# XXXII Всероссийская олимпиада школьников по математике

С 24 по 28 марта 2006 года в семи городах России прошел IV (федеральный окружной) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике.

В этом году олимпиаду принимали города Санкт-Петербург (Северо-Западный), Ярославль (Центральный), Элиста (Южный), Челябинск (Уральский), Пермь (Приволжский), Новосибирск (Сибирский) и Якутск (Дальневосточный федеральный округ).

Заключительный, V этап олимпиады прошел с 21 по 26 апреля в Пскове на базе Центра образования «Псковский педагогический комплекс». В олимпиаде приняли участие 199 российских школьников – дипломанты IV этапа, а также победители Московской и Санкт-Петербургской олимпиад. Традиционно, гостями олимпиады стали команды Болгарии и Китая. С этими странами на протяжении последних лет ведется обмен делегациями и плодотворная совместная работа в области математических соревнований.

Наиболее трудной на заключительном этапе олимпиады оказалась задача 7 в 11 классе – ее смогли решить лишь три участника. А самыми красивыми, по мнению участников олимпиады, были признаны задача 1 в 9 классе, задача 8 в 10 классе и задача 3 в 11 классе.

Ниже приведены условия задач IV и V этапов и список призеров V (заключительного) этапа олимпиады.

## ОКРУЖНОЙ ЭТАП

### 8 класс

**1.** Найдите какое-нибудь девятизначное число $N$, состоящее из различных цифр, такое, что среди всех чисел, получающихся из $N$ вычеркиванием семи цифр, было бы не более одного простого. Докажите, что найденное число подходит. (Если полученное вычеркиванием цифр число начинается на ноль, то ноль тоже вычеркивается.)

*О.Подлипский*

**2.** Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?

*П.Мартынов*

**3.** В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для любых трех машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все 4 машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)

*И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Г.Челноков*

**4.** См. задачу М2015,б «Задачника Кванта».

**5.** На доске записано произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100}$, где $a_1, \ldots, a_{100}$ – натуральные числа. Рассмотрим 99 выражений, каждое из которых получается заменой одного из знаков умножения на знак сложения. Известно, что значения ровно 32 из этих выражений четные. Какое наибольшее количество четных чисел среди $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ могло быть?

*Р.Женодаров*

**6.** В клетчатом квадрате $101 \times 101$ каждая клетка внутреннего квадрата $99 \times 99$ покрашена в один из десяти цветов (клетки, примыкающие к границе квадрата, не покрашены). Может ли оказаться, что в каждом квадрате $3 \times 3$ в цвет центральной клетки покрашена еще ровно одна клетка?

*Н.Агаханов*

**7.** Медиану $AA_0$ треугольника $ABC$ отложили от точки $A_0$ перпендикулярно стороне $BC$ во внешнюю сторону треугольника. Обозначим второй конец построенного отрезка через $A_1$. Аналогично строятся точки $B_1$ и $C_1$. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если углы треугольника $ABC$ равны $30^\circ$, $30^\circ$ и $120^\circ$.

*Л.Емельянов*

**8.** При изготовлении партии из $N \geq 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

*К.Кноп, Л.Емельянов*

### 9 класс

**1.** См. задачу 1 для 8 класса.

**2.** В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?

*Н.Агаханов*

**3.** Известно, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 6$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 0$. Докажите, что $x_1x_2 \ldots x_6 \leq \frac{1}{2}$.

*А.Храбров*

**4.** Биссектрисы углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают описанную окружность этого треугольника в точках $A_0$ и $C_0$ соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника $ABC$ параллельно стороне $AC$, пересекается с прямой $A_0C_0$ в точке $P$. Докажите, что прямая $PB$ касается описанной окружности треугольника $ABC$.

*Л.Емельянов*

**5.** См. задачу 5 для 8 класса.

**6.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены биссектриса $AD$ и высота $BE$. Докажите, что угол $CED$ больше $45^\circ$.

*А.Мурашкин*

**7.** См. задачу 8 для 8 класса.

**8.** Число $N$, не делящееся на 81, представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно также представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, не делящихся на 3.

*П.Козлов*

### 10 класс

**1.** См. задачу М2011 «Задачника «Кванта».

**2.** Назовем раскраску доски $8 \times 8$ в три цвета хорошей, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трех цветов. (Уголок из пяти клеток – это фигура, получающаяся из квадрата $3 \times 3$ вырезанием квадрата $2 \times 2$.) Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше чем $6^8$.

*О.Подлипский*

**3.** См. задачу 4 для 9 класса.

**4.** См. задачу М2009 «Задачника «Кванта».

**5.** Докажите, что для каждого $x$ такого, что $\sin x \neq 0$, найдется такое натуральное $n$, что $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

*И.Богданов, А.Храбров*

**6.** Через точку пересечения высот остроугольного треугольника $ABC$ проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному.

*Л.Емельянов*

**7.** См. задачу М2013 «Задачника «Кванта».

**8.** См. задачу М2016 «Задачника «Кванта».

### 11 класс

**1.** См. задачу М2011 «Задачника «Кванта».

**2.** Произведение квадратных трехчленов $x^2 + a_1x + b_1$, $x^2 + a_2x + b_2$, …, $x^2 + a_nx + b_n$ равно многочлену $P(x) = x^{2n} + c_1x^{2n-1} + c_2x^{2n-2} + \ldots + c_{2n-1}x + c_{2n}$, где коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ положительны. Докажите, что для некоторого $k$ ($1 \leq k \leq n$) коэффициенты $a_k$ и $b_k$ положительны.

*В.Сендеров*

**3.** В гоночном турнире 12 этапов и $n$ участников. После каждого этапа все участники в зависимости от занятого места $k$ получают баллы $a_k$ (числа $a_k$ натуральны и $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$). При каком наименьшем $n$ устроитель турнира может выбрать числа $a_1, \ldots, a_n$ так, что после предпоследнего этапа при любом возможном распределении мест хотя бы двое участников имели шансы занять первое место?

*М.Мурашкин*

**4.** Биссектрисы углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают его стороны в точках $A_1$ и $C_1$, а описанную окружность этого треугольника – в точках $A_0$ и $C_0$ соответственно. Прямые $A_1C_1$ и $A_0C_0$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что отрезок, соединяющий $P$ с центром вписанной окружности треугольника $ABC$, параллелен $AC$.

*Л.Емельянов*

**5.** См. задачу 5 для 10 класса.

**6.** См. задачу М2012 «Задачника Кванта».

**7.** См. задачу М2018 «Задачника «Кванта».

**8.** Какое минимальное количество клеток можно закрасить черным в белом квадрате $300 \times 300$, чтобы никакие три черные клетки не образовывали уголок, а после закрашивания любой белой клетки это условие нарушалось?

*И.Богданов, О.Подлипский*

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

### 9 класс

**1.** Дана шахматная доска $15 \times 15$. Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

*С.Берлов, И.Богданов*

**2.** Докажите, что найдутся 4 таких целых числа $a$, $b$, $c$, $d$, по модулю больших 1000000, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}.$$

*С.Берлов*

**3.** Петя раскрашивает 2006 точек, расположенных на окружности, в 17 цветов. Затем Коля проводит хорды с концами в отмеченных точках так, чтобы концы любой хорды были одноцветны и хорды не имели общих точек (в том числе и общих концов). При этом Коля хочет провести как можно больше хорд, а Петя старается ему помешать. Какое наибольшее количество хорд заведомо сможет провести Коля?

*С.Берлов*

**4.** Дан треугольник $ABC$. Окружность $\omega$ касается описанной окружности треугольника $ABC$ в точке $A$, пересекает сторону $AB$ в точке $K$, а также пересекает сторону $BC$. Касательная $CL$ к окружности $\omega$ такова, что отрезок $KL$ пересекает сторону $BC$ в точке $T$. Докажите, что отрезок $BT$ равен по длине касательной из точки $B$ к $\omega$.

*Д.Скробот*

**5.** Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ – натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть $b_k$ – наибольший делитель $a_k$ такой, что $b_k < a_k$. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

*М.Мурашкин*

**6.** На сторонах $AB$, $BC$, $CA$ треугольника $ABC$ выбраны точки $P$, $Q$, $R$ соответственно таким образом, что $AP = CQ$ и четырехугольник $RPBQ$ вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника $ABC$ в точках $A$ и $C$ пересекают прямые $RP$ и $RQ$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что $RX = RY$.

*С.Берлов*

**7.** Клетчатый квадрат $100 \times 100$ разрезан на доминошки: прямоугольники $1 \times 2$. Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседние по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т.е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник?

*И.Богданов*

**8.** Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна $-1$. Докажите, что $b \leq -\frac{1}{4}$.

*С.Берлов*

## 10 класс

**1.** См. задачу 1 для 9 класса.

**2.** Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трех чисел делится на 4.

*В.Сендеров*

**3.** См. задачу 3 для 9 класса.
**4.** См. задачу М2019 «Задачника «Кванта».
**5.** См. задачу 5 для 9 класса.
**6.** См. задачу М2014 «Задачника «Кванта».
**7.** См. задачу 8 для 9 класса.
**8.** См. задачу М2017,а «Задачника «Кванта».

## 11 класс

**1.** Докажите, что $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

*В.Сендеров*

**2.** Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей – чисто периодические дроби с периодом $T$. Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше $T$.

*А.Голованов*

**3.** У клетчатого прямоугольника $49 \times 69$ отмечены все $50 \cdot 70$ вершин клеток. Двое играют в следующую игру: каждым своим ходом каждый игрок соединяет две точки отрезком, при этом одна точка не может являться концом двух проведенных отрезков. Отрезки могут содержать общие точки. Отрезки проводятся до тех пор, пока точки не кончатся. Если после этого первый может выбрать на всех проведенных отрезках направления так, что сумма всех полученных векторов равна нулевому вектору, то он выигрывает, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

*О.Подлипский*

**4.** Биссектрисы $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $I$. Прямая $B_1C_1$ пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точках $M$ и $N$. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника $MIN$ вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника $ABC$.

*Л.Емельянов*

**5.** Последовательности положительных чисел $(x_n)$ и $(y_n)$ удовлетворяют условиям $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2$, $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}^2$ при всех натуральных $n$. Докажите, что если все числа $x_1, x_2, y_1, y_2$ больше 1, то $x_n > y_n$ при каком-нибудь натуральном $n$.

*А.Голованов*

**6.** Окружность с центром $I$, вписанная в грань $ABC$ треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков $AB$, $BC$, $CA$ в точках $D$, $E$, $F$ соответственно. На отрезках $SA$, $SB$, $SC$ отмечены точки $A', B', C'$ соответственно так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; $S'$ – точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке $S$. Известно, что $SI$ является высотой пирамиды. Докажите, что точка $S'$ равноудалена от точек $A', B', C'$.

*Ф.Бахарев*

**7.** См. задачу М2020 «Задачника «Кванта».

**8.** В лагерь приехали несколько пионеров, каждый из них имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что пионерам можно выдать пилотки, покрашенные в 1331 цвет так, чтобы у знакомых каждого пионера были пилотки хотя бы 20 различных цветов.

*Д.Карпов*

# Призеры олимпиады

### *Дипломы I степени*

**по 9 классам получили**

*Кевер Михаил* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Кудык Никита* – Омск, школа 117,
*Волков Владислав* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Бойкий Роман* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

**по 10 классам –**

*Илюхина Мария* – Москва, лицей «Вторая школа»,
*Митрофанов Иван* – Коломна, гимназия 2,
*Арутюнов Владимир* – Москва, гимназия 1543,
*Сафин Станислав* – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,
*Матвеев Константин* – Омск, лицей 66,
*Шмаров Владимир* – Саров, лицей 15;

**по 11 классам –**

*Магазинов Александр* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
*Затицкий Павел* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Глазман Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Девятов Ростислав* –Москва, лицей «Вторая школа»,
*Образцов Тимофей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

### *Дипломы II степени*

**по 9 классам получили**

*Ардинарцев Никита* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Бажов Иван* – Екатеринбург, гимназия 9,
*Пешнин Александр* – Киров, ФМЛ,
*Горинов Евгений* – Киров, ФМЛ,
*Архипов Дмитрий* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
*Харитонов Михаил* – Московская обл., п.Удельная, Удельнинская гимназия,
*Поглазов Павел* – Киров, ФМЛ,
*Салихов Камиль* – Казань, гимназия 102,
*Воробьев Илья* – Сыктывар, республиканский физико-математический лицей-интернат,
*Ерпылев Алексей* –Московская обл., п.Белоозерский, школа 23,
*Мазурик Александр* – Анапа, школа 7,
*Шарахов Сергей* – Ижевск, ЭМЛ 29,
*Сластенин Александр* – Санкт-Петербург, школа 627,
*Ненашев Глеб* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Хасанов Тимур* – Казань, ФМЛ 131;

**по 10 классам –**

*Воробьев Сергей* – Киров, ФМЛ,
*Михайловский Никита* – Челябинск, лицей 31,
*Лишанский Андрей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Ярушин Дмитрий* – Челябинск, лицей 31,
*Лысов Михаил* – Москва, лицей «Вторая школа»,
*Омельяненко Виктор* – Белгород, лицей 38, 7 кл.,
*Дроздов Сергей* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,
*Чувашов Сергей* – Киров, ФМЛ,
*Хабибрахманов Искандер* – Казань, лицей-интернат 2;

**по 11 классам –**

*Красильников Александр* – Ульяновск, гимназия 79,
*Катышев Алексей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Баранов Дмитрий* – Жуковский, гимназия 1,

*Есин Алексей* – Краснодарский кр, ст. Старонижестеблиевская, школа 55,
*Гусаров Евгений* – Ярославль, гимназия 3,
*Христофоров Михаил* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Дружинин Андрей* – Иркутск, лицей 2,
*Еремин Алексей* – Краснодар, школа 47.

*Дипломы III степени*

**по 9 классам получили**

*Филькин Евгений* – Майкоп, гимназия 22,
*Янушевич Леонид* – Москва, школа 1321 «Ковчег»,
*Корб Дмитрий* – Омск, школа 117 ,
*Распопов Алексей* – Ростов-на-Дону, ФМЛ 33,
*Селищев Виталий* – Барнаул, школа 107 (лицей «Грани»),
*Соколов Вячеслав* – Санкт-Петербург, гимназия 261,
*Титов Иван* – Екатеринбург, гимназия 9,
*Григорьев Сергей* – Санкт-Петербург, лицей 533,
*Царьков Олег* – Москва, лицей «Вторая школа»,
*Кусков Дмитрий* – Владимир, лингвистическая гимназия 23 им. А.Г.Столетова;

**по 10 классам –**

*Пономаренко Екатерина* – Майкоп, гимназия 22,
*Шапцев Алексей* – Пермь, гимназия 17,
*Борискин Павел* – Саров, лицей 3,
*Махлин Игорь* – Москва, гимназия 1543,
*Шульцева Ольга* – Курган, гимназия 27,
*Сидоров Александр* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,
*Пасынков Павел* – Киров, ФМЛ,
*Сеплярская Анна* – Черноголовка, школа 82,
*Локтев Сергей* – Краснодар, лицей 90,
*Баранов Эдуард* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Остроумова Людмила* – Ярославль, школа 33 им.К.Маркса,
*Фельдман Григорий* – Новосибирск, гимназия 1,
*Логунов Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Анацкий Анатолий* – Ленск, лицей 2;

**по 11 классам –**

*Козачок Марина* – Долгопрудный, ФМШ 5,
*Прасолов Максим* – Новосибирск, гимназия 1,
*Чернов Вадим* – Челябинск, лицей 31,
*Ситников Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Щичко Антон* – Челябинск, лицей 31,
*Столяров Дмитрий* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
*Иванов Григорий* – Рыбинск, лицей 2,
*Куприн Сергей* – Челябинск, лицей 31,
*Музычка Степан* – Жуковский, школа 8,
*Печенкин Николай* – Москва, школа 192,
*Буфетов Алексей* – Москва, лицей «Вторая школа»,
*Бяков Леонид* – Нижний Тагил, политехническая гимназия,
*Смотров Дмитрий* – Челябинск, лицей 31,
*Рябченко Александр* – Новосибирск, СНЦ НГУ,
*Трифонов Иван* – Ангарск, школа 10.

В этом году жюри олимпиады приняло решение отметить участников, набравших наибольшее число баллов в своих параллелях. Специальные призы «За абсолютный результат на олимпиаде» получили 11-классник Александр Магазинов из Ярославля, 10-классники Николай Белухов из Болгарии, Мария Илюхина из Москвы и Иван Митрофанов из Коломны, а приз «За лучший результат по 9 классам» был вручен Михаилу Кеверу из Санкт-Петербурга. Особо хочется отметить результат А. Магазинова, набравшего максимально возможное количество баллов (56 из 56 возможных) при решении сложного варианта 11 класса.

*Публикацию подготовили*
*Н.Агаханов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин*

# XL Всероссийская олимпиада школьников по физике

В этом году заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады прошел в городе Снежинске. В олимпиаде приняли участие около 170 школьников 9 – 11 классов в составе команд от федеральных округов России и городов Москвы и Санкт-Петербурга.

Ниже приводятся условия задач теоретического и экспериментального туров заключительного этапа и список призеров олимпиады.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### *9 класс*

**Задача 1. Максимальная амплитуда**

Брусок массой $M$, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из груза массой $m$ и легкой длинной пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальный неподвижный блок (рис. 1). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола $\mu = 0{,}3$. Отношение массы бруска к массе груза $M/m = 8$. Груз совершает вертикальные колебания с периодом $T = 0{,}5$ с. Какова максимально возможная амплитуда таких колебаний, при которых они остаются гармоническими?

*В.Грибов*

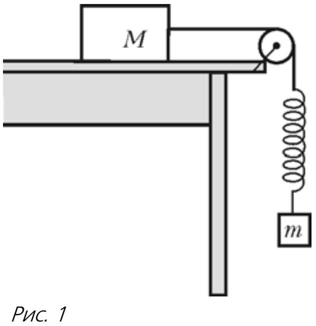

Рис. 1

**Задача 2. Курсирующий катер**

По реке, скорость течения которой $u$, навстречу друг другу плывут два однотипных теплохода. В некоторый момент времени, когда один из теплоходов проплывал мимо пункта $A$, а другой – мимо пункта $B$, из $A$ в $B$ отплыл быстроходный катер, который стал курсировать между теплоходами вплоть до их встречи. Какой путь относительно берега реки проплыл катер? Расстояние от $A$ до В вдоль фарватера реки $L$. В стоячей воде скорость теплоходов $v$, а катера $V$. Пункт $A$ находится выше пункта $B$ по течению реки. Как изменится ответ, если катер стартует из пункта $B$?

*В.Слободянин*