

летят мимо. Конечно, сила притяжения  $F$  во все время сближения двух молекул направлена вдоль линии центров, она-то и искривляет траекторию молекулы.

Запишем условие сохранения полной механической энергии второй молекулы в двух состояниях – «на бесконечности» и в момент касания первой:

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} + 0 = \frac{mv_d^2}{2} + (-\epsilon).$$

Здесь учтены те же факты, которые указаны на рисунке 1: потенциальная энергия вдали равна нулю, а при соприкосновении молекул равна  $-\epsilon$ .

А еще можно записать закон сохранения *момента импульса*. Это второй закон Кеплера о секториальной скорости, или о том, что радиус-вектор, проведенный из центра силового поля, заметает равные площади в равные отрезки времени. Хотя закон получен Ньютоном для гравитации, он верен для любого центрального взаимодействия (когда сила направлена строго по линии центров). Итак,

$$mv_{\infty} \cdot b = mv_d \cdot d.$$

Выразим из этого уравнения  $v_d$  и подставим в закон сохранения энергии. Получим

$$\left(\frac{b}{d}\right)^2 = 1 + \frac{\epsilon}{mv_{\infty}^2/2} = 1 + \frac{\alpha}{T}.$$

Здесь  $\alpha$  – постоянная, а в знаменателе оказалась температура. Видно, что с охлаждением любого газа, когда уменьшается средняя скорость его молекул, прицельное расстояние  $b$  растет: молекулы «чувствуют» друг друга на все больших расстояниях, а в пределе  $T \rightarrow 0$  – на бесконечно больших. Тут-то все газы и сконденсируются.

Кстати, полученный результат не зависит от конкретного вида потенциальной энергии взаимодействия, а зависит лишь от отношения потенциальной и кинетической энергий. Поэтому он применим и к кинетике небесных тел (звезд, планет, газовых туманностей, галактик...). Что же мешает им всем сконденсироваться (это было бы ужасно!)? Конечно, закон сохранения момента импульса. И слава Богу.

# Как Студент магнитное поле измерял

**А. СТАСЕНКО**

*Приступив к изучению труда Фарадея, я установил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представленным в форме обычных математических символов... Фарадей видел силовые линии, пронизывающие все пространство...*

Дж.Максвелл

КАК-ТО НА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТ НАМОТАЛ сотни метров проволоки в виде соленоида, да такого длинного, что магнитное поле в его середине можно было считать пространственно однородным, и подключил его к источнику переменного тока с регулируемой частотой  $\omega$  (рис.1). И задумался: как бы измерить индукцию магнитного поля?

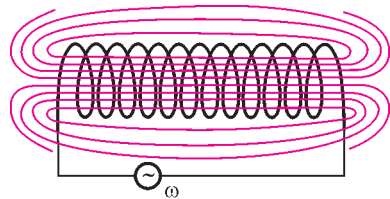


Рис. 1

Еще в позапрошлом веке было известно, что если через площадь некоторой проводящей рамки, например в виде окружности, со временем изменяется поток вектора магнитной индукции  $\Phi$ , то в этой рамке возникает электродвижущая сила

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Таким образом, можно сказать, что ЭДС  $\mathcal{E}$  – это скорость изменения потока вектора магнитной индукции через рамку.

Пусть, например, кольцо радиусом  $r$  находится в магнитном поле, изменяющемся со временем по гармоническому закону

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

Тогда поток вектора магнитной индукции через площадь кольца будет изменяться по закону

$$\Phi = \pi r^2 B_0 \cos \omega t.$$

Далее, если рамка проводящая, то ЭДС  $\mathcal{E}$  вызовет в ней электрический ток. А можно сказать, что этот ток вызывается напряженностью  $\vec{E}$  электрического поля, ускоряющего заряды проводника. Но ЭДС  $\mathcal{E}$  связана с напряженностью  $E$  соотношением

$$\mathcal{E} = E \cdot 2\pi r.$$

Собирая вместе все сказанное, запишем

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{\Delta(\pi r^2 B_0 \cos \omega t)}{\Delta t}.$$

Более того, и рамка может быть не проводящей, а сделанной, например, из соломинки, через которую пьют сок, – все равно в ней возникнет индукционное электрическое поле. А значит, может и не быть никакой рамки: электрическое поле возникнет и в вакууме, и в воздухе..., которым наполнен соленоид! – догадался Студент. Это поле будет равно

$$E = -\frac{r}{2} B_0 \frac{\Delta \cos \omega t}{\Delta t} = \frac{r B_0}{2} \omega \sin \omega t,$$

причем оно тоже будет изменяться по гармоническому закону (конечно, тут Студент учел, что скорость изменения косинуса есть минус синус, умноженный на  $\omega$ ).

Но электрическое поле действует на электрический заряд. И тут у Студента возникла идея эксперимента: подвесить внутри соленоида заряженный шарик и измерить амплитуду его колебаний в электрическом поле  $\vec{E}$ , порожденном переменным магнитным полем  $\vec{B}$ .

Сказано – сделано. Масса шарика равнялась, конечно,  $m$ , его радиус был  $a$ , электрический заряд был равен  $q$ , а длину нити (разумеется, невесомой, нерастяжимой, бесконечно тонкой) Студент выбрал равной  $r = b/2$ , где  $b$  – это

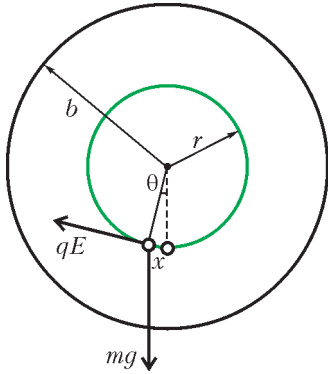


Рис. 2

внутренний радиус селеноида (рис.2). Тогда уравнение движения шарика в электрическом поле  $E$  и в поле тяготения с ускорением  $g$  приобрело вид

$$x'' = -g \sin \theta + \frac{q}{m} E .$$

Угол отклонения  $\theta$  этого математического маятника от положения равновесия легко связать со смещением  $x$  по окружности:  $\theta = \frac{x}{b/2}$ .

Кроме того, если рассматривать малые колебания (как и положено здравомыслящему Студенту, а тем более школьнику Отличнику), то вместо синуса можно (приближенно) написать его аргумент (конечно, в радианах):  $\sin \theta = \theta = \frac{2x}{b}$ . Тогда уравнение колебаний будет выглядеть так:

$$x'' + \frac{2g}{b} x = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{2} \omega \sin \omega t .$$

Тут еще можно ввести привычное обозначение  $\frac{2g}{b} = \omega_0^2$ , где  $\omega_0$  – частота собственных колебаний шарика.

Ба! Ведь это просто уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора! – воскликнул Студент и немедленно отыскал его решение в виде  $x = x_0 \sin \omega t$ , т.е. тоже гармонических колебаний с частотой вынуждающей силы. Скорость изменения синуса есть косинус, умноженный на  $\omega$ , а скорость изменения косинуса, как уже было сказано, это минус синус, умноженный на  $\omega$ . Значит, вместо ускорения  $x''$  появится  $-x_0 \omega^2 \sin \omega t$ . В результате получится уравнение для определения амплитуды  $x_0$  смещения шарика:

$$-x_0 \omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 x_0 \sin \omega t = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \omega \sin \omega t .$$

А поскольку это уравнение должно быть верно для любого момента времени,  $\sin \omega t$  можно сократить, и останется

$$x_0 = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Но что это? Получилось, что при значении  $\omega = \omega_0$  знаменатель обращается в ноль, а значит, амплитуда отклонения шарика устремляется в бесконечность (рис.3; сплошные кривые). Да ведь это резонанс, а с резонансом надо обращаться осторожно. Нужно учесть силу, тормозящую движение шарика, – силу сопротивления воздуха.

И Студент стал изучать эту силу, роняя мелкие шарики изпод потолка в ванну. На таком большом расстоянии шарик быстро успевал приобрести постоянную скорость  $v = \frac{h}{t}$ , которую легко было вычислить, зная высоту потолка  $h$  и замерив секундомером время падения  $t$ , а момент падения даже для самых мелких пылинок был легко заметен на гладкой поверхности воды. В резуль-

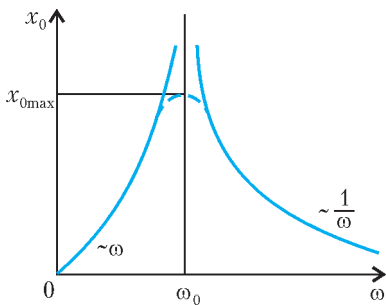


Рис. 3

тате этих измерений Студент обнаружил, что сила сопротивления воздуха для мелких шариков пропорциональна их радиусу и скорости движения:

$$F_{\text{сопр}} = \gamma a v = \gamma a x' ,$$

где  $\gamma$  – коэффициент пропорциональности. (Интересно, что еще древний Аристотель указывал на такую зависимость силы от скорости, а в позапрошлом веке ее точно вычислил Стокс для случая медленного, «ползущего» движения сферы в сплошной среде.) Наш Студент получил значение  $\gamma = \frac{10^{-3}}{3} \frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{м/с}}$  для условий, близких к «нормальным».

В итоге пришлось исправить уравнение движения шарика с учетом найденной силы сопротивления, так что оно приобрело вид

$$x'' + \omega_0^2 x + \gamma \frac{a}{m} x' = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \omega \sin \omega t ,$$

или, для краткости записи,

$$x'' + \omega_0^2 x + \beta x' = A \omega \sin \omega t ,$$

где

$$\beta = \gamma \frac{a}{m} , \quad A = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} .$$

И тут кончается физика и начинается математика (которая, впрочем, тоже есть часть физики – как считают многие приличные люди). Теперь уже не годится искать решение в прежнем виде  $x = x_0 \sin \omega t$ , и ясно почему: тогда часть слагаемых в левой части по-прежнему будет пропорциональна  $\sin \omega t$ , а вот новое слагаемое, содержащее скорость смещения, будет пропорционально  $\cos \omega t$ , и уравнение нельзя будет сократить ни на  $\sin \omega t$ , ни на  $\cos \omega t$ . Поэтому попробуем искать решение в виде

$$x = x_0 \cos(\omega t - \varphi) ,$$

где  $\varphi$  – так называемый сдвиг фаз (видно, что при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  получим прежнее решение).

Подставив эту функцию в наше уравнение, получим

$$x_0 \left( (-\omega^2 + \omega_0^2) \cos(\omega t - \varphi) - \beta \omega \sin(\omega t - \varphi) \right) = A \omega \sin \omega t .$$

Учтем следующие тригонометрические равенства:

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi ,$$

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi .$$

Тогда в предыдущем уравнении выделятся две группы слагаемых: одна будет содержать  $\cos \omega t$ , другая  $\sin \omega t$ . А поскольку это уравнение должно быть верным в любой момент времени, то коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  должны быть равны нулю. Так получим два уравнения для неизвестных  $x_0$  и  $\varphi$ :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \cos \varphi + \beta \omega \sin \varphi = 0 ,$$

$$x_0 \left( (-\omega^2 + \omega_0^2) \sin \varphi - \beta \omega \cos \varphi \right) = A \omega .$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\beta \omega} ,$$

$$x_0 = \frac{A \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\beta \omega)^2}} .$$

Видно, что теперь амплитуда отклонения шарика не обращается в бесконечность ни при каких значениях  $\omega$  (см. рис.3; штриховая кривая). Но она достигает максимального

значения при  $\omega = \omega_0$ , и это значение равно

$$x_{0\max} = \frac{A}{\beta} = \frac{qbB_0}{4\gamma a}.$$

Результат оказался не зависящим от массы шарика.

Теперь пора приступать к измерениям. Студент выбрал шарик радиусом  $a = 1$  мм. Но какой наибольший заряд можно сообщить этому шарик? Ясно, что такой, чтобы напряженность электрического поля у его поверхности не превышала предельно допустимого для воздуха значения  $E_{\max} = 3 \cdot 10^6$  В/м. Отсюда

$$q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 a^2 E_{\max} = \frac{10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} \text{ Кл} = \frac{10^{-9}}{3} \text{ Кл}.$$

Далее, внутренний радиус соленоида был равен  $b = 0,1$  м, а наибольшая амплитуда отклонения шарика от положения равновесия (в резонансе) оказалась равной  $x_{0\max} = 0,01$  мм, откуда уже легко получилось

$$B_0 = \frac{4\gamma a x_{0\max}}{b q_{\max}} = \frac{4 \cdot (10^{-3}/3) \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}}{0,1(10^{-9}/3)} \text{ Тл} = 0,4 \text{ Тл}.$$

Не мало, – подумал Студент. – Но неужели так же труден путь всех великих физиков?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Квантовые чудеса

М.КАГАНОВ

УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА ДОПУСКАЕТ ПОСТАНОВКУ РАЗНЫХ задач. С некоторыми из них вы встретитесь в этой статье и сможете познакомиться с явлениями, столь разительно отличающимися от поведения классических объектов, что их вполне можно назвать квантовыми чудесами.

### Нет стен, через которые нельзя пройти

Французский писатель Марсель Эме написал роман «Человек, проходивший сквозь стены». Хорошая, ироничная, умная книга. Роман был экранизирован, и фильм получился вполне неплохой. Проходить через стены человеку помогала его вера в себя. Когда он терял веру, способность исчезала. Весьма нравоучительно...

Мы точно знаем, что, не разрушив стену, ни человек, ни любое другое макроскопическое тело пройти сквозь нее не может. А микроскопическая частица? Не будем спешить с ответом.

На рисунке 5 изображена потенциальная яма. Вне области  $|x| < d$  частица находится не может: при  $|x| > d$  волновая функция  $\psi(x, t) \equiv 0$ . Это неизбежное следствие того, что  $U(x) = \infty$  при  $|x| > d$ . По этой же причине квантовая микро-частица не может проникнуть через бесконечно высокий потенциальный барьер.

А если потенциальный барьер имеет конечную высоту?

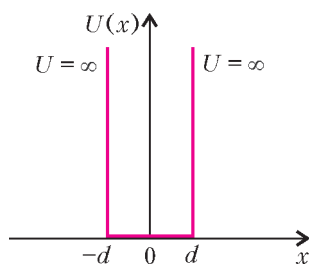


Рис. 5. Бесконечно глубокая потенциальная яма

При энергии, превышающей высоту барьера, частица *может* пролететь над ним. Но обязательно ли иметь энергию, превышающую высоту барьера? И обязательно ли частица пролетит над барьером?

Квантовая механика меняет наши обычные представления: микроскопическая частица может проникнуть через недоступную классической частице область, т.е. пройти через стену, а может отразиться от барьера даже тогда, когда ее энергия превышает высоту барьера.

Вернемся к потенциальному барьеру, изображенному на рисунке 3 (см. «Квант» №4):  $U(x) = U_0 > 0$  при  $|x| < d$ ,  $U(x) = 0$  при  $|x| > d$ . Классическая частица с энергией  $\epsilon < U_0$ , долетев до барьера, отразится, а частица, имеющая энергию  $\epsilon > U_0$ , свободно перелетит область  $|x| < d$ . А как поведет себя квантовая частица?

Найдем состояния квантовой частицы (ее  $\psi$ -функцию) при различных значениях энергии  $\epsilon$ . Для этого необходимо найти решение уравнения Шрёдингера. В квантовой механике, если частица движется под действием постоянной силы, имея определенную энергию, ее состояние называют *стационарным* – неважно, совершает частица финитное или инфинитное движение. Это состояние описывается стационарной волновой функцией, удовлетворяющей стационарному уравнению Шрёдингера.

В случае прямоугольного потенциального барьера это уравнение на разных участках оси имеет разный вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \epsilon\psi = 0 \text{ при } |x| > d,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (\epsilon - U_0)\psi = 0 \text{ при } |x| < d.$$

Слева и справа от барьера (при  $|x| > d$ ) решениями уравнения являются две плоские волны  $\exp(ik_e x)$  и  $\exp(-ik_e x)$ , волновой вектор  $k_e = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$ . Одна волна движется к ступеньке, а другая – от нее. При  $|x| < d$  характер решения зависит от величины энергии  $\epsilon$ . Если  $\epsilon > U_0$ , то и в этом случае решения представляют плоские волны  $\exp(ik_i x)$  и  $\exp(-ik_i x)$  с волновым вектором  $k_i = \sqrt{2m(\epsilon - U_0)}/\hbar$ . Если  $\epsilon < U_0$ , то решения уравнения совсем не похожи на плоские волны. Это  $\exp(\pm\kappa x)$ , где  $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}/\hbar$ . Одна из функций на