицо чувство!

Но каковы математические характеристики, которым мы приписываем свойства красоты и изящества и которые способны возбудить в нас своего рода эстетическое чувство? Это те, элементы которые гармонически расположены таким образом, что ум без усилия может их охватывать целиком, угадывая детали. Эта гармония служит одновременно удовлетворением на-

ших эстетических чувств и помощью для ума, она его поддерживает и ею он руководствуется. Эта гармония дает нам возможность предчувствовать математический закон. Итак, как это было сказано выше, единственными фактами, способными обратить на себя наше внимание и быть полезными, являются те, которые подводят нас к познанию математического закона. Таким образом, мы приходим к следующему выводу: полезные комбинации это в точности наиболее красивые, т. е. те, которые больше всего воздействуют на это специальное чувство математической красоты, известное всем математикам и недоступное профанам до такой степени, что они часто склонны смеяться над ним.

Что же, таким образом, происходит? Среди многочисленных комбинаций, образованных нашим подсознанием, большинство безынтересно и бесполезно, но потому они и не способны подействовать на наше эстетическое чувство; они никогда не будут нами осознаны; только некоторые являются гармоничными и потому одновременно красивыми и полезными; они способны возбудить нашу специальную геометрическую интуицию, которая привлечет к ним наше внимание и таким образом даст им возможность стать осознанными.

Это только гипотеза, но есть наблюдение, которое ее подтверждает: внезапное озарение, происходящее в уме математика, почти никогда его не обманывает, но иногда случается, что оно не выдерживает проверки, и тем не менее почти всегда замечают, что если бы эта ложная идея оказалась верной, то она удовлетворила бы наше естественное чувство математического изящества.

Таким образом, это специальное эстетическое чувство играет роль решета, и этим объясняется, почему тот, кто лишен его, никогда не станет настоящим изобретателем.

Однако, преодолены не все трудности; ясно, что пределы сознания очень узки, а что касается подсознания, то его пределов мы не знаем и потому не слишком возражаем против предположения, что оно может образовать в короткое время столько комбинаций, сколько сознательное существо не смогло бы рассмотреть за всю жизнь. Эти пределы тем не менее существуют, но правдоподобно предположить, что подсознание могло бы образовать все возможные комбинации, число которых испугало бы воображение, и это кажется и необходимым, так как если бы оно образовывало их мало и делало бы это случайным образом, то маловероятно, чтобы «хорошая» комбинация, которую надо выбрать, находилась среди них.

Для объяснения надо учесть первоначальный период сознательной работы, который предшествует плодотворной бессознательной работе. Попрошу извинить меня за следующее грубое сравнение. Представим себе будущие элементы наших комбинаций как что-то похожее на атомы — крошечки Эпикюра. Во время полного отдыха эти атомы неподвижны, они как будто прикреплены к стене; этот полный отдых может продолжаться неопределенное время, атомы при этом не встречаются и, следовательно, никакое их сочетание не может осуществиться. Во время же кажущегося отдыха и бессознательной работы некоторые из них оказываются отделенными от стены и приведенными в движение. Они перемещаются во всех направлениях

пространства, вернее, — помещения, где они заперты, так же, как туча мошек или, если вы предпочитаете более ученое сравнение, как газовые молекулы в кинетической теории газов. При взаимном столкновении могут появиться новые комбинации.

Какова же роль первоначальной сознательной работы? Она состоит, очевидно, в том, чтобы мобилизовать некоторые атомы, отделить их от стены и привести в движение. Считают, что не сделано ничего хорошего, так как эти элементы передвигали тысячами разных способов с целью найти возможность их сочетать, а удовлетворительной комбинации найти не удалось. Но после того импульса, который им был сообщен по нашей воле, атомы больше не возвращаются в свое первоначальное неподвижное состояние. Они свободно продолжают свой танец.

Но наша воля выбирала их не случайным образом, цель была вполне определена; выбранные атомы были не первые попавшиеся, а те, от которых разумно ожидать искомого решения. Атомы, приведенные в движение, начинают испытывать соударения и, следовательно, образовывать сочетания друг с другом или с теми атомами, которые ранее были неподвижны и были задеты при их движении. Я еще раз прошу у вас извинения за грубость сравнения, но не знаю другого способа, для того чтобы объяснить свою мысль.

Как бы то ни было, у созданных комбинаций хотя бы одним из элементов служит атом, выбранный по нашей воле. И очевидно, что среди них находятся те комбинации, которые я только что назвал «хорошими». Может быть, в этом содержится возможность уменьшить парадоксальность первоначальной гипотезы.

Другое наблюдение. Никогда не бывает, чтобы результатом бессознательной работы было полностью проведенное и достаточно длинное вычисление, даже если его правила заранее установлены. Казалось бы, подсознание должно быть особенно расположено к совершенно механической работе. Если, например, вечером подумать о сомножителях, то можно было бы надеяться, что при пробуждении будешь знать произведение или что алгебраическое вычисление, например проверка, могло бы производиться бессознательно. Но опыт опровергает это предположение. Единственное, что получаешь при озарении, являющимся результатом бессознательной работы, это отправные точки для подобных вычислений; что касается самих вычислений, то их надо производить во время второго периода сознательной работы, следующего за озарением; тогда проверяют результаты и выводят из них следствия. Правила вычислений строгие и сложные, они требуют дисциплины, внимания и воли и, следовательно, сознания. В подсознании же царит, напротив, то, что я называю свободой, если можно назвать этим словом простое отсутствие дисциплины и беспорядок, рожденный случаем. Но только этот беспорядок рождает неожиданные комбинации.

Я сделаю последнее замечание; когда я выше излагал вам некоторые личные наблюдения, я говорил о бессонной ночи, во время которой я работал как бы против своей воли; такие случаи часты и необязательно, чтобы причиной такой ненормальной мозговой активности было физическое возбуждение, как

было в случае, о котором я говорил. Кажется, что в этих случаях присутствуешь при своей собственной бессознательной работе, которая стала частично ощутимой для сверхвозбужденного сознания и которая не изменила из-за этого своей природы. При этом начинаешь смутно различать два механизма или, если угодно, два метода работы этих двух «я». И психологические наблюдения, которые я мог при этом сделать, как мне кажется, подтверждают в основных чертах те взгляды, которые я вам здесь изложил.

Эти взгляды несомненно нуждаются в проверке, так как несмотря ни на что остаются гипотетичными; вопрос, однако, столь интересен, что я не раскаиваюсь в том, что изложил их вам.

Примечания редактора

[1], к стр. 16. — Для читателя будет небезынтересно познакомиться с этими высказываниями Гельмгольца. В своей речи при получении медали имени знаменитого окулиста Грефе Гельмголец сказал следующее:

«Я могу сравнить себя с путником, который предпринял восхождение на гору, не зная дороги; долго и с трудом взбирается он, часто вынужден возвращаться назад, ибо дальше нет прохода. То размышление, то случай открывают ему новые тропинки, они ведут его несколько далее, и, наконец, когда цель достигнута, он, к своему стыду, находит широкую дорогу, по которой мог бы подняться, если бы умел верно отыскать начало. В своих статьях я, конечно, не занимал читателя рассказом о таких блужданиях, описывая только тот проторенный путь, по которому он может теперь без труда взойти на вершину... Признаюсь, как предмет работы, мне всегда были приятнее те области, где не имеешь надобности рассчитывать на помощь случая или счастливой мысли.

Но, попадая довольно часто в такое неприятное положение, когда приходится ждать таких проблесков, я приобрел некоторый опыт насчет того, когда и где они мне являлись, — опыт, который может пригодиться другим.

Эти счастливые наития нередко вторгаются в голову так тихо, что не сразу заметишь их значение, иной раз только случайность укажет впоследствии, когда и при каких обстоятельствах они проходили: появляется мысль в голове, а откуда она — не знаешь сам.

Но в других случаях мысль осеняет нас внезапно, без усилия, как вдохновение.

Насколько могу судить по личному опыту, она никогда не рождается в усталом мозгу и никогда за письменным столом. Каждый раз мне приходилось сперва всячески переворачивать мою задачу на все лады, так, что все ее изгибы и сплетения залегли прочно в голове и могли быть снова пройдены наизусть, без помощи письма.

Дойти до этого обычно невозможно без долгой продолжительной работы. Затем, когда прошло наступившее утомление, требовался часок полной телесной свежести и чувства спокойного благосостояния — и только тогда приходили хорошие идеи. Часто... они являлись утром, при пробуждении, как замечал и Гаусс.

Особенно охотно приходили они... в часы неторопливого подъема по лесистым горам, в солнечный день. Малейшее количество спиртного напитка как бы отпугивало их прочь»¹.

¹Цит. по книге: А. В. Лебединский, У. И. Франкфурт, А. М. Франк «Гельмголец», М., 1966, стр. 131–132.

[2], к стр. 116. — Исследования по теории автоморфных функций, о которых здесь говорит Пуанкаре, он вел в творческом соревновании с крупным немецким математиком Феликсом Клейном. Позже, чем Пуанкаре, в 1915 или 1916 гг., читая курс лекций по истории математики XIX века, Клейн тоже рассказал о ходе своих работ, и этот рассказ имеет немало общего с описанием Пуанкаре. Приведем здесь соответствующий отрывок, вошедший в книгу Клейна «Развитие математики в XIX в.»².

«Осень 1881 г. я провел для лечения у Северного моря... Следуя тогдашним рекомендациям врачей, я решил в пасхальные каникулы 1882 г. снова отправиться к Северному морю, в Нордерней. Я хотел там, в спокойной обстановке, написать вторую часть своей работы, связанной с идеями Римана... Но я выдержал только 8 дней, так как существовать было трудно: мощные штормы не давали выходить из дому, и у меня началась сильная астма. Я решил поскорее уехать на родину, в Дюссельдорф. В последнюю ночь, с 22 на 23 марта, которую я из-за астмы проводил сидя на диване, внезапно в полтретьего передо мною возникла основная теорема такой, какой я ее уже собственно раньше представлял себе с помощью чертежа четырнадцатиугольника в XIV томе журнала *Mathematische Annalen* — На следующее утро в почтовой карете, в которой тогда надо было ехать из Нордена в Эмден, я еще раз во всех деталях продумал то, что нашел. Теперь я знал, что имею большую теорему. Приехав в Дюссельдорф, я все сразу записал [напечатано в *Mathematische Annalen*, т. 20 (1882), стр. 49–51], датировал 27 марта, послал это издателю, а корректуры распорядился напечатать Пуанкаре и Шварцу...».

²См. там 3-ю часть: «Теория функций с 1850 до 1900 г.» Читателя и здесь не должны смущать специальные термины.

Послесловие

Автор этого единственного в своем роде произведения прожил долгую и плодотворную жизнь.

Жак-Соломон Адамар родился в Версале в 1865 г. Его блестящие и разносторонние способности проявились рано. На вступительных экзаменах в Политехническую школу в Париже он поставил рекорд, набрав большее число баллов, чем кто-либо из экзаменовавшихся туда до него¹. По окончании Политехнической школы Адамар посвятил себя математике и вскоре сделал ряд крупных открытий. Наибольшую славу, пожалуй, принесло ему доказательство (одновременно с бельгийским математиком Де ла Валле-Пуссенном) асимптотического закона распределения простых чисел (1896 г.). С 1900 года Адамар — профессор Парижского университета, позже он преподавал также в Политехнической школе и читал лекции во Французском колледже (Collège de France). В 1912 г. он был избран в Парижскую Академию наук.

Ведя интенсивную работу в области математики, Адамар принимал участие и в общественной жизни своей страны. Он был другом Советского Союза, несколько раз был гостем советских математиков, в годы после второй мировой войны, несмотря на преклонный возраст, принимал участие в движении сторонников мира. Умер Адамар в Париже в 1963 г.

Ввиду угрозы немецкой оккупации Адамар был вынужден в 1940 г. уехать в США. Там в 1945 г. впервые была издана на английском языке его книга о психологии научного, прежде всего математического, творчества. Наш перевод сделан с французского издания 1959 г., которое автор просмотрел и расширил.

С тех пор, как была написана книга Адамара, интерес к рассматриваемым в ней проблемам неуклонно возрастал. Еще быстрее росла литература, преимущественно в виде журнальных статей, по психологии научного творчества. И все-таки книга Адамара остается и на сегодня явлением уникальным благодаря широте подхода ее автора и ценности использованных в ней материалов, в том числе фактов из научной практики самого Адамара.

Адамар много раз обращается в своей книге к небольшому, но исключительно ценному этюду Анри Пуанкаре (1854–1912 гг.), знаменитого французского математика, механика, физика. Было естественно дать этот этюд здесь полностью, в виде приложения.

Вряд ли надо доказывать, что, учитывая характер и недостаточную разработанность сложных вопросов психологии творчества, в частности

¹Оценки на этих экзаменах весьма дифференцированы, даются по стобальной системе по двадцати предметам. Адамар набрал около 1900 баллов.

научного, к взглядам и выводам Адамара и Пуанкаре надо отнестись критически. Это не последнее, а почти что первое слово науки в этой трудной, но увлекательной области. И то, как подходят к анализу ее проблем два крупных математика, поучительно, интересно и может служить отправным пунктом для дальнейших исследований.

И. Погребыцкий

Именной указатель

- Абеляр П. 55
Августин А. 26
Адамар Ж. С. 3, 86, 124, 125
Ампер А. М. 48, 103
Анджелл Д. 58
Аппель П. 13
Аристотель 34, 57
Асгейрсон 43
Баль Ю. 71
Бергсон А. 4
Беркли Дж. 55, 72
Бернар К. 40, 43
Бернулли И. 100
Бернулли Я. 100
Бертран Ж. 85
Бетховен Л. 5
Бинэ А. 48, 53, 57–59, 61, 62, 70
Биркгофф Дж. 66
Блок А. 43
Больцман Л. 13
Бозр Э. 5
Бриан А. 71
Бройль Л. 5
Брюкке Э. 41
Буало Н. 56
Бутру П. 63, 69
Бутру Э. 33, 34
Бюлер К. 58
Бюффон Ж. Л. Э. 37
Валери П. 5, 12, 17, 27, 47, 49
Валис Дж. 48
Варендонк 58, 77
Вейерштрасс К. 84, 87, 94, 95
Вертгеймер М. 67
Виктор А. 62
Винер Н. 66
Винтер Э. 70
Вольтерра В. 101
Вудворт Р. Б. 29, 31, 33, 59
Галилей Г. 8, 105
Галь Ф. 7, 9, 104
Галуа Э. 13, 89, 93–94
Гальтон Ф. 8, 23, 55, 58, 60, 66, 75, 78,
104, 109, 110
Гаманн И. Г. 74
Гамильтон У. 60, 65
Гартман Э. 35
Гаусс К. Ф. 9, 48, 86, 113
Гегель Г. В. Ф. 55
Гельмгольц Г. 16, 30–32, 38, 41, 46, 122
Гердер И. Г. 54
Гершель В. 8
Гёте И. В. 73
Гийом П. 22
Гильберт Д. 43, 69, 81
Гоббс Т. 55
Гумбольдт В. 55
Гурмон Р. 18
Дантек 6
Дарбу Г. 13
Дарвин Ч. 75
Двельшауверс 44, 58
Декарт Р. 9, 55, 63, 68, 69
Делакруа А. 4, 37, 53, 58, 76, 89
Десдуат 20
Джеймс У. 6, 23, 33, 34, 67, 75
Джон 43
Диксон Л. 10
Дирихле П. Г. Л. 42
Доу П. К. Ф. 12
Драш Ж. 13
Дуглас Д. 66, 68, 75
Дюгем П. М. М. 84, 100
Дюма Ж. 4
Дюркхейм Э. 110
Евклид 44
Жанэ П. 20
Жордан К. 81, 109
Иенсен Л. 42
Кант И. 55, 74
Кантор Г. 50, 73
Кардано Дж. 95, 96, 105
Картан Э. 100
Кеплер И. 49, 97
Кёлер В. 54
Клапаред 5, 11, 13, 19, 23, 41, 97
Клейн Ф. 70, 80, 83–85, 104, 123
Колумб Х. 4
Коши О. Л. 43, 84
Кронекер Л. 73

Купман 68
 Курант Р. 43
 Лагранж Ж. Л. 87
 Ламартин А. 17, 47
 Ланжевен П. 16
 Лапик Л. 62
 Лебег А. 73
 Лебединский А. В. 122
 Леви-Сильвен К. 99
 Леви-Стросс К. 71
 Леви-Чивита Т. 42
 Лежандр А. М. 93–95
 Лейбниц Г. В. 9, 20, 34, 55, 74, 75, 100
 Леонард Г. 8
 Леонардо да Винчи 105
 Ли С. 90
 Локк Дж. 55, 74, 75
 Ломброзо Ч. 105
 Лопиталь Г. Ф. 100
 Лоренц Г. А. 42
 Лотце Р. Г. 72
 Майе 10, 11, 13
 Майер А. 71
 Майерс Ч. С. 34
 Мейерсон 89
 Мечников И. И. 5
 Мёбиус П. 8, 9
 Милль Д. С. 55, 75
 Моцарт В. А. 17, 28, 29, 53, 102
 Мюллер М. 26, 54–56, 58, 60, 66, 72–
 74, 110
 Николь Ш. 18, 19
 Ньютон И. 9, 36, 47, 49, 50, 97, 100
 Оствальд В. Ф. 16
 Паскаль Б. 43, 81
 Патрик К. 18, 29, 32
 Перрен Ж. 72
 Перрен Ф. 72
 Пикар Э. 13, 41
 Плятт 31
 Погребыский И. Б. 125
 Пойя Г. 67, 68, 75
 Полан Ф. 10, 17, 39
 Помпилий Н. 95, 96
 Пуанкаре А. 3, 5, 7, 13–16, 19, 23,
 26–34, 36–40, 44, 46–50, 62, 82–83,
 85–89, 93–95, 110–112, 123, 125
 Пэнлеве П. 8, 13
 Рамзо 98
 Расин Ж. 5
 Рассел Б. 102
 Ренан Э. 99
 Рибо Т. А. 68, 72, 74
 Рив 41
 Риман Б. 40, 42, 84, 85, 87, 92, 123
 Риччи Г. 42
 Роден О. 53
 Россман 29
 Рэлей Дж. У. 97
 Сидгвик 71, 72
 Скрипчёр 48
 Сократ 95, 96
 Спенсер Г. 25, 79
 Стенли 68
 Стирлинг Дж. 30
 Сурио П. 5, 10, 19, 39, 44, 52, 103
 Типл 31
 Титченер 6, 58, 77
 Торричелли Э. 4
 Тэн И. 24, 57, 58, 76, 104–105
 Уатт Дж. 64
 Уоллас Г. 16, 23, 33, 101, 102, 109
 Уотсон Д. Д. 7
 Фаге Э. 36
 Ферма П. 91
 Ферроль 48
 Фихте И. Г. 34
 Франклин Б. 4
 Франкфурт У. И. 122
 Фредгольм 42, 100
 Фрейд З. 25, 102
 Фридрихс К. 30
 Фуйе Альберт 21, 25, 75
 Фурнуа 11, 13
 Харди Г. Х. 103
 Хаусман А. Е. 18, 29
 Челлини Б. 105
 Шеллинг Ф. В. Й. 34
 Шопенгауэр А. 55, 60
 Эйлер Л. 60
 Эйнштейн А. 42, 66, 67
 Энгр Ж. О. Д. 53
 Эрмит Ш. 5, 12, 13, 84, 85, 87, 94, 99
 Якобсон Р. 71, 76

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора к французскому изданию	3
Введение	4
Глава I. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И АНКЕТЫ	6
Глава II. ДИСКУССИЯ О «БЕССОЗНАТЕЛЬНОМ»	20
Глава III. БЕССОЗНАТЕЛЬНОЕ И ОТКРЫТИЕ	26
Глава IV. ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ СТАДИЯ. ЛОГИКА И СЛУЧАЙ	36
Глава V. ДАЛЬНЕЙШАЯ СОЗНАТЕЛЬНАЯ РАБОТА	46
Глава VI. ОТКРЫТИЕ КАК СИНТЕЗ. ПОМОЩЬ ЗНАКОВ	52
Глава VII. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УМОВ	79
Глава VIII. ПАРАДОКСАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ИНТУИЦИИ	91
Глава IX. ОБЩЕЕ НАПРАВЛЕНИЕ, ДАННОЕ ИССЛЕДОВАНИЮ	97
Заключительные замечания	104
Приложение I. АНКЕТА О МЕТОДАХ РАБОТЫ МАТЕМАТИКОВ	106
Приложение II. ДРУГОЕ РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ УМАМИ: ВЗГЛЯД НА ОСНОВУ МОРАЛИ	110
Приложение III. А. Пуанкаре. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО	112
Примечания редактора	122
Послесловие	124
Именной указатель	126

ЖАК АДАМАР

ИССЛЕДОВАНИЕ ПСИХОЛОГИИ ПРОЦЕССА ИЗОБРЕТЕНИЯ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ

Под редакцией *И. Б. Погребысского*

Верстка *Д. Переверзевой*

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования. 121002, Москва, Б. Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000. Подписано в печать 21.02.2001.
Формат 60 × 88 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 8.
Тираж 1000 экз. Заказ

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554-21-86