Глава 9 Степени

§ 1 Степень с целым показателем

Примеры и комментарии

1. $2^{10} = 1024$; $2^0 = 1$; $2^{-10} = \dfrac{1}{1024}$.

2. $3 > 2 \Rightarrow 3^{10} > 2^{10}$; $3 > 2 \Rightarrow 3^{11} > 2^{11}$.

3. $-2 > -3$.
Если n четно, то $(-2)^n < (-3)^n$.
Например, $(-2)^{10} = 2^{10} < 3^{10} = (-3)^{10}$.
Если n нечетно, то $(-2)^n > (-3)^n$.
Например, $(-2)^{11} = -2^{11} > -3^{11} = (-3)^{11}$, так как $2^{11} < 3^{11}$ и $-2^{11} > -3^{11}$.

4. Возведение в отрицательную степень лучше заменять возведением в положительную степень, пользуясь свойствами неравенств. Пусть $a > b$ и числа a и b одного знака. Тогда $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$. $3 > 2 \Rightarrow 3^{-10} < 2^{-10}$. Так как $3^{10} > 2^{10} \Rightarrow \dfrac{1}{3^{10}} < \dfrac{1}{2^{10}}$.

Повторим известные сведения о степенях.

1. Если n – натуральное число, то a^n – это произведение n экземпляров a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}$.
Можно записать: $a^1 = a$; $a^n = a^{n-1} \cdot a$.

Так как умножение ассоциативно, то в произведении n множителей скобки можно не ставить.
Степень с натуральным показателем определена для любого числа a.

2. Пусть $n = 0$. В таком случае будем считать, что $a^0 = 1$ для любого $a \neq 0$.

Для $a = 0$ нулевая степень числа a не определяется.

3. Если n – отрицательное целое число, т. е. если число $m = -n$ – натуральное, то a^n определяется как число, обратное к a^m: $a^n = \dfrac{1}{a^m} = \dfrac{1}{a^{-n}}$ для любого числа $a \neq 0$.

Таким образом, для всякого $a \neq 0$ и всякого целого числа n определена степень числа a с показателем n: a^n.
Свойства степеней с целыми показателями.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

При $a \neq 0$ и $b \neq 0$ эти свойства верны при любых целых m и n.

Возведение в степень неравенства

n – натуральное число.

1) Если $a > b \geq 0$, то $a^n > b^n$ для любого натурального числа n.

Если среди чисел a или b есть отрицательные, то возводить неравенство $a > b$ в степень n надо более осторожно.

2) Пусть n – нечетное натуральное число.

Если $a > b$, то $a^n > b^n$ (независимо от знаков a и b).

3) Пусть n – четное натуральное число.

Если оба числа a и b отрицательны, то $a > b \Rightarrow a^n < b^n$.

Если числа a и b разных знаков (скажем, $a > 0$, а $b < 0$), то нужно сравнить их модули.

Если $|a| > |b|$, то $a^n > b^n$; если $|a| < |b|$, то $a^n < b^n$.

Степенные функции

Степенной функцией с целым показателем называется функция вида $y = x^k$, где k – целое число. К степенным функциям относят также функции более общего вида $y = ax^k$.

Сначала рассмотрим случай, когда k – натуральное число.

Область определения. Функция $y = x^n$ (n – натуральное число) определена при всех x. Ее область определения – множество $\boldsymbol{R}$.

Нули функции. Функция обращается в нуль при $x = 0$.

Знаки функции. Если n четно, то $y \geq 0$ при всех x. Если n нечетно, то $y < 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ при $x > 0$.

Монотонность. Если n четно, то y убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Если n нечетно, то y возрастает на всей числовой оси.

Пусть k – отрицательное число, т. е. $k = -n$, где n – натуральное число. Рассмотрим функцию $y = x^k$.

Область определения. Степенные функции $y = x^{-n}$ определены при всех $x \neq 0$. Ось y будет вертикальной асимптотой их графиков.

Нули функции: нет.

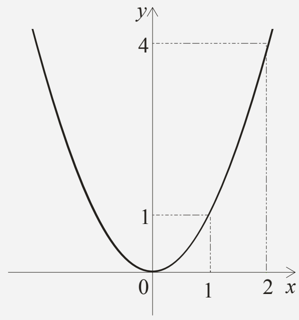
Знаки функции. Если число n четно, то $y > 0$ при всех допустимых x. Если n нечетно, то $y < 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ при $x > 0$.

Монотонность. Если n четно, то функция y возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывает на промежутке $(0; +\infty)$. Если n нечетно, то функция y убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

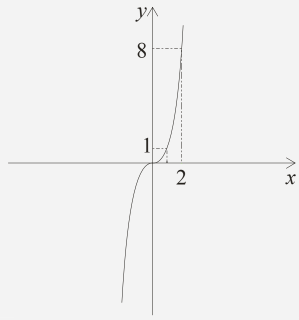
Примеры и комментарии

Графики функций $y = x^k$.

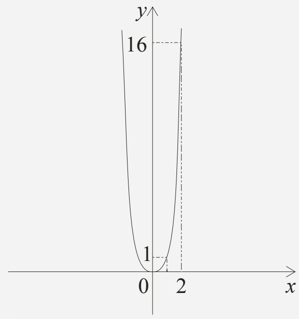
1. $k = 2$



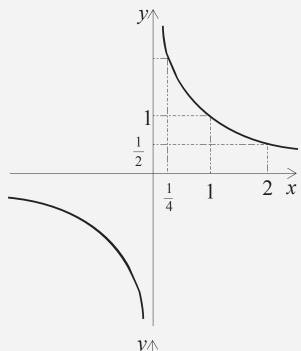
2. $k = 3$



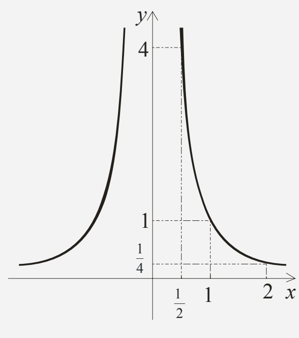
3. $k = 4$



4. $k = -1$



5. $k = -2$



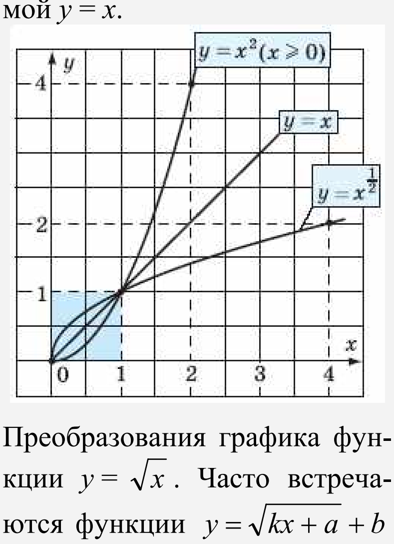
§ 2 Корни

Примеры и комментарии

1. Значения функции $y = \sqrt{x}$ вычисляются с помощью операции извлечения квадратного корня, которая нам хорошо знакома. Сейчас нашей главной целью является установление связи этой функции с функцией $y = x^2$.

Как мы знаем уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$ имеет два корня, один из которых (а именно, положительный корень) мы обозначаем через $\sqrt{a}$, а другой выражается через него: $-\sqrt{a}$. Поэтому из зависимости $y = x^2$ между переменными x и y мы не можем однозначно определить x как функцию от y. Однако, если мы уменьшим область определения функции $y = x^2$ и ограничим ее промежутком $[0; +\infty)$, то уже из зависимости $y = x^2$, $x \geq 0$ мы однозначно находим x: $x = \sqrt{y}$.

2. Графики функций $y = x^2$, $x \geq 0$ и $y = \sqrt{x}$ изображены на рисунке. Они симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.



Преобразования графика функции $y = \sqrt{x}$. Часто встречаются функции $y = \sqrt{kx + a} + b$ при $kx + a \geq 0$, $k \neq 0$, $b \in \boldsymbol{R}$.

Функция $y = \sqrt{x}$

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = \sqrt{x}$.

Область определения. Функция $y = \sqrt{x}$ определена при всех $x \geq 0$. Ее область определения – промежуток $[0; +\infty)$. Значения функции можно записать с помощью степени с показателем $\frac{1}{2}$: $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Нули функции. $y = 0$ при $x = 0$.

Знаки функции. При каждом x значение функции неотрицательно, то есть число $\sqrt{x} \geq 0$.

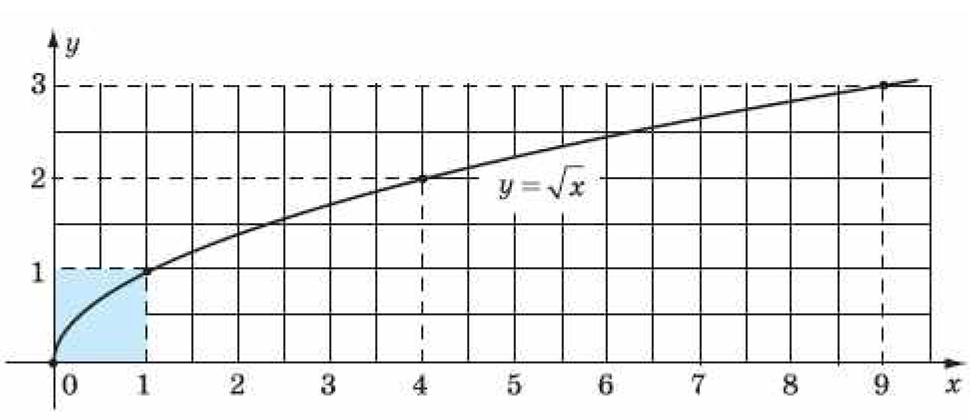
Монотонность. Функция возрастает на всем промежутке $[0; +\infty)$, где она определена.

Действительно, $x_1 > x_2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$, так как если бы выполнялось противоположное неравенство $\sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2}$, то в силу монотонности квадратичной функции на промежутке $[0; +\infty)$ мы получили бы неравенство $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 \leq \left(\sqrt{x_2}\right)^2 \Rightarrow x_1 \leq x_2$, противоречащее исходному.

Наибольшее и наименьшее значения. Наименьшее значение $y = 0$ достигается при $x = 0$. Наибольшего значения нет.

Область значений. Областью значений функции $y = \sqrt{x}$ будет промежуток $[0; +\infty)$, так как с одной стороны $\sqrt{x} \geq 0$, то есть каждое значение функции лежит в указанном промежутке, а с другой стороны всякое число $a \geq 0$ является значением функции при некотором значении x: $\sqrt{x} = a \Rightarrow x = a^2$, т. е. при $a \geq 0$ $\sqrt{a^2} = a$.

График функции. Графиком функции $y = \sqrt{x}$ является одна ветвь параболы, повернутой вокруг начала координат по часовой стрелке на 90°.



Взаимно обратные функции

Функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$ являются взаимно обратными. Дадим общее *определение*. Две функции f и g называются взаимно обратными, если равенство $y = f(x)$ верно тогда и только тогда, когда верно равенство $x = g(y)$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

Если две функции f и g взаимно обратны, то g называют обратной функцией для f и, наоборот, f – обратной для g.

Действительно, зависимости $y = x^3$ и $x = \sqrt[3]{y}$ равносильны.

Функция $y = \sqrt[3]{x}$

Область определения. Функция определена при всех x, т. е. ее областью определения является вся числовая ось $\boldsymbol{R}$.

Нули функции. $y = 0$ при $x = 0$.

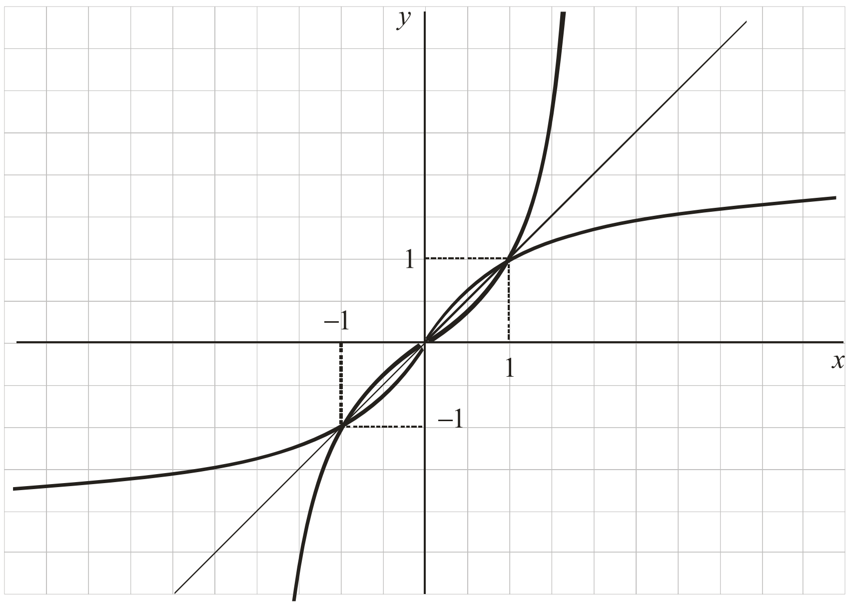
Знаки функции. Знак числа $\sqrt[3]{x}$ совпадает со знаком числа x. Поэтому $y < 0$ при $x < 0$, $y > 0$ при $x > 0$.

Монотонность. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастает на всей области определения $\boldsymbol{R}$.

Наибольших и наименьших значений у функции нет.

Область значений. Областью значений функции $y = \sqrt[3]{x}$ будет вся числовая ось $\boldsymbol{R}$, так как уравнение $\sqrt[3]{x} = a$ имеет при любом a корень $x = a^3$.

График функции. Для построения графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ надо взять кубическую параболу $y = x^3$ и отразить ее симметрично относительно прямой $y = x$.

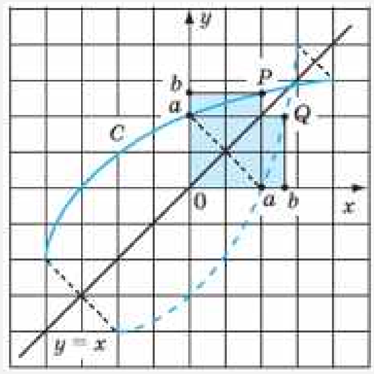


Примеры и комментарии

Графики
взаимно обратных функций

Пусть f и g – взаимно обратные функции. Графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны друг другу относительно биссектрисы угла xOy.

По определению взаимно обратных функций, формулы $y = f(x)$ и $x = g(y)$ выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y, а значит, эта зависимость изображается одним и тем же графиком – некоторой кривой C. Кривая C является графиком функции $y = f(x)$.



Возьмем произвольную точку $P(a; b) \in C$. Это означает, что $b = f(a)$ и одновременно $a = g(b)$. Построим точку Q, симметричную точке P относительно биссектрисы угла xOy. Как мы заметили раньше, точка Q будет иметь координаты $(b; a)$. Так как $a = g(b)$, то точка Q принадлежит графику функции $y = g(x)$; действительно, при $x = b$ значение $g(x)$ равно a. Таким образом, все точки, симметричные точкам кривой C относительно указанной прямой, лежат на графике функции $y = g(x)$. Они исчерпывают этот график целиком, так как аналогично показывается, что всякая точка функции $y = g(x)$ при указанной симметрии попадает на график функции $y = f(x)$. Теорема доказана.

§ 3 Степень с рациональным показателем

Определение. Пусть рациональное число r имеет вид дроби $r = \frac{1}{n}$, где n – натуральное число. Для всякого числа $a \geq 0$ степень $a^r = a^{\frac{1}{n}}$ определяется как $\sqrt[n]{a}$, т. е. как неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.

Для произвольного положительного рационального числа, записанного дробью $r = \frac{m}{n}$, степень a^r определяется как m-ая степень числа $a^{\frac{1}{n}}$, т. е. $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ при $a \geq 0$.

Обратим внимание на два важных частных случая $a = 0$, $a = 1$: для любого рационального числа r $1^r = 1$; $0^r = 0$ для любого положительного рационального числа r.

Степень с отрицательным рациональным показателем для положительного числа a определяется так:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m}.$$

На степени с рациональными показателями распространяются все свойства степеней, указанные нами для целых показателей.

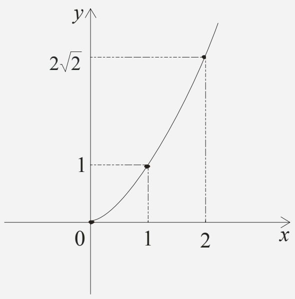
1. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$
2. $\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1 - r_2}$
3. $\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 r_2}$
4. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Числа r_1, r_2, r – произвольные рациональные числа, числа a, b – положительные.

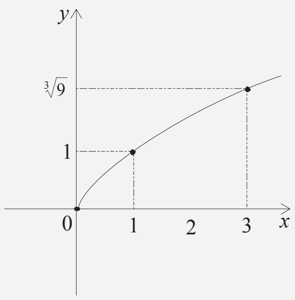
Примеры и комментарии

Графики степенных функций с рациональными показателями

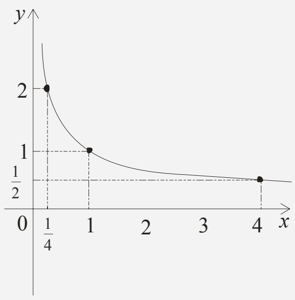
1. $y = x^{\frac{3}{2}}$



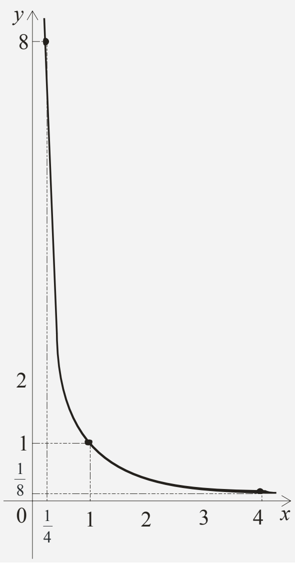
2. $y = x^{\frac{2}{3}}$



3. $y = x^{-\frac{1}{2}}$



4. $y = x^{-\frac{3}{2}}$



Степенные функции с дробными показателями

Для любого рационального числа можно построить функцию $y = x^r$.

Если $r > 0$, то областью определения этой функции считается промежуток $[0; +\infty)$, т. е. $x \geq 0$. Если же $r \leq 0$, то исключается точка $x = 0$, т. е. в качестве области определения берется промежуток $(0; +\infty)$.

Свойства функций $y = x^r$ при $r > 1$ похожи на свойства функции $y = x^2$ с областью определения $[0; +\infty)$.

Если $0 < r < 1$, то свойства функции $y = x^r$ можно сравнивать со свойствами функции $y = \sqrt{x}$ (которая совпадает с функцией $y = x^{\frac{1}{2}}$) и $y = \sqrt[3]{x}$ (которая совпадает с функцией $y = x^{\frac{1}{3}}$ для $x \geq 0$).

При отрицательных значениях r свойства функции $y = x^r$ можно сравнивать со свойствами функции $y = \dfrac{1}{x}$, которая совпадает с функцией $y = x^{-1}$ при $x > 0$.

Иррациональные уравнения и неравенства

Иррациональным уравнением (неравенством) называют уравнение (неравенство), в которое входят степенные функции с дробными показателями.

Простейшее иррациональное уравнение имеет вид $x^r = a$, где степенная функция $y = x^r$ с рациональным показателем r считается заданной при $x \geq 0$ ($x \neq 0$, если $r \leq 0$). Такая функция имеет областью значений множество $y \geq 0$ ($y > 0$, если $r \leq 0$) и каждое значение принимает ровно один раз. Поэтому при $a > 0$ уравнение имеет ровно один корень: $x = a^{\frac{1}{r}}$.

Простейшее иррациональное неравенство имеет аналогичный вид $x^r < a$, где, разумеется, вместо знака $<$ может стоять любой другой знак неравенства. Так как функция $y = x^r$ ($x \geq 0$) строго монотонна, то решением неравенства будет промежуток (входящий в область определения функции), одним из концов которого является точка $x = a^{\frac{1}{r}}$.

Примеры и комментарии

В уравнениях и неравенствах встречаются как записи степеней с рациональными показателями, так и с помощью радикалов.

1. $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 \Leftrightarrow x = 4$.
Ответ: $x = 4$.

2. $x^{\frac{2}{3}} = 16 \Leftrightarrow x = 16^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 4^3 = 64$. Ответ: $x = 64$.

3. $\sqrt[3]{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 27$.
Ответ: $x = 27$.

4. $x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$.
Ответ: $x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$.

5. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 16$. Ответ: $x = 16$.

Обратим внимание на то, что если встретилась степень с натуральным четным показателем, то считается, что она определена при всех значениях аргумента, и тогда число корней увеличивается.

6. $x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$.
Ответ: $x = \pm\sqrt[4]{3}$.

Приведем примеры решения простейших иррациональных неравенств.

7. $\sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4$. Ответ: $[4; +\infty)$.

8. $x^{\frac{2}{3}} < 4 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4^{\frac{3}{2}}$.
Ответ: $[0; 8)$.

9. $x^{-\frac{3}{4}} > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1^{-\frac{4}{3}}$.
Ответ: $(0; 1)$.

10. $\sqrt[3]{x} < 2 \Leftrightarrow x < 8$.
Ответ: $(-\infty; 8)$.

Беседа Логарифм

Примеры и комментарии

Свойства логарифмов позволяют логарифмировать выражения, составленные с помощью операций умножения, деления и возведения в степень.

1. $A = \dfrac{2^5\sqrt{3}}{5^3\sqrt[3]{7^2}}$, $\log_a A = 5\log_a 2 + \dfrac{1}{2}\log_a 3 - 3\log_a 5 - \dfrac{2}{3}\log_a 7$.

2. $A = \dfrac{3a^3\sqrt[3]{b}}{(c+d)^2}$,

$\log_a A = \log_a 3 + 3 + \dfrac{1}{3}\log_a b - 2\log_a (c+d)$.

Иногда приходится искать выражение по его логарифму. Такую операцию называют *потенцированием*.

1. $\log_a A = 2\log_a 3 - \dfrac{3}{2}\log_a 2$,

$A = \dfrac{3^2}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{9}{2\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

2. $\log_a A = 1 + 2\log_a b - 3\log_a c$,

$A = \dfrac{ab^2}{c^3}$.

3. $\log_a A = \log_a (x-1) + \log_a (x+1) - \dfrac{1}{2}\log_a x$,

$A = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$.

В этой главе мы изучали степени. В соотношение $a^b = c$ входят три числа: a – основание степени, b – показатель степени и c – значение степени. Одно из трех чисел можно считать фиксированным, а два других менять в зависимости друг от друга. Например, закрепив показатель $b = r$, мы получим знакомую степенную зависимость $x^r = y$ ($a = x$, $c = y$).

Выразив из нее x через y, получим обратную функцию, которая тоже является степенной, но с другим показателем: $x = y^{\frac{1}{r}}$.

Если же мы закрепим основание a и будем менять b и c, обозначив их, как обычно, переменными x и y, то получим зависимость вида $a^x = y$, которая является для нас новой. Функция вида $y = a^x$ называется *показательной функцией*. Мы умеем вычислять ее значения, когда $x = r$ – рациональное число: a^r – это степень с рациональным показателем. Вычисление степени a^x с любым показателем производится приближенно: задают приближенное значение x, скажем, $x \approx r$, и вычисляют число a^r, которое при r, близких к x, дает приближенное значение степени a^x.

Если мы захотим построить график показательной функции $y = a^x$, то нам, конечно, достаточно лишь рациональных значений x. На рисунке изображен график функции $y = 2^x$.

Теперь попробуем из соотношения $y = 2^x$ выразить x через y. Для этого и нужны логарифмы.

Определение. Логарифмом числа y по основанию a называется такое число x, для которого $a^x = y$. Обозначается логарифм так: $x = \log_a y$. В качестве основания системы логарифмов чаще всего используется $a = 2$ или $a = 10$.

Равенства $a^b = c$ и $b = \log_a c$ выражают одну и ту же связь между числами a, b и c.

Подставляя в равенство $a^b = c$ запись числа b в виде логарифма, получаем *основное логарифмическое тождество*: $a^{\log_a c} = c$.

Подставляя в равенство $b = \log_a c$ выражение в виде степени, получаем еще одно тождество: $\log_a a^b = b$.

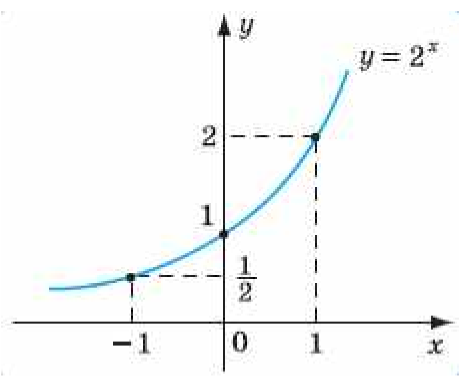
Свойства степеней и логарифмов тесно связаны между собой. Они фактически выражают одно и то же, только один раз мы обращаем внимание на поведение самих степеней, а другой – на поведение показателей.

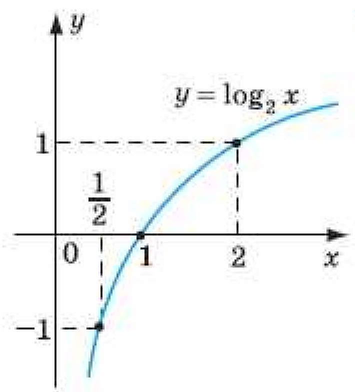
Запишем *свойства логарифмов, соответствующие свойствам степеней*:

$a^{b_1}a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$	$\log_a(c_1c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$
$\dfrac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1-b_2}$	$\log_a \dfrac{c_1}{c_2} = \log_a c_1 - \log_a c_2$
$\left(a^b\right)^k = a^{bk}$	$\log_a c^k = k\log_a c$
$\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$	$\log_a \sqrt[n]{c} = \dfrac{1}{n}\log_a c$

Необходимо помнить, что все числа, стоящие под знаком логарифма, должны быть положительны.

Функция вида $y = \log_a x$ называется логарифмической. Она является функцией, обратной показательной, и поэтому ее график симметричен графику показательной функции относительно прямой $y = x$. На рисунке изображен график функции $y = \log_2 x$. Эта функция является обратной к функции $y = 2^x$.





Примеры и комментарии

Логарифмы очень часто используются в приложениях математики. Приведем два примера.

1. *Формула Циолковского*. Эта формула, связывающая скорость ракеты v с ее массой m, такова: $v = kv_1 \log_{10}\dfrac{m_0}{m}$, где v_1 – скорость вылетающих газов, m_0 – стартовая масса ракеты. Скорость истечения газа v_1 при сгорании топлива относительно невелика (в настоящее время она меньше или равна 2 км/с). Логарифм растет очень медленно, и для того чтобы достичь космической скорости, необходимо сделать большим отношение $\dfrac{m_0}{m}$, т. е. почти всю стартовую массу отдать под топливо.

2. *Коэффициент звукоизоляции* стен измеряется по формуле $D = A\log_{10}\dfrac{p_0}{p}$, где p_0 – давление звука до поглощения, p – давление звука, прошедшего через стену, A – некоторая константа, которая в расчетах принимается равной 20 дБ. Если коэффициент звукоизоляции D равен, например, 20 дБ, то $\log_{10}\dfrac{p_0}{p} = 1$ и $p_0 = = 10p$, т. е. стена снижает давление звука в 10 раз (такую звукоизоляцию имеет деревянная дверь).

Свойства логарифма использовались при вычислениях, когда не было вычислительной техники: умножение чисел заменялось сложением. Для этого использовались логарифмические таблицы, которые были составлены, начиная с XVII века с большой точностью. Так, чтобы перемножить, например, 3547 на 6321 сначала находились логарифмы этих чисел, эти логарифмы складывались, а затем с помощью тех же таблиц по логарифму находилось само число.