

Методическое руководство к лабораторной работе «Линейное диофантово уравнение»

(Алгебра, 7 кл., глава 4, ЛР-04; компьютерная версия)

В работе строится алгоритм нахождения частного решения линейного диофантова уравнения $ax + by = c$ в электронной таблице Excel. С одной стороны, он продолжает построенный ранее алгоритм Евклида (по существу, к последнему надо просто приписать еще несколько столбцов). С другой стороны, этот алгоритм дополняет печатную версию лабораторной работы в Рабочей тетради (РТ). Две версии вместе дают алгоритм нахождения полного решения произвольного линейного диофантова уравнения и условия его разрешимости.

Инструментарий работы состоит из одной «книги» Excel, имеющей два листа, – «Рабочий лист», на котором строится алгоритм, и лист «Образец» с готовым алгоритмом. На втором листе в качестве необязательного «украшения» в строчке с найденным решением выводится само решение в виде $x = \dots$; $y = \dots$; оно также повторяется вверху листа. Эти дополнительные элементы даны для удобства; более сильные ученики могут захотеть воспроизвести их самостоятельно.

Ход работы и комментарии к заданиям

Если брать обе версии работы, то в ней можно выделить такие блоки:

- 1) Вводная задача на делимость и ее сведение к диофантову уравнению (п. 1 из РТ);
- 2) нахождение частного решения (компьютерная версия, задания 1-5) и условий разрешимости уравнения;
- 3) составление общего решения по найденному частному (пп. 2, 3 РТ);
- 4) еще задачи на делимость (п. 4 РТ).

В полном объеме выполнить все вышеперечисленное за урок, конечно, невозможно. Естественным минимумом кажется п. 1 печатной версии (для мотивировки введения уравнений рассматриваемого вида) и задания 1-3 компьютерной версии (первые два подводят к идее алгоритма, в 3-м он реализуется). После этого разумно рассмотреть п. 2 из РТ, чтобы дать представление о нахождении общего решения. Оставшееся время, если оно будет, можно, по вкусу, посвятить либо более полному исследованию самого уравнения на основе экспериментов с построенной таблицей, либо задачам на делимость. Как было отмечено в рекомендациях к ЛР «Алгоритм Евклида», две работы можно объединить, отведя на них двухчасовое занятие.

Остановимся на заданиях компьютерной версии.

Чтобы найти частное решение, например, уравнения $23x + 10y = 1$, удобно рассматривать целое семейство уравнений $23x + 10y = c$ с такой же левой частью и различными правыми частями. Зная решения каких-то из этих уравнений, можно находить решения других уравнений.

Задание 1. Пара чисел $(x; y) = (1; -2)$ является решением уравнения $23x + 10y = 3$. Найдите решения уравнений а) $23x + 10y = 6$; б) $23x + 10y = 9$.

Ответ: а) $(2; -4)$, б) $(3; -6)$.

Задание 2. а) Придумайте решение уравнения $23x + 10y = 10$. б) Пользуясь этим решением и решением уравнения $23x + 10y = 9$ (см. задание 1), найдите решение исходного уравнения $23x + 10y = 1$.

Ответ: а) $(0; 1)$, б) $(0; 1) - (3; -6) = (-3; 7)$.

Эти задания выполняются на бумаге или даже устно в режиме фронтального обсуждения. Ученики должны уяснить, что сложению, вычитанию, умножению на число свободных членов уравнений с одинаковыми коэффициентами при x и y отвечают такие же операции с решениями этих уравнений. В частности, если пары $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – решения двух уравнений $23x + 10y = c_1$ и $23x + 10y = c_2$, соответственно, то их разность $(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ – решение уравнения $23x + 10y = c_1 - c_2$; для суммы решений $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ и произведения пары на число, $(kx_1; ky_1)$, верны аналогичные утверждения. Таким образом, если с помощью последовательности этих операций получить из правых частей данных уравнений некоторое число d , то те же операции, примененные к решениям этих уравнений, дадут решение уравнения $23x + 10y = d$. Далее следует объяснить, что с помощью алгоритма Евклида можно получить решение для $d = \text{НОД}(c_1; c_2)$.

Действительно, возьмем более простой вариант этого алгоритма – с вычитанием. Вспомним, что на каждом его шаге из большего из чисел c_1 и c_2 вычитается меньшее, пока они не станут равными. Пусть $c_1 > c_2$, тогда пара чисел $(c_1; c_2)$ переходит в $(c_1 - c_2; c_2)$; одновременно, мы заменим пару $(x_1; y_1)$ (решение первого уравнения) парой $(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ (она будет решением уравнения с новой правой частью $c_1 - c_2$). Аналогично поступим при $c_2 > c_1$; если же $c_1 = c_2$, то ничего не меняем. Наконец, в качестве исходных уравнений можно взять уравнения с решениями $(1; 0)$ и $(0; 1)$, т.е., в нашем примере, $23x + 10y = 23$ и $23x + 10y = 10$ (ср. задание 2,а). Теперь все это можно перенести на рабочий лист задания в Excel.

Задание 3. Запишите во вторую строку листа значения коэффициентов уравнения $a = 23$ (ячейка A2), $b = 10$ (ячейка B2), исходные решения 1, 0, 0, 1 (ячейки C2, D2, E2, F2). В следующей, третьей строке запишите результат преобразования этих чисел после одного шага алгоритма: в столбцах A и B – формулы алгоритма Евклида (например, в A3 записывается формула «=ЕСЛИ(A2>B2;A2-B2;A2)»), в столбцах C, D, E, F – формулы преобразования решений (например, в C3 мы пишем «=ЕСЛИ(A2>B2;C2-E2;C2)»; остальные ячейки заполните самостоятельно). Выделите ячейки с A3 по F3 и «протяните» выделение вниз, пока не образуется строка, содержащая одинаковые значения в столбцах A и B (в данном случае 1). Проверьте, что пары чисел на пересечении этой строки со столбцами C, D и E, F являются решениями уравнения $23x + 10y = 1$.

Это задание основное. Построение алгоритма Евклида в столбцах A и B полезно вспомнить и повторить, но для экономии времени его можно просто скопировать из сохраненной работы «Алгоритм Евклида». Если две работы объединены в одну, то эти столбцы будут заполнены в ходе выполнения заданий по алгоритму Евклида. Для копирования достаточно выделить ячейки B3 и C3 на рабочем листе «алгоритма Евклида», нажать Ctrl+C, поместить курсор на рабочий лист «диофантова уравнения» в ячейку A3 и нажать Ctrl+V, а затем, как обычно, «растянуть» эти две ячейки вниз.

Ячейки с решениями заполняются так.

Если текущее значение a больше b , мы должны вычесть b из a , а также x_2 и y_2 из x_1 и y_1 , соответственно. Поэтому в ячейках A3, C3, D3 записываются формулы:

A3: =ЕСЛИ(A2>B2;A2-B2;A2) (эта формула уже стоит на месте);

C3: =ЕСЛИ(A2>B2;C2-E2;C2);

D3: =ЕСЛИ(A2>B2;D2-F2;D2).

Аналогично, в B3, E3, F3 записываются формулы:

B3: =ЕСЛИ(B2>A2;B2-A2;B2) (эта формула уже стоит на месте);

E3: =ЕСЛИ(B2>A2;E2-C2;E2);

F3: =ЕСЛИ(B2>A2;F2-D2;F2).

После этого остаётся распространить это вычисление на следующие ячейки, так что он будет вновь и вновь применяться к предыдущим результатам, настолько, чтобы числа в столбцах A и B стали одинаковыми. Результат можно сверить с листом «Образец». В данном частном случае этот алгоритм дает два решения – (7; -16) (в столбцах C и D) и (-3; 7) (в столбцах E и F).

Заметим, что наш алгоритм нахождения НОД работает только для натуральных a и b , поэтому и в уравнениях коэффициенты при неизвестных должны быть натуральными.

Для решения уравнений с отрицательными коэффициентами нужно сделать замену неизвестных (см. задание 4 в).

Задание 4

- а) Найдите в полученной табличке решения уравнений $23x + 10y = c$ при $c = 2; 3; 4; 7$.
б) Как найти решение при $c = 5$, при $c = -2$?
в) Найдите решение уравнения $23x - 10y = 1$.

Ответы: а) $(4; -9)$, $(1; -2)$, $(-2; 5)$, $(-1; 3)$; б) $(-15; 35)$, $(-4; 9)$; в) $(3; -7)$.

а) Чтобы найти в таблице решения для указанных значений c , достаточно найти эти значения в столбцах А и В. Например, число 2 стоит (должно стоять!) в ячейке А8. Соответствующие x_1 и y_1 (числа 4 и -9 в ячейках С8 и D8) дают, как нетрудно понять, решение уравнения $23x + 10y = 2$. А решения уравнения $23x + 10y = 7$ находятся в ячейках Е5, F5, т.к. 7 стоит в ячейке В5 (это $x_2 = -1$ и $y_2 = 3$).

Заметим, что вопрос а) на самом деле не очень простой – он требует полного понимания процедуры.

б) Чисел 5 и -2 в столбцах А и В нет. Но мы умеем решать уравнение $23x + 10y = 1$; поэтому искомые решения можно получить умножением: для $c = 5$ это $(5x; 5y) = (-15; 35)$ или $(35; -80)$, а для $c = -2$ это $(6; -14)$ или $(-14; 32)$. Также можно взять решение для $c = 2$, найденное в п. а), с обратным знаком: $(-4; 9)$. Полезно осознать, что если удастся найти решение для $c = 1$, то можно решить уравнение с теми же a и b при любом c .

в) Очевидно, пара $(x; y)$ является решением уравнения $23x - 10y = 1$ тогда и только тогда, когда пара $(x; -y)$ – решение $23x + 10y = 1$

Задание 5. а) Пользуясь построенным алгоритмом, решите уравнения: $125x + 33y = 1$, $11y - 19x = 1$, $24x + 37y = -1$.

- б) Решите уравнения $48x + 74y = 2$, $48x + 74y = 4$, $48x + 74y = 3$.
в) При каких c уравнение $48x + 74y = c$ разрешимо (в целых числах)?

Ответы: а) $(14; -53)$; $(4; 7)$; $(-17; 11)$ (получаются подстановкой коэффициентов в таблицу и соответствующей сменой знаков).

б) $(17; -11)$ для $48x + 74y = 2$ (можно найти это решение прямо из таблицы, а можно поделить обе части уравнения на $2 = \text{НОД}(48; 74)$ и получить, с точностью до знака, 3-е уравнение из п. а).

$(34; -22) = (2 \cdot 17; 2 \cdot (-11))$ для $48x + 74y = 4 (= 2 \cdot 2)$ (решение получается из предыдущего).

Уравнение $48x + 74y = 3$ решений не имеет: в таблице их найти не удастся, но теоретически это еще не значит, что их нет вообще (мы не доказали, что наш способ

дает решение всегда, когда оно есть). Но легко заметить, что в правой части четное число, а в левой нечетное.

в) Из рассмотренных в п. б) примеров понятно, что при любом четном c уравнение имеет решение (пропорциональное решению для $c = 2$), а при нечетном c – нет.

Задание 6. Докажите, что если диофантово уравнение $ax + by = c$ имеет решение, то c делится на $d = \text{НОД}(a, b)$. И обратно, если c кратно d , то решения есть.

Выражение $ax + by$ делится на $d = \text{НОД}(a, b)$. Поэтому уравнение разрешимо, только если c делится на d . А т.к. наш алгоритм всегда дает какое-нибудь решение $(x; y)$ уравнения $ax + by = d$, уравнение имеет решение $(kx; ky)$ и при любом $c = kd$. Итак, в этой задаче сформулировано необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения $ax + by = c$. Если оно выполнено, то частное решение $(x_0; y_0)$ дает наш алгоритм, а общее решение будет выглядеть так: $x = x_0 + b'k$, $y = y_0 - a'k$, где $a' = a/d$, $b' = b/d$, $d = \text{НОД}(a; b)$ (это на примерах иллюстрируется в Рабочей тетради).