Обратите внимание, что при решении задач графики и таблица избавили нас от необходимости делать дополнительные чертежи.

В заключение приведем задачи для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Точечный источник света находится на оси тонкой собирающей линзы. Расстояние между источником и ближайшим к нему фокусом l, расстояние между источником и его изображением L. Определите фокусное расстояние линзы.

2. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если произведение расстояния от предмета до переднего фокуса на расстояние от заднего фокуса до изображения равно a^2.

3. Расстояние между предметом и его прямым изображением в линзе $l = 5$ см. Линейное увеличение $\Gamma = 0{,}5$. Определите фокусное расстояние линзы.

4. Линзу, дающую действительное изображение предмета, передвинули на расстояние, равное ее фокусному расстоянию. При этом получилось мнимое изображение того же размера. Найдите увеличение линзы.

5. Расстояние между предметом и его изображением, даваемым тонкой положительной линзой, равно $0{,}5F$, где F – фокусное расстояние линзы. Каким будет это изображение – действительным или мнимым?

6. Расстояние между предметом, находящимся на оптической оси рассеивающей линзы, и его изображением равно F, где $F > 0$ – модуль фокусного расстояния линзы. Найдите расстояние от предмета до линзы.

7. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если при изменении расстояния от предмета до линзы, равного первоначально 0,3 м, на 0,1 м расстояние от линзы до действительного изображения предмета увеличивается вдвое.

8. Расстояние от освещенного предмета до экрана $l = 100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях, расстояние между которыми $L = 20$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

9. Когда предмет находился в точке A, тонкая собирающая линза давала увеличение $\Gamma_1 = 2$, а когда предмет переместили в точку B, увеличение стало $\Gamma_2 = 3$. Каким будет увеличение, если предмет поместить в середину отрезка AB? Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси линзы, изображение действительное.

10. С помощью линзы на экране получено изображение предмета с увеличением 2. Каким будет увеличение, если расстояние между предметом и экраном увеличить в 1,6 раза?

Иррациональность и квадратный трехчлен

В.ГОЛУБЕВ

В 1990 ГОДУ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова была предложена задача:

Решите неравенство

$$\sqrt{9v^2-48v-21}+\sqrt{9v^2-51v-15}\le|3v-6|. \quad (1)$$

В данной статье рассматриваются различные способы решения этой задачи.

Прямое решение

Стандартный способ решения иррациональных неравенств – это последовательное возведение в квадрат обеих частей неравенства с целью освобождения от корней. Такой способ сопровождается большой технической работой и требует серьезных усилий и терпения. В дальнейшем решение задачи подобным образом будем называть «прямым».

Обычно задачу, допускающую прямое решение, относят к разряду стандартных, сложность решения которых в основном определяется затратами времени на получение ответа.

Рассмотрим прямое решение неравенства (1). Обе части неравенства неотрицательны. Поэтому, возводя их в квадрат, переходим к равносильному неравенству

$$\text{BB}\, 9v^2-48v-21+2\sqrt{9v^2-48v-21}\,\sqrt{9v^2-51v-15}+$$
$$+9v^2-51v-15\le\left(|3v-6|\right)^2. \quad (2)$$

Комментарий 1. В неравенстве (2) произведение корней сознательно не преобразовано в корень из произведения, поскольку выражения $\sqrt{x}\,\sqrt{y}$ и $\sqrt{xy}$ предъявляют различные ограничения на переменные x и y.

Так как $|m|^2=m^2$, то $\left(|3v-6|\right)^2=(3v-6)^2$, и неравенство (2) принимет вид

$$2\sqrt{9v^2-48v-21}\,\sqrt{9v^2-51v-15}\le-9v^2+63v+72. \quad (3)$$

После возведения в квадрат обеих частей этого неравенства получаем

$$(3)\Leftrightarrow\begin{cases}v^2-7v-8\le0,\\3v^2-16v-7\ge0,\\3v^2-17v-5\ge0,\\27v^4-270v^3+647v^2-212v-436\le0.\end{cases} \quad (4)$$

Многочлен в левой части последнего неравенства системы (4) при $v = 2$ обращается в ноль. Поэтому он разлагается на множители:

$$27v^4-270v^3+647v^2-212v-436=$$
$$=(v-2)\left(27v^3-216v^2+215v+218\right). \quad (5)$$

Второй множитель в правой части этого равенства также обращается в ноль при $v = 2$, что позволяет и его разложить в произведение:

$$27v^3-216v^2+215v+218=(v-2)\left(27v^2-162v-109\right). \quad (6)$$

Используя (5) и (6), представим систему (4) в виде

$$\begin{cases} v^2-7v-8\le 0,\\ 3v^2-16v-7\ge 0,\\ 3v^2-17v-5\ge 0,\\ (v-2)^2\left(27v^2-162v-109\right)\le 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Комментарий 2. Переход от системы (4) к системе (7) доступен далеко не каждому. Однако полезно знать, что в большинстве задач повышенной сложности линейные относительно неизвестных выражения выделяются в условии не случайно (обычно авторы, запутывая «следы» простых конструкций, делают в них линейные подстановки). Тогда, вводя вспомогательные переменные, равные линейным выражениям, зачастую удается существенно упростить вычисления и преобразования.

Например, если в исходном неравенстве (1) явно выделенную в условии подмодульную величину $3v-6$ объявить за новую переменную u, то неравенство переписывается в виде

$$\sqrt{u^2-4u-81}+\sqrt{u^2-5u-81}\le |u|.$$

Тогда система (4) принимает вид

$$\begin{cases} u^2-9u-162\le 0,\\ u^2-4u-81\ge 0,\\ u^2-5u-81\ge 0,\\ 3u^4-18u^3-325u^2\le 0. \end{cases}$$

Заметим, что значение $v=2$ не является решением второго неравенства, а следовательно, и системы (7). Но поскольку при $v\ne 2$ величина $(v-2)^2$ положительна, то, разделив обе части последнего неравенства системы (7) на $(v-2)^2$, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} v^2-7v-8\le 0,\\ 3v^2-16v-7\ge 0,\\ 3v^2-17v-5\ge 0,\\ 27v^2-162v-109\le 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Наконец, решив квадратные неравенства системы (8) и расположив по возрастанию (что не очень просто!) все корни соответствующих квадратных трехчленов, находим ответ системы, т.е. ответ исходного неравенства:

$$\frac{27-4\sqrt{66}}{9}\le v\le \frac{8-\sqrt{85}}{3},\quad \frac{17+\sqrt{349}}{6}\le v\le \frac{27+4\sqrt{66}}{9}.$$

В приведенном прямом решении легко выделить три этапа:

I этап – освобождение от иррациональностей (переход от неравенства (1) к системе (4));

II этап – упрощение системы (4) (переход от системы (4) к системе (8));

III этап – решение системы (8).

Преодоление каждого этапа требует терпения и аккуратности при выполнении преобразований и сопровождается, как указывалось ранее, большими затратами времени.

Возникает вопрос: на какой стадии решения можно сэкономить свои усилия? Простейшая рекомендация: поскольку вычисления желательно производить с меньшими по модулю целыми числами, то, если имеется возможность «укрупнять» переменную, есть смысл этим воспользоваться. Например, в рассматриваемом случае можно ввести вспомогательную переменную $t=3v$ и переписать неравенство (1) так:

$$\sqrt{t^2-16t-21}+\sqrt{t^2-17t-15}\le |t-6|.$$

Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} t^2-21t-72\le 0,\\ t^2-16t-21\ge 0,\\ t^2-17t-15\ge 0,\\ 3t^4-90t^3+647t^2-636t-3924\le 0. \end{cases}$$

Корни можно не вычислять

Многие опускают руки при попытке сравнить без калькулятора корни трехчленов, входящих в левые части неравенств системы (8). Можно ли исследовать взаимное расположение корней квадратных трехчленов, не вычисляя эти корни?

Очевидно, что в этом случае лучше обратиться к свойствам квадратичной функции и ее графика.

Пример 1. *Решите систему*

$$\begin{cases} v^2-7v-8\le 0,\\ 3v^2-16v-7\ge 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Так как квадратный трехчлен v^2-7v-8 имеет целочисленные корни −1 и 8, то

$$(9)\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le v\le 8,\\ 3v^2-16v-7\ge 0. \end{cases}$$

Пусть $f(v)=3v^2-16v-7$. Легко показать, что графиком функции $y=f(v)$ является парабола, ветви которой направлены вверх и которая дважды пересекает ось абсцисс. Заметим, что ось параболы пересекает отрезок $[-1;8]$, поскольку абсцисса вершины $v_{\text{в}}=\frac{8}{3}$. Кроме того, значения функции $f(v)$ на концах отрезка $[-1;8]$ положительны $\left(f(-1)=12, f(8)=57\right)$. Поэтому в плоскости координат v и y имеем картину, изображенную на рисунке 1, где

$$v_-=\frac{8-\sqrt{85}}{3}\ \text{ и }\ v_+=\frac{8+\sqrt{85}}{3}$$

– корни квадратного трехчлена $3v^2-16v-7$ (индексы «−» и «+» указывают на знак перед квадратным корнем). Заметим, что этот и последующие рисунки выполнены схематично, без соблюдения масштаба.

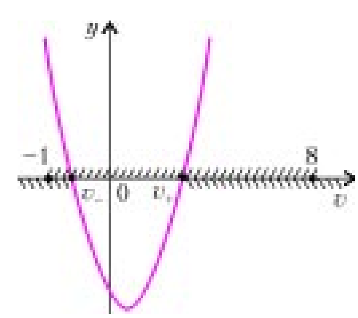

Рис. 1

На рисунке 1 штриховкой указаны множества решений неравенств системы (9), откуда следует ответ:

$$-1\le v\le v_-\quad\text{или}\quad v_+\le v\le 8,$$

т.е.

$$-1\le v\le \frac{8-\sqrt{85}}{3}\ \text{ или }\ \frac{8+\sqrt{85}}{3}\le v\le 8.$$

Пример 2. *Решите систему*

$$\begin{cases} 3v^2-16v-7\ge 0,\\ 3v^2-17v-5\ge 0. \end{cases} \qquad (10)$$

В этом примере оба трехчлена имеют «плохие» корни.

Пусть $f(v)=3v^2-16v-7$ и $g(v)=3v^2-17v-5$. Точка пересечения графиков функций $y=f(v)$ и $y=g(v)$ определяется системой уравнений

$$y = 3v^2 - 16v - 7 \text{ и } y = 3v^2 - 17v - 5 .$$

Равенство (в этом вся «соль»!) старших коэффициентов у квадратных трехчленов позволяет легко решить эту систему и получить координаты единственной общей точки двух парабол: $v = 2$, $y = -27$.

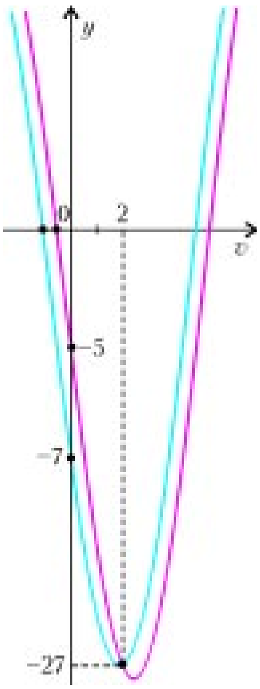

Рис. 2

Так как ветви обеих парабол направлены вверх и ордината единственной общей точки отрицательна, получаем картину взаимного расположения графиков функций $f(v)$ и $g(v)$ в координатной плоскости v, y, представленную на рисунке 2.

Чтобы выяснить, какая из двух парабол является графиком функции $y = f(v)$ и какая – графиком функции $y = g(v)$, достаточно сравнить значения этих функций при любом значении аргумента v, отличном от абсциссы общей точки (в данном случае при $v \neq 2$). Так как $f(0) = -7$ и $g(0) = -5$, то $f(0) < g(0)$, поэтому парабола, изображенная на рисунке 2 синей линией, есть график функции $y = f(v)$, а изображенная красной линией – график функции $y = g(v)$.

Если теперь ввести обозначения корней квадратных трехчленов $3v^2 - 16v - 7$ и $3v^2 - 17v - 5$, например, так: $v_-^{(f)}$, $v_+^{(f)}$, $v_-^{(g)}$, $v_+^{(g)}$, то из рисунка 2 сразу получаем, что

$$v_-^{(f)} < v_-^{(g)} < v_+^{(f)} < v_+^{(g)} .$$

Отсюда следует ответ системы (10):

$$v \le v_-^{(f)} \text{ или } v \ge v_+^{(g)} .$$

Чтобы получить окончательную форму ответа, осталось вычислить корни $v_-^{(f)}$ и $v_+^{(g)}$ и подставить в последние два неравенства:

$$v \le \frac{8 - \sqrt{85}}{3} \text{ или } v \ge \frac{17 + \sqrt{349}}{6} .$$

Пример 3. *Решите систему*

$$\begin{cases} 3v^2 - 17v - 5 \ge 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \le 0. \end{cases} \qquad (11)$$

В приведенной системе оба квадратных трехчлена имеют «плохие» корни, но уже не равные, в отличие от системы (10), старшие коэффициенты. Поэтому при попытке решить систему (11) аналогично системе (10) на стадии определения координат точек пересечения двух графиков получим квадратное, а не линейное уравнение с «плохими» корнями. Чтобы этого избежать, надо обе части первого неравенства системы (11) умножить на 9 и только после этого ввести в рассмотрение функции

$$f(v) = 27v^2 - 153v - 45 \text{ и } g(v) = 27v^2 - 162v - 109 .$$

Далее устанавливаем, что графики функций $f(v)$ и $g(v)$ пересекаются в единственной точке, лежащей во второй координатной четверти, и $f(0) > g(0)$. Тогда сразу получаем (рис.3), что

$$v_-^{(g)} < v_-^{(f)} < v_+^{(f)} < v_+^{(g)} ,$$

откуда следует ответ системы (11):

$$v_-^{(g)} \le v \le v_-^{(f)} \quad \text{или}$$

$$v_+^{(f)} \le v \le v_+^{(g)} ,$$

т.е.

$$\frac{27 - 4\sqrt{66}}{9} \le v \le \frac{17 - \sqrt{349}}{6}$$

или

$$\frac{17 + \sqrt{349}}{6} \le v \le \frac{27 + 4\sqrt{66}}{9} .$$

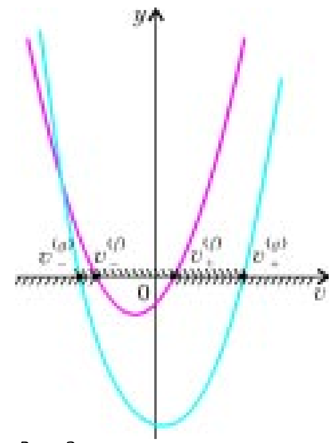

Рис. 3

Оптимальные решения

Рассмотрим теперь совсем иное решение неравенства (1). Как известно, одна из основных рекомендаций при решении уравнений и неравенств с несколькими радикалами состоит в определении взаимосвязей между подкоренными и «внекоренными» выражениями, так как зачастую эти взаимосвязи могут подсказать эффективные пути к ответу.

В данном случае, если ввести обозначения

$$x = 9v^2 - 48v - 21 \text{ и } y = 9v^2 - 51v - 15 ,$$

то легко обнаружить, что

$$3v - 6 = x - y.$$

Поэтому неравенство (1) можно представить в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \le |x - y| . \qquad (12)$$

Повторим, например, прямое решение, используя обозначения x и y:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \le |x - y| \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \le |x - y|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \le (x - y)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{y} \le (x - y)^2 - (x + y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 - (x + y) \ge 0, \\ \left(2\sqrt{x}\sqrt{y}\right)^2 \le \left((x - y)^2 - (x + y)\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ (x - y)^2 - (x + y) \ge 0, \\ 4xy \le (x - y)^4 - 2(x - y)^2 (x + y) + (x + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ (x - y)^2 - (x + y) \ge 0, \\ (x - y)^4 - 2(x - y)^2 (x + y) + \left((x + y)^2 - 4xy\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ (x - y)^2 - (x + y) \ge 0, \\ (x - y)^2 \left((x - y)^2 - 2(x + y) + 1\right) \ge 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной v, заканчиваем решение по одному из указанных ранее путей.

Неравенство (12) допускает и иные варианты упрощения, которые практически нереально обнаружить, не переходя к переменным x и y. Так как

$$x - y = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$$

и

$$\left|\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\right| = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left|\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\right|,$$

неравенство (12) можно переписать в виде

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \le \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|. \qquad (13)$$

Если $x = y$, то $v = 2$. При $v = 2$ непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x < 0$ (и $y < 0$). Поэтому равенство $x = y = 0$ невозможно. Следовательно, при $x \ge 0$ и $y \ge 0$ выражение $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ всегда положительно. Тогда, разделив обе части неравенства (13) на $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, получим равносильное ему неравенство

$$1 \le \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|. \qquad (14)$$

Далее возможны два варианта преобразования неравенства (14): либо возвести обе его части в квадрат, либо перейти к системе, вскрывая модуль. Рассмотрим оба варианта.

В первом варианте имеем:

$$(14) \Leftrightarrow 1^2 \le \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|^2 \Leftrightarrow 1 \le \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \le x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{y} \le x + y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1 \ge 0, \\ \left(2\sqrt{x}\sqrt{y}\right)^2 \le (x+y-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1 \ge 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 4xy \le (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x+y-1 \ge 0, \\ (x-y)^2 - 2(x+y) + 1 \ge 0. \end{cases}$$

Если вернуться к переменной v, то последняя система после очевидных преобразований примет вид

$$\begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \ge 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \ge 0, \\ 18v^2 - 99v - 37 \ge 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \le 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Здесь только три неравенства (первое, второе и четвертое) совпадают с тремя неравенствами системы (8) (со вторым, третьим и четвертым соответственно). Но системы (8) и (15) равносильны, поскольку они равносильны неравенству (1). С другой стороны, это объясняется тем, что в системе (8) первое неравенство есть следствие четвертого, а в системе (15) третье неравенство есть следствие первых двух, т.е. исходное неравенство (1), системы (8) и (15) равносильны такой системе трех неравенств:

$$\begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \ge 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \ge 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \le 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Поэтому к примерам 1–3 можно добавить еще один.

Пример 4. *Найдите в данной системе неравенство, являющееся следствием остальных (каких?) неравенств системы:*

$$а)\ \begin{cases} v^2 - 7v - 8 \le 0, \\ 3v^2 - 16v - 7 \ge 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \ge 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \le 0; \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \ge 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \ge 0, \\ 18v^2 - 99v - 37 \ge 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \le 0. \end{cases}$$

Решите этот пример самостоятельно.

Можно существенно усложнить это задание, запретив вычисление корней квадратных трехчленов в левых частях неравенств.

Наконец, рассмотрим цепочку преобразований неравенства (14) при втором из обозначенных выше вариантов. Так как

$$|f| \ge \varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \ge \varphi \\ -f \ge \varphi, \end{array}\right.$$

то

$$(16) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le \sqrt{x}-\sqrt{y} \\ 1 \le \sqrt{y}-\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y}+1 \le \sqrt{x} \\ \sqrt{x}+1 \le \sqrt{y} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{y}+1\right)^2 \le \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ \left(\sqrt{x}+1\right)^2 \le \left(\sqrt{y}\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 2\sqrt{y} + 1 \le x \\ x + 2\sqrt{x} + 1 \le y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{y} \le x - y - 1 \\ 2\sqrt{x} \le y - x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y-1 \ge 0, \\ \left(2\sqrt{y}\right)^2 \le (x-y-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x-1 \ge 0, \\ \left(2\sqrt{x}\right)^2 \le (y-x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge 0, \\ x-y-1 \ge 0, \\ (x-y)^2 - 2(x+y) + 1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ y-x-1 \ge 0, \\ (x-y)^2 - 2(x+y) + 1 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной v, находим, что исходное неравенство (1) равносильно следующей совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 3v^2 - 17v - 5 \ge 0, \\ 3v - 7 \ge 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \le 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \ge 0, \\ 5v - 3 \ge 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \le 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Первая система равносильна неравенству

$$\frac{17+\sqrt{349}}{6} \le v \le \frac{27+4\sqrt{66}}{9},$$

а вторая – неравенству

$$\frac{27-4\sqrt{66}}{9} \le v \le \frac{8-\sqrt{85}}{3}.$$

Заключение

Выше были рассмотрены различные варианты перехода от исходного неравенства (1) к равносильным ему системам и совокупностям линейных и квадратных неравенств. Очевидно, что таких вариантов много. Важно подчеркнуть, что любой подобный переход требует серьезных усилий и навыков, чтобы избежать ошибок и потери времени.

Естественно, особую сложность представляет решение полученных систем и их совокупностей ((4), (8), (15), (16), (17)) вследствие «плохих» корней фигурирующих в них квадратных трехчленов.