3. Вокруг Земли по стационарной круговой орбите радиусом R движется космический корабль со скоростью v. Определите минимальную характеристическую скорость, необходимую для изменения плоскости орбиты на 90°. Характеристическая скорость – это скорость, которую приобретет корабль в свободном пространстве, затратив такое же количество топлива.

4. Цилиндр радиусом R скатывается по наклонному уголку, касаясь цилиндрической поверхностью одной полки уголка и скользя всей торцевой поверхностью по другой полке. Определите ускорение цилиндра, если угол между горизонтальной плоскостью и образующей уголка равен 30°, а углы между горизонтальной плоскостью и полками уголка одинаковы. Коэффициент трения между торцевой поверхностью и уголком равен μ, а проскальзывание между цилиндрической поверхностью и уголком отсутствует.

5. Термодинамический цикл состоит из двух изобар и двух изохор. В качестве рабочего тела используются насыщенный водяной пар и вода, объемом которой можно пренебречь. Максимальная и минимальная температуры равны T_2 и T_1, а давление в цикле изменяется в пять раз. Определите КПД цикла, если удельная теплоемкость воды c, удельная теплота парообразования r, вода за цикл полностью испаряется, а насыщенный пар затем полностью конденсируется.

6. Точечный заряд q перенесли из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии l от металлического незаряженного шара радиусом R. После того как распределение зарядов на поверхности шара «заморозили», заряд q удалили на бесконечность. Определите энергию системы зарядов на поверхности шара.

7. Магнитный дипольный момент p_m ориентирован по оси длинного соленоида длиной L с числом витков N. Магнитный диполь начинает вращаться относительно оси, перпендикулярной оси соленоида, с угловой скоростью ω. Определите максимальное значение ЭДС индукции, наводимой в соленоиде.

8. Какое количество электрических цепей, имеющих различное эквивалентное сопротивление, можно собрать, имея в своем распоряжении три резистора с сопротивлениями $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом?

9. Плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает на круглое отверстие, в котором помещается 5 зон Френеля для точки наблюдения, отстоящей от отверстия на L. Какова интенсивность в точке наблюдения, если отверстие закрыто зонной пластинкой, в которой зачернены нечетные зоны, полученные для точки наблюдения, удаленной от отверстия на $1{,}5L$?

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Обозначим через O точку на капитанском мостике, а через $K_1, K_2, \ldots, K_n$ – корабли противника. Вы находитесь в окружении тогда и только тогда, когда сумма углов $\angle K_1OK_2 + \angle K_2OK_3 + \ldots + K_{n-1}OK_n$ больше 180°.

2. Не существуют. Обозначим $k = ad = bc$. Из условия задачи следует, что $abc + b = abd + a$, или $k(a-b) = a-b$. Так как $a \neq b$, то $k = 1$. Но этого не может быть, поскольку целые числа a, b, c, d – попарно неравные.

3. Всегда можно убрать три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось. Укажем, как это сделать.

Если на одной чашке с гирькой массой 1 г окажется гирька с некоторой массой k граммов, а на другой чашке – гирька с массой $k + 1$ граммов, то уберем именно эти три гирьки.

Если предыдущая ситуация не имеет места, то на чашке весов вместе с гирькой 1 г отметим наименьшую гирьку массой k граммов. Заметим, что $k \neq n$, иначе при данных задачи остальные гирьки перевесят эти две гирьки (1 г и n г). Значит, кроме гирьки k граммов на этой же чашке весов имеется гирька $k+1$ граммов, здесь же находятся и все более тяжелые гирьки с массой вплоть до n граммов (иначе возникнет первая рассмотренная выше ситуация). Соответственно, на другой чашке весов окажутся все гирьки с промежуточной массой между 1 г и k г (исключая 1 и k). Заметим, что $k > 3$, иначе совокупная масса гирек на чашке с гирькой 1 г окажется больше массы гирек на другой чашке. Выберем на этой другой чашке две гирьки с массой 2, и $k - 1$ граммов, а на первой чашке – третью гирьку массой $k + 1$ граммов.

4. Да, верно. Обозначим углы остроугольного треугольника $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Если этот треугольник не является почти прямоугольным, то $\alpha < 75°$. Если он к тому же не является почти равнобедренным, то $\beta < 60°$, $\gamma < 45°$. Но тогда $\alpha + \beta + \gamma < 180°$, чего не может быть.

5. Пусть у команды «Рубильник» было m удачных реализаций. Так как удачные реализации у нее имели место в половине случаев, то неудачных реализаций было столько же, т.е. m. Всего же команда «Рубильник» заработала за игру $5m + 7m = 12m$ очков.

Пусть у команды «Дробильник» было n удачных реализаций. Так как они составили лишь четвертую часть всех случаев, то неудачных реализаций было втрое больше, т.е. $3n$. Всего же команда «Дробильник» заработала $5 \cdot 3n + 7n = 22n$ очков.

Так как в сумме команды набрали 100 очков, то можно составить уравнение

$$12m + 22n = 100,$$

или, поделив обе части на 2:

$$6m + 11n = 50.$$

Осталось решить это уравнение в натуральных числах. Сразу видно, что $n \leq 4$ (иначе левая часть превысит правую). Кроме того, n – четное число (иначе левая часть была бы нечетной и не могла бы равняться 50). Поэтому есть лишь две возможности: $n = 2$ или $n = 4$. В первом случае получаем $6m + 22 = 50$, и $6m = 28$, что невозможно (ибо левая часть делится на 6, а правая – нет). Во втором случае получаем $6m + 44 = 50$, и $6m = 6$, откуда $m = 1$.

Итак, команда «Рубильник» заработала $12m = 12 \cdot 1 = 12$ очков, а команда «Дробильник» набрала $22n = 22 \cdot 4 = 88$ очков. Победа «Дробильника» более чем убедительная!

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №5 за 2006 г.)

6. Верно. В ряду 1, 2, …, 100 числа, соответствующие гирькам на левой чашке весов, напишем красными чернилами, а соответствующие гирькам на правой чашке весов – синими чернилами. Без ограничения общности предположим, что единица написана красными чернилами. Двигаясь слева направо в указанном ряду, зафиксируем первое красное число k такое, что число $k + 1$ синее. Продолжая двигаться дальше, зафиксируем последнее синее число m такое, что число $m + 1$ красное. Если с левой чашки снять гирьки k и $m + 1$, а с правой – гирьки $k + 1$ и m, то весы сохранят равновесие.

7. Условие задачи допускает тривиальное решение – например, в качестве первой прогрессии можно взять последовательность квадратов 4, 4, 4, …, а в качестве другой – последовательность кубов 8, 8, 8, …

Многие участники конкурса совершенно справедливо заметили, что в условии задачи следует ограничить арифметические последовательности такими, которые имеют ненулевую разность. Приведем авторское решение в этом, более содержательном, случае.

В последовательности чисел вида $7n + 6$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, нет квадратов, а в последовательности чисел вида $7n + 4$ нет кубов. В этом легко убедиться, рассмотрев всевозможные остатки квадратов и кубов целых чисел при делении на 7.

С другой стороны, куб числа вида $7n + 6$ сам является числом такого же вида, а четвертая степень числа вида $7n + 4$ является квадратом числа такого же вида.

8. Отметим в плоскости данного 400-угольника произвольную точку M и проведем через нее прямые, параллельные сторонам 400-угольника – всего 400 прямых. Поскольку существует не более 179 несовпадающих прямых, образующих друг с другом углы в целое количество градусов, а $400 = 2\times 179 + 42$, то по обобщенному принципу Дирихле из проведенных 400 прямых найдутся три совпадающие. А это и означает, что данный 400-угольник имеет три параллельные стороны.

9. Поскольку $\frac{1}{1+t^2} = \frac{\left(1+t^2\right)-t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{t^2}{1+t^2}$, то исходное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} \le \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Докажем его. При $t > 0$ имеем $\frac{t^2}{1+t^2} \le \frac{t^2}{2t}$, откуда следует неравенство $\frac{t^2}{1+t^2} \le \frac{t}{2}$, справедливое не только для $t > 0$, но и для $t = 0$. Сложив вместе неравенства $\frac{x^2}{1+x^2} \le \frac{x}{2}$, $\frac{y^2}{1+y^2} \le \frac{y}{2}$, $\frac{z^2}{1+z^2} \le \frac{z}{2}$ и учитывая, что $x + y + z = 1$, получаем $(*)$. Заметим, что равенство в $(*)$ достигается при двух нулевых и одном единичном значениях аргументов.

10. Покрасив доску в шахматном порядке, мы получим $\frac{101^2+1}{2} = 5101$ одноцветных клеток. Если мы поставим на эти клетки коней, то они не будут бить друг друга.

Докажем, что большее количество коней поставить не удастся. Назовем две клетки *парой*, если из одной клетки можно попасть в другую одним ходом коня. Разобьем все клетки доски, кроме одной, на пары. Для этого разрежем доску вертикальной и горизонтальной линиями на 4 части: квадрат 96×96, два прямоугольника 96×5 и квадрат 5×5. Квадрат 96×96 разобьем на прямоугольники 2×4, каждый из которых разделим на пары следующим образом:

1	3	2	4
2	4	1	3

Два прямоугольника 96×5 разобьем на прямоугольники 5×8, каждый из которых разделим на пары таким образом:

1	2	9	12	10	11	14	13
3	4	10	11	9	12	15	16
2	1	8	7	20	19	13	14
4	3	5	6	18	17	16	15
5	6	7	8	19	20	18	17

Клетки квадрата 5×5, кроме одной, разобьем на пары так:

11	10	8	7	9
12		9	6	8
10	11	12	5	7
2	4	1	3	6
1	3	2	4	5

Итак, все клетки доски, кроме одной, мы разбили на $\frac{101^2-1}{2}$ пары. Если на доске поставлены кони так, что они не бьют друг друга, то в каждой паре клеток стоит не более одного коня. В свободной клетке также не более одного коня. Поэтому на доске не более $\frac{101^2-1}{2} + 1 = \frac{101^2+1}{2}$ коней.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП КОНКУРСА ИМЕНИ А.П.САВИНА «МАТЕМАТИКА 6–8»

1. Искомым множеством являются точки отрезка C_1C_2 на стороне AB, где C_1 и C_2 – точки, симметричные вершине C относительно биссектрис углов A и B соответственно (рис.1).

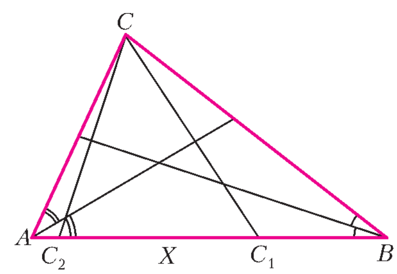

Рис. 1

2. Обозначим вершины треугольника A, B, C так, что $AC = b$, $AB = c$ и $BC = a$. Если после сгиба точка C попала в точку C_1, то $AC_1 = \frac{bc}{a+b}$, $C_1B = \frac{ac}{a+b}$.

3. Всегда.

4. Раскраска таблицы требуемым образом возможна только для $4 \le m \le 64$. Случай $m = 4$ показан на рисунке 2.

5. Все целые точки можно покрасить в четыре цвета, например: 1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – зеленый, далее периодически повторяя эту цветовую последовательность. Меньшим количеством цветов обойтись невозможно: числа 0, 2, 5, 7 надо окрасить по-разному, так как их попарные разности – простые числа.

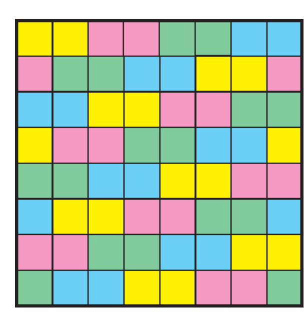
Рис. 2

6. Исходному равенству удовлетворяют все тройки чисел (p, p, p), где p – простое, и только они.

7. Наибольшее возможное число ничьих равно 51.

8. Одно пересечение.

9. Пусть x, y – корни квадратного уравнения. Тогда $(x-y)^2 = D$, где D – дискриминант. Если один из корней равен D, то получаем $(D-y)^2 = D$. Обозначим $n = D - y$.

Тогда $D = n^2$, $y = n^2 - n$. Следовательно, уравнение $\left(x - n^2\right)\left(x - n^2 + n\right) = 0$ удовлетворяет условию задачи.

10. Поскольку $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ и $1 \geq x + y$, то $1 \geq 2\sqrt{xy}$ и $1 \geq 4xy$. Таким образом, $2xy \geq (2xy)(4xy) = 8x^2y^2$, поэтому $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \leq 1$.

12. *Ответ*: $p = 3$, $q = 2$.

13. Число $\{x\}(x + [x]) = (x - [x])(x + [x]) = x^2 - [x]^2$ целое тогда и только тогда, когда x^2 – целое число. Следовательно, x – квадратный корень из любого натурального числа.

14. Рассмотрим 2 случая.

1) По крайней мере одно из чисел m или n кратно 3. Тогда исходный прямоугольник доски можно разбить на триплеты – прямоугольники 1×3. Способ перекраски триплетов двух возможных видов показан на рисунке 3,*а*,*б*. Применив соответствующий способ к каждому триплету доски, получим требуемое.

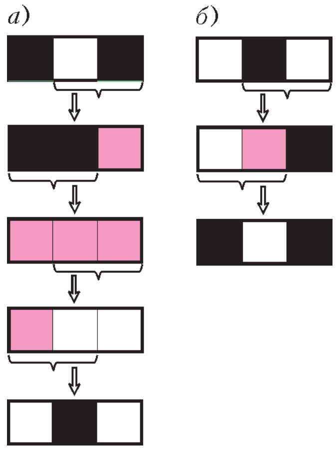

Рис. 3

2) Ни одно из чисел m или n не кратно 3. Обозначим количество черных клеток через a, а белых клеток – через b, тогда $a + b = mn$, причем либо $a = b$, если хотя бы одно из чисел m или n четное, либо $a = b \pm 1$, если оба числа m и n нечетные.

Заметим, что черная клетка перекрашивается в белую клетку за количество шагов, дающее остаток 2 при делении на 3, это мы будем записывать так: $2(\bmod 3)$. Соответственно, белая клетка перекрашивается в черную за количество шагов, сравнимое с 1 по модулю 3: $1(\bmod 3)$. Поскольку в каждом акте перекрашивания участвуют две соседние клетки, то суммарное количество перекрашиваний, которым подвергаются все белые клетки, равно общему количеству перекрашиваний, которым подвергаются все черные клетки. Отсюда

$$2a \equiv b(\bmod 3). \qquad (*)$$

Если хотя бы одно из чисел m или n четное, то $a = b$, и сравнение $(*)$ равносильно $a \equiv 0(\bmod 3)$. Но тогда $mn = 2a \equiv 0(\bmod 3)$, что противоречит нашему допущению.

Если оба числа m и n нечетны, то $n = 6p \pm 1$, $m = 6q \pm 1$, и тогда либо число a, либо число b кратно 3, а другое число не делится на 3. В этом случае сравнение $(*)$ не выполняется.

Итак, исходный прямоугольник можно перекрасить только в том случае, когда по крайней мере одно из чисел m или n кратно 3.

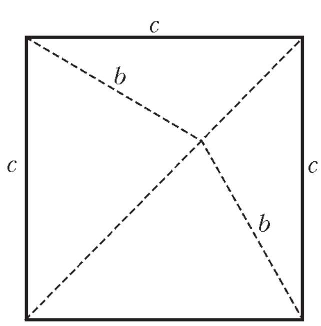

Рис. 4

16. *Ответ*: на 625.

17. *Ответ*: 60.

19. Пусть данный остроугольный треугольник имеет стороны a, b, c, $a \leq b \leq c$. Из теоремы косинусов для этого треугольника следует $a^2 + b^2 > c^2$, откуда $2b^2 > c^2$, или $b > \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Проведем в квадрате со стороной c диагональ так, как показано на рисунке 4, и от двух противоположных вершин отложим отрезки длины b с концевыми точками на диагонали. Это всегда можно сделать, поскольку отрезок длины b длиннее половины диагонали квадрата. В результате квадрат разбивается на 4 треугольника, сходных данному.

20. Непредставимых чисел больше.

21. Приведем требуемую расстановку чисел. Сначала расставим нечетные числа по центрально-симметричной схеме «сдвинутых песочных часов», показанной на рисунке 5 для случая доски 8×8. Суммарное количество расставленных нечетных чисел при этом равно 5000, т.е. совпадает с половиной всех чисел таблицы. Количество нечетных чисел в каждой строке и каждом столбце – нечетное, а вот в диагоналях – четное (в одной 100, в другой ни одного).

Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	
	Н	Н	Н	Н	Н		
		Н	Н	Н			
			Н				
				Н			
			Н	Н	Н		
		Н	Н	Н	Н	Н	
	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н

Рис. 5

Н	Н	Н	Н	Н	Н		Н
Н	Н	Н	Н	Н			
	Н	Н	Н				
		Н					
			Н				
		Н	Н	Н			
	Н	Н	Н	Н	Н		
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	

Рис. 6

«Отрежем» самый левый столбец таблицы и «приклеим» его справа (на рисунке 6 показан случай доски 8×8). В результате количество нечетных чисел в горизонталях и вертикалях не изменится, а в каждой диагонали станет нечетным: в одной 49, а в другой 51. Что и требовалось.

23. Пусть $P = n(n+1)(n+2)\ldots(n+7)$, где $n > 1$. Обозначим $m = n(n+7)$, тогда $P = (n(n+7))((n+1)(n+6))\ldots$ $\ldots((n+3)(n+4)) = m(m+6)(m+10)(m+12) =$ $= m^4 + 28m^3 + 252m^2 + 720m$. Несложно проверить, что при условии $m > 30$ (являющемся следствием случая $n > 3$) ближайшим к P и бóльшим P точным квадратом служит число $Q = \left(m^2 + 14m + 28\right)^2$, что больше P на $64m + 784 = \left(4 \cdot (2n+7)\right)^2$ – точный квадрат.

Осталось проверить утверждение задачи для n = 1, 2, 3. В этих случаях разность будет равняться, соответственно, $81 = 9^2$, $729 = 27^2$, $9 = 3^2$.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ

1. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 7\ \text{с}^{-1}$. **2.** $\omega = \sqrt{\frac{m}{m+M}\frac{g}{R}} = 2\ \text{с}^{-1}$.

3. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\ \text{с}^{-1}$. **4.** $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} + \frac{k}{4m}} = 8\ \text{с}^{-1}$.

5. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} + \frac{k}{m}} = 9\ \text{с}^{-1}$. **6.** $\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 7\ \text{с}^{-1}$.

7. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R} - \frac{2k\lambda Q}{3mR^2}} = 10\ \text{с}^{-1}$ (здесь $k = 9 \cdot 10^9\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$ – электрическая постоянная).

8. $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g \sin\alpha}} = 471$ мс.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -6. **2.** $[1;\ 17]$. **3.** $\frac{2\pi}{3}+\pi m$, $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $m,k \in \boldsymbol{Z}$.
4. 1750 т. **5.** 32.
6. Фигура − прямоугольник площади 36.

Вариант 2

1. Если $a \neq \pm 1$, то система имеет единственное решение; если $a = -1$, то система не имеет решений; если $a = 1$, то система имеет бесконечное множество решений.
2. 6. **3.** 3.
4. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^m \frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{4}$, $m,n \in \boldsymbol{Z}$.
5. $\pi/3$, $2\pi/3$. **6.** 10 ч.

Вариант 3

1. 7, 6, 5. **2.** См. рис.7.

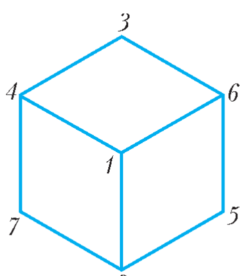

Рис. 7

3. $x < 0$, $x \geq \log_{2/3} 1/3$. **4.** $\frac{21}{25}$. **5.** 3.
6. $\frac{5\pi}{6}+\frac{10\pi t}{3}$, $t \neq 3k+2$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **7.** 1003.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_0 = \frac{g(t_1+t_2)}{2\sin\alpha} = 80$ м/с.
2. $a = \frac{F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{M} - \mu g \approx 8{,}2$ м/с^2. **3.** $t = 2t_0 = 12$ мин.
4. $Q_2 = Q_1\frac{T_2}{T_1} = 46{,}2$ кДж. **5.** $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{n_2^2-1}{n_1^2-1}} \approx 1{,}012$.

Вариант 2

1. $v_{\text{ср}} = \frac{v_1t_1+v_2t_2}{t_1+t_2} = 40$ км/ч.
2. $F_{\text{тр}} = mg\cos\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.
3. $P = \frac{\mathcal{E}^2 R_1 R_2^2}{\left((R_1+R_2)r+R_1R_2\right)^2} \approx 2{,}13$ Вт.
4. $T_2 = T_1\frac{p_2}{20p_1} = 900$ К.
5. $f_2 = \frac{F_2\left(a(d_1+|F_1|)+d_1|F_1|\right)}{(a-F_2)(d_1+|F_1|)+d_1|F_1|} = 26$ см.

Вариант 3

1. $t_0 = \frac{2\pi r}{\Omega(R+r)}$. **2.** $s = \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g}(\cos\alpha-4\mu\sin\alpha) = 0{,}75$ м.
3. $a = \frac{h}{2} = 20$ см. **4.** $p = \frac{p_{\text{в}}}{2}+p_{\text{нас}} = 395$ мм рт.ст. ≈ 53 кПа.
5. См. рис.8; здесь $\mathcal{E}_1 = 3\mathcal{E} = 4{,}5$ В и $r = \frac{4\mathcal{E}}{I_1} = 6$ Ом.
6. $v = \frac{eBR}{m} = 2{,}3\cdot 10^7$ м/с.
7. $L = F\frac{(\Gamma-1)^2}{\Gamma} \approx 8{,}9$ см.

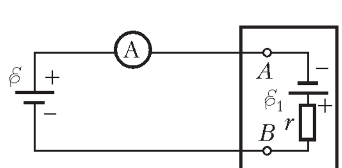

Рис. 8

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-\frac{5\sqrt{6}}{12}$. **2.** $(-\infty;\ -5)\cup[1{,}5;\ +\infty)$. **3.** $[-3;\ 0)$.
4. $(-1)^k\frac{\pi}{6018}+\frac{\pi k}{1003}$, $\frac{\pi}{2006}+\frac{\pi k}{1003}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
5. 10; 26. **6.** -1. **7.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.
8. $2\sqrt{x-1}$ при $1 \leq x < 2$; 2 при $x \geq 2$. **9.** -2; 2.
10. 14 км/ч, 2 км/ч. **11.** $(-\infty;\ 5/3]$.

Вариант 2

1. $1+2a$. **2.** 0. **3.** 1. **4.** $(-4;\ 1)[4/3;\ +\infty)$.
5. $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **6.** 20π. **7.** 4π. **8.** 30 с.
9. $\left(-4;\ \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$. **10.** $\left(5\pm\sqrt{2};\ 4\pm\sqrt{2}\right)$. **11.** $[-0{,}5;\ +\infty)$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $l = v(t_B-t_A)+x_A-x_B = 0{,}5$ м.
2. $a = g\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \approx 5{,}8$ м/с^2.
3. а) Увеличилась в 2 раза; б) является.
4. а) $\frac{m_{\text{угл}}}{m_{\text{вод}}} = \frac{M_{\text{угл}}}{M_{\text{вод}}} = 22$; б) в баллоне, где был водород, масса увеличится в $\frac{1}{2}\left(1+\frac{M_{\text{угл}}}{M_{\text{вод}}}\right) = 11{,}5$ раза.
5. $\frac{T_2}{T_1} = 1+\frac{2A}{3pV} = 3{,}5$. **6.** $\frac{q_1}{q_2} = \pm\frac{E_1}{2E_2} = \pm 2$.
7. $q = \frac{U\tau}{2R} = 300$ Кл.
8. $I = \frac{P}{U} \approx 0{,}91$ А; $U_L = \frac{2\pi\nu LP}{U} \approx 143$ В.
9. $\alpha_{\min} = \mathrm{arctg}(-hD) = \mathrm{arctg}\,0{,}1 \approx 5{,}7^\circ$.
10. $\frac{c}{v_{\max}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_C}} = 500$. **11.** $t = \tau-\frac{L}{R} = 5$ мс.

Вариант 2

1. $s = \frac{g}{8}\left(T^2+(2\tau-T)^2\right) = 6{,}25$ м. **2.** $F = m\left(g+\frac{4\pi^2R}{T^2}\right)$.
3. $V = \frac{v\cos\alpha}{k}$. **4.** $F = \frac{p_0S\Delta T}{T} \approx 13$ Н.
5. $A \approx 3{,}14$ кДж. **6.** $A = CE_0^2d^2$. **7.** $R = \frac{U^2}{P} = 484$ Ом.
8. $q = \frac{\mathcal{E}\tau}{NR} = 0{,}25$ мкКл. **9.** $n = \frac{c}{\lambda\nu} = 1{,}5$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕКСТИЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А.Н.КОСЫГИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1,25. **2.** 160. **3.** 1,2. **4.** −2. **5.** 19. **6.** 0,5. **7.** 5. **8.** 5. **9.** 2. **10.** 504. **11.** 25. **12.** 4,5. **13.** 30. **14.** 30. **15.** 72.

Вариант 2

1. 1,25. **2.** 3000. **3.** −2. **4.** −0,5. **5.** 7,25. **6.** 3. **7.** 5. **8.** 0,64. **9.** 1,12. **10.** 240. **11.** −2. **12.** 50. **13.** 42. **14.** 7. **15.** 12.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 8 мин и 9 мин.

2. $\frac{n\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $n,k \in \mathbf{Z}$; $\left\{0; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right\}$. **3.** 16.

4. $\left(\frac{3}{4}; \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Указание. Неравенство равносильно такому:

$$\log_x (7x-6)^2 > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left((7x-6)^2 - x^2\right)(x-1) > 0, \\ x \neq \frac{6}{7}. \end{cases}$$

5. $3\sqrt{3}$. *Указание.* Если $1 < x < 4$, то $S(x) = 2\left(2x^3 - 15x^2 + 33x - 20\right)$. Исследуйте $S(x)$ с помощью производной.

6. $a \in (-1; 2/3]$, $x = y = \left(3a + \sqrt{6-3a}\right)/3$; $a \in (2/3; 5/3) \cup (5/3; 2)$, $x_{1,2} = y_{1,2} = \left(3a \pm \sqrt{6-3a}/3\right)$; $a = 5/3$, $x = y = 4/3$.

Указание. Исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x > 0, \ x \neq 2, \\ y = x, \\ 3(x-a)^2 = a - 2, \end{cases}$$

и количество ее решений зависит от количества корней, не равных 2, последнего уравнения системы.

7. Проведем $OL \parallel BA_1$, L лежит в плоскости основания; $SL \parallel MB$, $SL = MB$; $F = AL \cap BC$ (рис.9). Продолжим AO до пересечения с боковой гранью BCC_1B_1 в точке H; $E = (FH) \cap B_1C_1$, $T = (FH) \cap (CC_1)$, $D = AT \cap A_1C_1$, очевидно, $ED \parallel AF$. Трапеция $AFED$ – искомое сечение. Проведем $SK \perp AF$, $K \in AF$; $SP \perp OK$, $P \in OK$; длина SP равна заданному в условии расстоянию от центра основания до секущей плоскости.

Пусть $a = AB$, $h = AA_1$, $d = SP$. Так как $SR = RM = \frac{a}{4\sqrt{3}}$, $CR = \frac{5a}{4\sqrt{3}}$. Из подобия $\Delta CRF \sim \Delta BLF$ следует $\frac{CF}{FB} = \frac{CR}{BL} = \frac{5}{2}$, отсюда $BF = \frac{2}{7}a$, $CF = \frac{5}{7}a$, $NF = \frac{3}{14}a$.

Из подобия $\Delta AOS \sim \Delta AHN$ следует $NH = \frac{3}{4}h$, а из $\Delta FNH \sim \Delta EGH$ – $EG = \frac{FN \cdot GH}{HN} = \frac{a}{14}$. Тогда $C_1E = \frac{1}{2}a - \frac{1}{14}a = \frac{3}{7}a$. Так как $\frac{TE}{TF} = \frac{C_1E}{CF} = \frac{ED}{AF} = \frac{3}{5}$, имеем $DE = \frac{3}{5}AF$. Площадь трапеции равна $S_{ADEF} = \frac{1}{2} \cdot 2OK(AF + DE) = \frac{8}{5}OK \cdot AF$. Из треугольника RSL находим $RL = \frac{a\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}$ и $SK = \frac{SR \cdot SL}{RL} = \frac{a}{2\sqrt{13}}$. При заданном расстоянии d $OK = \frac{SK^2}{PK} = \frac{SK^2}{\sqrt{SK^2 - SP^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{13}\sqrt{a^2 - 52d^2}}$.

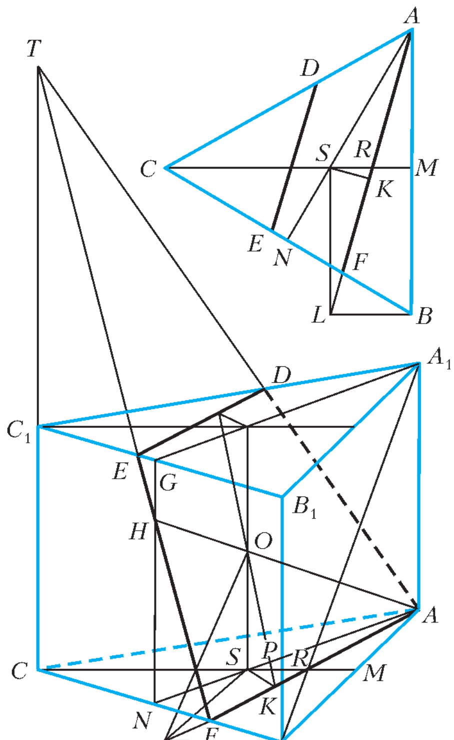

Рис. 9

По теореме косинусов

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cdot \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{13}a}{7}.$$

Следовательно, $S_{ADEF} = \frac{8}{7}$.

Вариант 2

1. 66 деталей.

2. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; $\left\{-\frac{17\pi}{12}; -\frac{13\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}\right\}$.

3. 17,5. **4.** $(0; 2) \cup (4; 6)$. **5.** 8.

6. $a \in (6; 10] \cup [15; 31) \cup (31; +\infty)$, $x_{1,2} = a \pm 5\sqrt{a-6}$, $y = 0$; $a \in (10; 15) \cup \{31\}$, $x = a + 5\sqrt{a-6}$, $y = 0$. **7.** 22.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Вращение кольца происходит за счет электрических сил, порождаемых вихревым электрическим полем, которое возникает при изменении магнитного поля.

2. Скорость света больше в первой среде.

3. $x = 7$ м. **4.** $T = 2$ дня.

5. $C = 2R$. *Указание.* Запишите уравнение состояния газа в параметрах p, V и воспользуйтесь первым началом термодинамики.

6. Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi = -\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2R} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3R},$$

откуда находим искомый заряд внутренней сферы:

$$Q = -\left(4\pi\varepsilon_0 R\mathcal{E} + \frac{1}{6}q\right).$$

7. $\gamma = \frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg} 2\sqrt{3} \approx 134^\circ$. *Указание.* Проведите ось x через центры шаров, а ось y – через точку их соприкосновения по касательной и воспользуйтесь законом сохранения импульса в проекциях на эти оси.

Вариант 2

1. $h_{\max} = \dfrac{\Delta p^2}{8gm^2} = 5{,}1$ м. **2.** $U = 5$ В.

3. $v = 0{,}8c = 2{,}4\cdot 10^8$ м/с. **4.** $A = \dfrac{hc}{\lambda} - eU_з = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ Дж.

5. $H = \dfrac{Q}{mg}$. *Указание*. Используйте закон сохранения энергии и уравнение равнопеременного движения.

6. $Q = \dfrac{5}{4}Mv^2 = 20$ Дж.

7. Так как сопротивление отсутствует, суммарная ЭДС в контуре должна быть равна нулю. Значит, суммарный магнитный поток через контур не должен изменяться. Если перемычка сдвинулась на величину x и в ней появился ток I, то изменение суммарного магнитного потока равно

$$\Delta\Phi = Bhx + LI = 0\text{, откуда } I = -\frac{Bh}{L}x.$$

На перемычку с током действует сила

$$F_x = IBh = -\frac{B^2h^2}{L}x,$$

которая сообщает перемычное ускорение

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{B^2h^2}{mL}x = -\omega^2 x.$$

Видно, то движение перемычки – колебательное с круговой частотой $\omega = \dfrac{Bh}{\sqrt{mL}}$. При колебательном движении максимальная скорость связана с амплитудой смещения соотношением $v_m = A\omega$. В нашем случае $v_m = v_0$, а амплитуда есть искомое расстояние s до остановки. Следовательно,

$$s = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0\sqrt{mL}}{Bh}.$$

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 8. **2.** $\arccos(1/4) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\{1/4\} \cup \left(1/2;\ \log_{5/3} 2\right] \cup \left[\log_{5/3} 3;\ +\infty\right)$.

4. а) ГМТ: квадрат (рис.10). Наименьшее значение $x + y = 2\pi$ достигается на левой нижней границе квадрата.

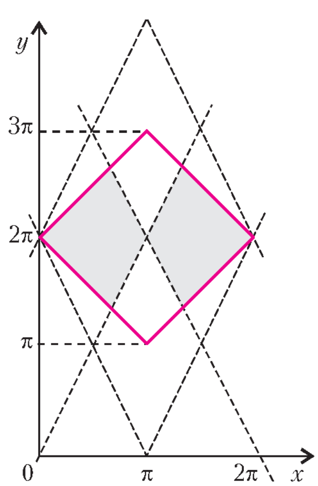

Рис. 10

б) $\varnothing$ при

$a \in \left(-\infty; \dfrac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{8\pi}{3}; -\infty\right)$;

$\left[2\pi - a; \dfrac{a}{2}\right) \cup \left(\dfrac{4\pi - a}{2}; a\right]$ при

$a \in \left(\dfrac{4\pi}{3}; 2\pi\right)$;

$\left[a - 2\pi; \dfrac{4\pi - a}{2}\right) \cup \left(\dfrac{a}{2}; 4\pi - a\right]$

при $a \in \left(2\pi; \dfrac{8\pi}{3}\right)$;

$(0;\pi) \cup (\pi; 2\pi)$ при $a = 2\pi$.

5. а) $12\left(3 + \sqrt{2}\right)$, б) $46\sqrt{3}$,

в) $\operatorname{tg}\alpha = 2\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1\right)$.

Вариант 2

1. 459. **2.** $\dfrac{-7 - \sqrt{21}}{2}$. **3.** $x \in (0; 2] \cup [5; 7)$.

4. $f'(x) = \dfrac{20\cos x\left(\sin x + \sqrt{2}/4\right)}{\left(2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x\right)^2}$ при $x \notin \{\pi k, 5\pi/4 + 2\pi m,$ $7\pi/4 + 2\pi n,\ k, m, n \in \boldsymbol{N}\}$, при других x функция и производная не определены.

Критические точки:

$$\left\{\pi/2 + \pi s, (-1)^{r+1}\arcsin\left(\sqrt{2}/4\right) + \pi r,\ r, s \in \boldsymbol{N}\right\}.$$

Наибольшие значения функция достигает в точках:

$x_{\max} = a + 3\pi/8$ при $a \in (2\pi k; \pi/8 + 2\pi k)$,

$x_{\max} = \pi/2 + 2\pi k$ при $a \in [\pi/8 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$,

$x_{\max} = a$ при $a \in (\pi/2 + 2\pi k; 5\pi/8 + 2\pi k)$,

$x_{\max} = 3\pi/2$ при $a \in (5\pi/4 + 2\pi k; 11\pi/8 + 2\pi k)$,

$\varnothing$ при $a \in [5\pi/8 + 2\pi k; 5\pi/4 + 2\pi k] \cup [11\pi/8 + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$,

где $k \in \boldsymbol{N}$.

5. а) $V = 216\sqrt{3}$. б) В сечении равнобедренный треугольник, трапеция или прямоугольник.

в) $S_{\min} = \dfrac{\sqrt{6}}{16}\sqrt{33 + 4\sqrt{7}}\sqrt{251 - 88\sqrt{7}}$.

.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_{ср} = \dfrac{5v_1v_2}{4v_1 + v_2} = 54{,}5$ км/ч. **2.** $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{M}_{O_2}}{2(2T_1/T_2 - 1)} = 4$ г/моль.

3. $U_1 = \dfrac{(5 + 6\varepsilon)U}{11\varepsilon}$. **4.** $l = \dfrac{v_0^2 M}{2\mu g(m + M)}$. **5.** $F = \dfrac{qvB}{2\sin\alpha}$.

Вариант 2

1. $l_1 = \dfrac{lF}{d - F}$. **2.** $v = \dfrac{2s}{\tau\sqrt{n}}$. **3.** $Q = \dfrac{11}{2}\nu RT$.

4. От пластины с зарядом $3Q$ к пластине с зарядом Q протечет заряд $5Q/3$.

5. $t = \dfrac{\operatorname{arctg} 11 + 10\pi}{\omega}$, где $\omega = \sqrt{k/m}$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $T = m\sqrt{a^2 + g^2}$. **2.** $v = \dfrac{2N}{5mg}$.

3. Пусть заряд нижней внешней пластины q, верхней $-q$. Из условия нулевого напряжения получим $qH = Qh$. Энергию системы вначале можно считать равной энергии трех конденсаторов, двух с зарядами q и одного с зарядом $Q - q$:

$$W_0 = \frac{q^2(H - h)}{2\varepsilon_0 S} + \frac{(Q - q)^2 h}{2\varepsilon_0 S}.$$

В конце энергия равна

$$W = \frac{Q^2 h}{2\varepsilon_0 S}.$$

Работа равна изменению энергии:

$$A = W - W_0 = \frac{Q^2h^2}{2\varepsilon_0 SH}.$$

4. $v \approx (2\pi/T)H = 3$ см/с (здесь $H = 500$ м, $T = 86400$ с).
5. При повороте катушки в ней меняется знак магнитного потока, а значит, и ЭДС индукции. Поэтому почти одинаковые ЭДС в катушках в одном случае складываются, а в другом вычитаются. В соответствии с этим, при неизменном общем сопротивлении в одном случае ток гальванометра заметен, а в другом близок к нулю.

Вариант 2

1. $\rho = \rho_0 \dfrac{m}{m + \rho_0 S(h_0 - h)}$.

2. Максимальная ЭДС индукции «источника» равна $\mathcal{E} = \omega BHh$. Запишем закон Ома для левого и правого контуров схемы (рис.11): $I_1 \cdot 2R = 2\mathcal{E}$, $I_2 \cdot 6R = 2\mathcal{E}$. Отсюда найдем ток в перемычке: $I = I_1 - I_2 = \dfrac{2\omega BHh}{3R}$.

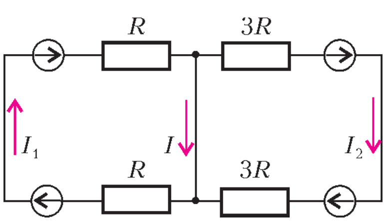

Рис. 11

3. Запишем законы сохранения энергии и заряда: $\dfrac{C_0U_0^2}{2} + mgh = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{CU^2}{2}$, $C_0U_0 = CU$. Отсюда найдем: $C = \dfrac{C_0^2U_0^2}{C_0U_0^2 + 2mgh - mv^2}$.
4. $Q = cmT_0 \approx 30$ МДж (здесь $m \approx 100$ кг, $T_0 \approx 300$ К).
5. Массивное колесо давит на стержень с некоторой силой F. При легком стержне можно считать эту силу направленной вдоль стержня. Если угол между стержнем и нормалью к доске φ, то при проскальзывании $f_{\text{тр}} = \mu F\cos\varphi \le F\sin\varphi$. Условие проскальзывания $\operatorname{tg}\varphi > \mu$ выполняется для длинного стержня, а для короткого происходит «заклинивание».

Вариант 3

1. $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\mu(1 + m/M)\right)$. **2.** $V_0 = \dfrac{(h - h_0)ST_0}{T - T_0}$.

3. $v = \dfrac{1}{2\rho C}$; $I = \dfrac{BH}{2R_0\rho C}$. **4.** $S \approx 2$ см^2.
5. Плотность солевого раствора больше плотности воды, но диаметры спиц заметно различаются, поэтому смещение второго поплавка значительно меньше.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.А.И.ГЕРЦЕНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left(1; \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(2; \dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$. **2.** 123300.

3. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{14}\right] \cup \left[\dfrac{13}{16}; +\infty\right)$. **4.** 24 и 16. **5.** $(1{,}5; 10)$.

6. $k = 4$, корни 6 и 3. **7.** $\dfrac{8}{3}\pi$. **9.** $250\sqrt{6}$.

Вариант 2

1. $(3; 1)$ и $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$. **2.** $(-\infty; 4] \cup [36; +\infty)$. **3.** 4.

4. $(1; +\infty)$. **5.** $\{-0{,}5; 0; 1; 1{,}5\}$. **6.** $[2{,}5; 3)$.

7. 24. **8.** m^2. **9.** 121,5.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1. **2.** $(5;2); (-5;-2)$. **3.** $-\pi$. **4.** $(-\infty;-3] \cup (0;1)$.

5. $(-\infty;-1] \cup \{3\}$. **6.** $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

7. $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 2

1. 23. **2.** $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. **3.** $b \le \dfrac{3 - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$.

4. $n = 5$; $x_1 = 10$; $x_2 = -20$. **5.** 4 спортсмена. **6.** $\dfrac{1}{2}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 3). **2.** 5). **3.** 2). **4.** 1). **5.** 3). **6.** 2). **7.** 3). **8.** 4). **9.** 2). **10.** 4).

Вариант 2

1. 3). **2.** 1). **3.** 3). **4.** 5). **5.** 1). **6.** 2). **7.** 5). **8.** 5). **9.** 2). **10.** 4).

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕЕНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И.М.ГУБКИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 7. **2.** 2. **3.** 46. **4.** −12. **5.** 0,6. **6.** −0,8. **7.** 1. **8.** −38.
9. Уравнение касательной к графику, проведенной в точке с абсциссой x_0, запишется так:

$$y = \left(3x_0^2 + 14x_0 + 17\right)x - 2x_0^3 - 7x_0^2 + a.$$

Эта прямая проходит через точку $M(0; 6)$, если выполняется условие $2p^3 + 7p^2 + 6 = a$. По условию нас интересуют значения параметра a, при которых это уравнение относительно неизвестной p имеет три различных корня. Рассмотрим функцию $y = 2x^3 + 7x^2 + 6$. Она убывает на промежутке $\left(-\dfrac{7}{3}; 0\right)$ и возрастает при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{7}{3}\right) \cup (0; +\infty)$. При этом $y_{\max} = y\left(-\dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{505}{27}$ и $y_{\min} = y(0) = 6$. Горизонтальная прямая $y = a$ пересекает ее график в трех различных точках, если $a \in \left(6; \dfrac{505}{27}\right)$. Наибольшее целое число из этого промежутка это $a = 18$.

10. Неравенство равносильно системе $x > 1$, $\dfrac{\log_7 \sqrt{5x + 204}}{\log_7 x} \ge 1$, решая которую, получаем $1 < x \le 17$. Значит, область решений содержит 16 целых точек.
11. 0,72. *Указание.* Пусть O − центр вписанной окружности, r − ее радиус, K − точка ее касания со стороной AD. Тогда $\angle KND = 45°$ и $KN = KD = 2r$. А так как $AB + CD = BC + AD$, то $BC = 1 - r$. Проведите высоту CT трапеции и из прямоугольного треугольника CTD найдите r.
12. 8. *Решение.* Пусть $SABCD$ − данная пирамида, M и K − середины сторон AD и BC, O − центр квадрата $ABCD$ соот-

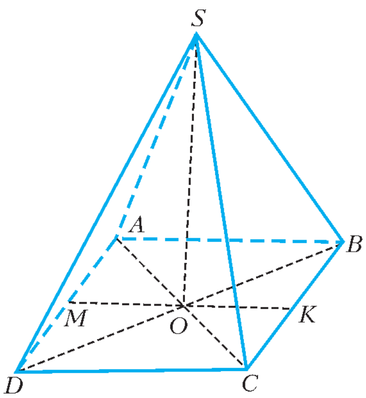

Рис. 12

ветственно (рис.12). Центр сферы радиуса R, проходящей через точки M, B, C, лежит на перпендикуляре к плоскости основания

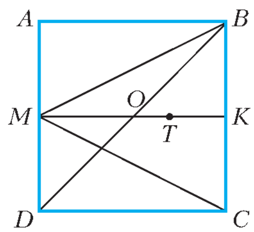

Рис. 13

пирамиды, проходящей через центр T окружности, описанной около треугольника MBC (рис.13). Пусть $\angle MCK = \varphi$. Тогда $\sin\varphi = \frac{MK}{MC}$ и радиус окружности есть $MT = \frac{MB}{2\sin\varphi} = \frac{5a}{8}$, где a – сторона основания пирамиды. Тогда

$$OT = MT - MO = \frac{a}{8}.$$

Рассмотрим теперь сечение пирамиды плоскостью MSK (рис.14). По условию $\angle SMO = \beta$, $\cos\beta = 2/3$. Поскольку сфера радиуса R проходит через точки M и S, ее центр лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку SM и проходящей через его середину L. Точки пересечения этой плоскости с высотой пирамиды и перпендикуляром к плоскости основания пирамиды, проведенном через точку T, обозначим F и P соответственно.

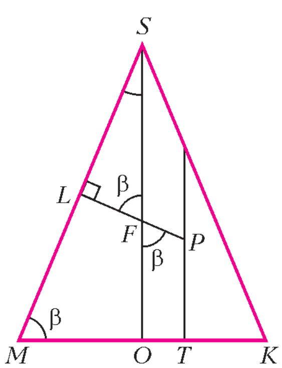

Рис. 14

Вычислим $R = MP$. Ясно, что $SM = \frac{a}{2\cos\beta}$, $SL = LM = \frac{a}{4\cos\beta}$. Далее, $LF = SL\,\mathrm{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{a}{4\sin\beta}$ и $FP = \frac{OT}{\sin\beta} = \frac{a}{8\sin\beta}$. Итак, $LP = LF + FP = \frac{3a}{8\sin\beta}$ и $R^2 = MP^2 = LM^2 + LP^2 = \frac{a^2}{64\sin^2\beta\cos^2\beta}\left(4 + 5\cos^2\beta\right)$.

А поскольку радиус r вписанной в пирамиду сферы равен $r = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, осталось найти отношение $\frac{r^2}{R^2}$.

Вариант 2

1. 0,4. **2.** −10. **3.** 7. **4.** −4. **5.** 5. **6.** 2. **7.** 0,08. **8.** −30. **9.** 5. **10.** 18. **11.** 0,3.**12.** 11.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = 60$ м/с. **2.** $T = 24$ Н. **3.** $k = 3$.
4. $T = 12$ Н. **5.** $t_н = 287\ ^\circ C$. **6.** $a = 30$ м/с^2.
7. $R_р = 90$ Ом. **8.** $k = 4$.

9. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2, \qquad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} + Q,$$

где Q – энергия, перешедшая при ударе в тепло (увеличение внутренней энергии системы). Выразим из первого уравнения проекцию конечной скорости пули:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2,$$

подставим во второе уравнение и получим для скорости шара u_2 квадратное уравнение

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)u_2^2 - 2v_1u_2 + \frac{2Q}{m_2} = 0.$$

Это уравнение имеет два положительных корня:

$$u_2 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - \frac{2Q}{m_2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \left[\begin{array}{l} 9 \text{ м/с} \\ 7 \text{ м/с}. \end{array}\right.$$

Чтобы понять, какой из корней соответствует условию задачи, надо для каждого из них вычислить скорость пули u_1:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2 = \frac{v_1 \mp \frac{m_2}{m_1}\sqrt{v_1^2 - \frac{2Q}{m_2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \left[\begin{array}{l} -16 \text{ м/с} \\ 32 \text{ м/с}. \end{array}\right.$$

Видно, что нижний корень соответствует случаю, когда пуля пробивает шар насквозь ($u_1 > u_2$). Условию задачи соответствует верхний корень, т.е. скорость шара равна 9 м/с.

10. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{3}{2}\nu RT_2 + \frac{kx^2}{2},$$

условие механического равновесия поршня:

$$p_2S = kx$$

и уравнение Клапейрона–Менделеева для конечного состояния газа:

$$p_2\left(Sh_2\right) = \nu RT_2.$$

Из последних двух уравнений исключим p_2S и получим

$$kxh_2 = \nu RT_2.$$

По условию задачи объем и, соответственно, высота поршня изменяются в 1,25 раза:

$$h_2 = 1{,}25\left(h_2 - x\right),$$

откуда находим

$$h_2 = 5x, \text{ и } 5kx^2 = \nu RT_2.$$

Подставив $kx^2 = \frac{\nu RT_2}{5}$ в закон сохранения энергии, получим

$$T_2 = \frac{3}{3{,}2}T_1$$

и выразим отношение давлений:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{3{,}2}\frac{1}{1{,}25} = 0{,}75.$$

Значит, давление понизилось на 25%.

11. $v = 3$ м/с. **12.** $k = 9$.

Вариант 2

1. $t = 2$ с. **2.** $\omega = 3\ \text{с}^{-1}$. **3.** $v = 250$ см/с.
4. $k = 7$. **5.** $T_1 = 200$ К. **6.** $U = 60$ В.
7. $R_2 = 15$ Ом. **8.** $l = 16$ см **9.** $v_{ш} = 1$ м/с.
10. На 50%. **11.** $E = 16$ кВ/м. **12.** $t = 157$ мкс.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -1. **2.** ± 2. **3.** 75. **4.** $-\frac{2}{3}$. **5.** $-2{,}2$; $1{,}2$. **6.** $a > b$.

7. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $-\frac{24}{25}$. **9.** $\{-3\} \cup [1; +\infty)$. **10.** ± 13.

11. $(-\infty; 1]$. **12.** $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$. **13.** 2295.

14. $(-\infty; 1) \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$. **15.** $\frac{1}{4}$. **16.** 1. **17.** $(2; -2)$; $(-2; 2)$.

18. 4. **19.** $\sqrt{21}$; 7. **20.** $[-2; 0] \cup [1; 3)$.

Вариант 2

1. $a + 2$. **2.** 14. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** 20%. **5.** -1. **6.** $\{2\} \cup [3; +\infty)$.

7. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}$. **9.** $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$. **10.** $(-\infty; 1]$.

11. 2. **12.** -1; $\log_3 6$. **13.** $[2; 3)$. **14.** $(1; 1)$; $(3; 3)$.

15. ± 1; ± 2; ± 4. **16.** 40. **17.** $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. **18.** $\frac{1}{4}$. **19.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

20. $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $a \in (-\infty; -1) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup [0; 1) \cup (1; +\infty)$. *Указание.* Ясно, что $x > a$ и $x \neq a + 1$. При этих условиях уравнение равносильно такому: $2x^2 - (3a+1)x = 0$, т.е. $x = 0$ или $x = \frac{3a+1}{2}$.

2. $\frac{\sqrt{13} - 3}{2}$. *Указание*. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x} = (1 + x)^2, \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-2) = \left(x^2 + 2x\right)\left(x^2 + 2x + 1\right), \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Пусть $a = x^2 + 2x$, $b = x - 2$. Тогда $b(b+1) = a(a+1)$, откуда либо $a = b$, либо $a + b = -1$. С учетом условия $x \geq -1$ получаем ответ.

3. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Рассмотрим два случая.

1) $x \notin \left(0; \frac{3}{2}\right)$. Так как арктангенсы лежат на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и имеют разные знаки, их сумма также лежит на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому неравенство при таких x равносильно неравенству $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(3 - 2x)\right) > 1$, т.е. $\frac{3 - x}{1 - x(3 - 2x)} > 1$, откуда $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2) $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. В этом случае оба арктангенса положительны. Заметим, что при $x \geq 1$ $\operatorname{arctg} x \geq \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, а при $x < 1$ $\operatorname{arctg}(3 - 2x) > \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Поэтому левая часть неравенства больше $\frac{\pi}{4}$ при всех $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

4. $\frac{2}{9}$, 1 или 2. *Указание.* Необходимо разобрать три случая: окружность вписана в ΔABC, касается только отрезка BC или касается только отрезка AB.

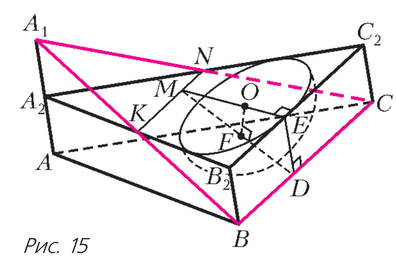

Рис. 15

5. Пусть сечение призмы $A_2B_2C_2$ проходит через центр сферы O параллельно ABC (рис.15). Так как $ME \perp BC$ и $DE \perp BC$, то плоскости DEM и A_1BC перпендикулярны. Поэтому OF равно расстоянию от центра сферы до плоскости A_1BC. Площадь треугольника $A_2B_2C_2$ по формуле Герона равна $S = 42$ и $OE = 2$. Так как $\frac{A_2K}{A_2B_2} = \frac{A_1A_2}{A_1A} = \frac{1}{2}$ и $\frac{A_2N}{A_2C_2} = \frac{1}{2}$, то KN – средняя линия треугольника $A_2B_2C_2$. Поэтому $ME = \frac{S}{BC} = 6$ и $OM = 4$. В силу подобия треугольников MOF и MDE получаем $\frac{OF}{OM} = \frac{DE}{DM} \Rightarrow OF = = \frac{OM \cdot OE}{\sqrt{ME^2 + OE^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$. Радиус сечения равен $\sqrt{OE^2 - OF^2} = = \frac{\sqrt{60}}{5}$.

Вариант 2

1. $\frac{59}{110}$. **2.** $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $(0; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right] \cup (3; 4)$.

4. $\frac{3}{2}\sqrt{39}$. **5.** $a \in \left[2; \sqrt[3]{32}\right] \cup \left\{\sqrt{5} + 1\right\}$.

Вариант 3

1. 12 км/ч. **2.** $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$. **3.** $\pi + 2\pi k$, $\frac{\pi}{7} + 2\pi k$, $\frac{11\pi}{7} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ или 3. **5.** См. рис.16.

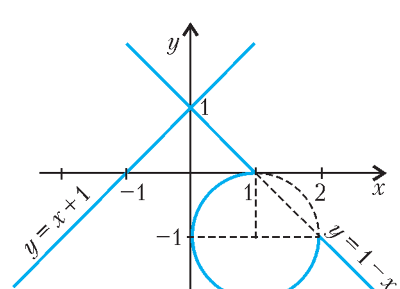

Рис. 16

XXXVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Задача 1

1) $A = 2a^2 \operatorname{tg}\theta$. 2) $H = 2a\sin\theta\sin\varphi$.

3) $\Delta N_{\text{опт}} = 2\dfrac{gM^2}{h^2}a^2\lambda_0 \operatorname{tg}\theta\sin\varphi$.

4) $\Delta N_{\text{опт}} = \dfrac{\lambda_0 A}{V}\sin\varphi$, где $V = 0{,}1597$ см$^2 \cdot$ нм.

5) $n = \dfrac{2\lambda_0 A}{V}$. 6) $\lambda_0 = 0{,}1441$ нм. 7) $A = 11{,}98$ см^2.

Задача 2

1) $x = \tilde{x} + \beta\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}$. 2) $\tilde{x} = \gamma^2 x - \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x)^2}$.

3) $\widetilde{L}(x_0) = \gamma L + \beta\gamma\sqrt{D^2 + \left(\gamma x_0 - \dfrac{L}{2}\right)^2} - \beta\gamma\sqrt{D^2 + \left(\gamma x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2}$.

4) Все время уменьшается.

5) $\widetilde{L} = \dfrac{L}{\gamma}$. 6) $x_0 = \beta\sqrt{D^2 + \left(\dfrac{L}{2\gamma}\right)^2}$.

7) $x = \dfrac{L}{2\gamma} - \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\dfrac{L}{2}\right)^2} + \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\dfrac{\beta L}{2}\right)^2}$.

8) Видимая длина равна $\widetilde{L}_{\text{р}} = 3$ м на раннем снимке и $\widetilde{L}_{\text{п}} = 1$ м – на позднем.

9) $v = \dfrac{c}{2}$. 10) $L = \sqrt{\widetilde{L}_{\text{р}}\widetilde{L}_{\text{п}}} = 1{,}73$ м.

11) $\widetilde{L} = \dfrac{2\widetilde{L}_{\text{р}}\widetilde{L}_{\text{п}}}{\widetilde{L}_{\text{р}} + \widetilde{L}_{\text{п}}} = 1{,}50$ м.

Задача 3

1) $\Delta x = 1{,}22\lambda F_{\#} = 1{,}22$ мкм.

2) $N = \left(\dfrac{L}{\Delta x}\right)^2 \approx 830$ мегапикселей.

3) $F_{\#} = 11$. 4) $z \approx 15$ см.

5) $U = \rho\dfrac{4\pi R^3}{2}c\left(T_{\text{с}} - T_0\right) = 1677$ Дж.

6) $J = \kappa\dfrac{T_1 - T_0}{R} \approx 2460$ Вт/м^2.

7) $P = 4\pi R^2 J = 4\pi\kappa R\left(T_1 - T_0\right) \approx 19{,}3$ Вт.

8) $\tau = \dfrac{U}{P} = \dfrac{\rho c R^2}{3\kappa}\dfrac{T_{\text{с}} - T_0}{T_1 - T_0} \approx 870$ с $= 14{,}5$ мин.

9) $Q = \dfrac{I_0\tau}{2} = 5$ Кл. 10) $I = \dfrac{I_0}{2} = 50$ кА. 11) $t \approx 10$ ч.

12) $N \approx 4{,}5 \cdot 10^9$. 13) $v = \dfrac{D}{N\pi r^2} = \dfrac{r^2\Delta p}{8\eta L} = 044$ мм/с.

14) $\dfrac{dT}{T} = \left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right)\dfrac{dp}{p}$. 15) $dp = \dfrac{mg}{k}\dfrac{p}{T}dz$. 16) $T_{\text{в}} = 20{,}6$ °С.

МОСКОВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА СТУДЕНТОВ ПО ФИЗИКЕ

1. $v_{\text{ср}\max} = L\sqrt{\dfrac{\mu g}{32A}}$. **2.** $I = \dfrac{mR^2}{4}$.

3. Возможны два варианта. 1) Пролетая через точку пересечения начальной и последующей орбит, каждый раз поворачивать вектор скорости без изменения ее величины; тогда $v_{\text{x}} = \pi v/2$. 2) Перейти на сильно вытянутую эллиптическую орбиту, в верхней точке развернуть плоскость орбиты на $90°$ и снова вернуться на круговую орбиту; тогда $v_{\text{x}} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)v$.

4. $a = \dfrac{2}{3}g\left(1 - \dfrac{16\sqrt{6}\mu}{9\pi}\right)$.

5. $\eta = \dfrac{4}{5}\dfrac{RT_2}{\left(c\left(T_2 - T_1\right) + r\right)\text{M}}$, где M – молярная масса водяного пара.

6. $W = -\dfrac{kq^2R^3}{2l^2\left(l^2 - R^2\right)}$. **7.** $\mathscr{E}_i = \dfrac{p_m N\omega}{L}$.

8. 16. **9.** $I = 4I_0$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(496) 270-73-59
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59