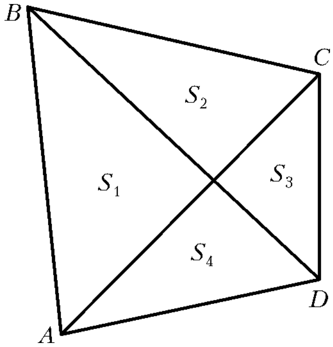

Рис. 4

жим, что это не так – скажем, диагональ AC не разрезает его на два треугольника площади 1 и отличную от 1 площадь имеет треугольник ABC. Тогда, разрезав треугольник CDA на два треугольника отличной от 1 площади, мы придем к противоречию.

Итак, пусть на рисунке 4 каждая из диагоналей AC и BD разрезает четырехугольник $ABCD$ на два треугольника площади 1. Тогда площади треугольников в обозначениях этого рисунка подчиняются системе равенств

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = S_3 + S_4, \\ S_1 + S_4 = S_2 + S_3, \end{cases}$$

откуда следует $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. В этом случае диагонали четырехугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам, значит, $ABCD$ – параллелограмм, причем площадь его равна 2.

19. Рассмотрим значения n в порядке возрастания. Если n – однозначное (от 1 до 9), то побеждает первый: он сразу записывает цифру n и тем самым выигрывает.

Если $n = 10$, то выигрывает второй игрок, приписывая ноль к начальной цифре первого.

Если $n = 11$, то и здесь выигрывает второй, приписывая к начальной цифре первого такую же самую цифру.

Докажем, что при $n \geq 12$ ни один из игроков не может гарантировать себе победу. Прежде всего оценим, сколько может быть чисел, делящихся на n, среди любых 100 последовательных целых чисел. Если первое из них делится на n, то общее количество делящихся на n чисел равно $1 + \left[\frac{99}{n}\right]$ (квадратные скобки означают целую часть), а если первое не делится на n, то их будет во всяком случае не больше этого количества. Так как $n \geq 12$, то среди любых 100 последовательных чисел количество делящихся на n не больше $1 + \left[\frac{99}{12}\right] = 1 +$ $+ [8{,}25] = 9$.

Пусть перед очередным ходом какого-либо игрока на доске уже записано некоторое число A, и этот игрок своим ходом выиграть не может. Покажем, что тогда он, тем не менее, может сделать такой ход, что его соперник ответным ходом также не сможет выиграть. Приписывая к числу A одну из цифр 0, 1, 2, …, 9, игрок может получить одно из 9 чисел $\overline{A0}$, $\overline{A1}$, $\overline{A2}$, …, $\overline{A9}$ (горизонтальная черта сверху обозначает, что числа записываются подряд – т.е. одно приписано справа к другому). Соперник приписывает справа тоже какую-то цифру, и после его хода получится целое число, заведомо заключенное между $\overline{A00}$ и $\overline{A99}$. Поэтому возможное количество получившихся чисел не превышает 100. Как отмечено выше, среди них имеется не больше 9 чисел, делящихся на $n \geq 12$. Разобьем все числа от $\overline{A00}$ до $\overline{A99}$ на 10 групп – по значению второй цифры справа (т.е. в 1-й группе все числа имеют вид $\overline{A0*}$, во 2-й – $\overline{A1*}$, …, в 10-й – $\overline{A9*}$ (звездочка означает *любую* ненулевую цифру). Так как всего имеется не более 9 чисел, делящихся на n, то в некоторой m-й группе не окажется ни одного числа, делящегося на n. Тогда игрок должен следующей цифрой записать именно цифру $(m - 1)$ – и, как бы ни ответил соперник, получившееся у него число не будет делиться на n. Правда, хотя он и не сможет победить, зато сумеет ответить так, чтобы его противник не смог победить. Игра, таким образом, будет продолжаться безрезультатно сколь угодно долго.

Итак, один из игроков может обеспечить себе победу при любой игре противника только для значений n от 1 до 11 включительно (при этом для n от 1 до 9 побеждает первый игрок, а при $n = 10$ и 11 – второй).

20. Прежде чем потопить корабль, его надо сначала ранить. Покажем, что наименьшее количество выстрелов, которое гарантирует ранение корабля, равно 16. Для этого раскрасим клетки поля в три различных цвета a, b, c, как показано на рисунке 5.

a	b	c	a	b	c	a
b	c	a	b	c	a	b
c	a	b	c	a	b	c
a	b	c	a	b	c	a
b	c	a	b	c	a	b
c	a	b	c	a	b	c
a	b	c	a	b	c	a

Рис. 5

Заметим, что при любом расположении трехпалубного корабля он содержит клетки всех трех цветов. Клеток цвета a имеется 17, цвета b или c – по 16. Поэтому, если стрелять по клеткам цвета b, то за 16 выстрелов корабль наверняка будет ранен. Покажем, что 15 выстрелов может оказаться недостаточно. Для этого изобразим на игровом поле 16 возможных стоянок трехпалубного корабля, как показано на рисунке 6. Сделав 15 выстрелов, можно ликвидировать максимум 15 возможных стоянок, а корабль вполне может оказаться на последней целой стоянке.

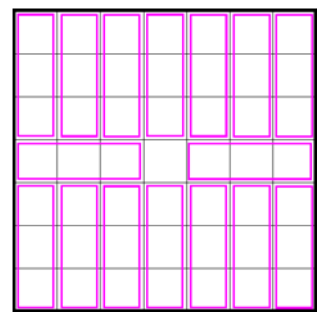
Рис. 6

Покажем, что за 19 выстрелов корабль можно наверняка потопить. Будем стрелять по клеткам цвета b, которые на рисунке 7 обозначены цифрами 3, 4 и 5. Если корабль будет ранен выстрелом в клетку с цифрой n (n = 3, 4, 5), то для его потопления останется, как легко проверить, максимум n выстрелов. Сначала стреляем по клеткам, обозначенным цифрой 5 (таких клеток 3). Если корабль будет при этом ранен, то для его потопления потребуется не более 3 + 5 = 8 выстрелов. Если после первых трех выстрелов корабль не будет ранен, то продолжаем стрелять по клеткам, помеченным цифрой 4 (таких клеток 9). Если корабль будет при этом ранен, то для его потопления потребуется не более 12 + 4 = 16 выстрелов. Если после первых 12 выстрелов корабль не ранен, то продолжаем стрелять по клеткам, помеченным цифрой 3 (таких клеток 4). Поскольку корабль будет наверняка ранен (не более 16 выстрелов), то для его потопления потребуется не более 16 + 3 = 19 выстрелов.

	3			4		
3			4			3
		5			4	
	4			5		
4			5			4
		4			4	
	3			4		

Рис. 7

Покажем, что 18 выстрелов может не хватить. Предположим, что имеется стратегия, которая позволяет наверняка потопить корабль не более чем за 18 выстрелов. Пусть стреляющий придерживается этой стратегии, а мы применим «военную хитрость»: корабль нарисуем не сразу, а заявим его в самый последний момент, насколько это будет возможно. А именно: 1) после того выстрела, который лишает нас возможности найти стоянку для целого корабля, объявим, что корабль ранен: 2) после того выстрела, который лишает нас возможности найти стоянку для корабля с одной раной и двумя целыми клетками, объявим, что корабль дважды ранен: 3) после того выстрела, который лишает нас возможности найти стоянку для корабля с двумя ранами и одной целой клеткой, объявим, что корабль потоплен. Если корабль был первый раз ранен k-м выстрелом, где $k \geq 17$, то для окончательного его потопления потребуется не менее 19 выстрелов. Меньше чем за 16 выстрелов (в силу нашей уловки) корабль ранить не удастся, поэтому, если он поражается 18 выстрелами, первый раз он будет ранен в точности 16-м выстрелом.

Дальше требуется более тонкий анализ, и мы рассмотрим возможные сценарии событий.

А) Если хотя бы один из первых 16 выстрелов был сделан в центральную, угловую или примыкающую к середине стороны клетку, то, как показано на рисунках 6 и 8, корабль не

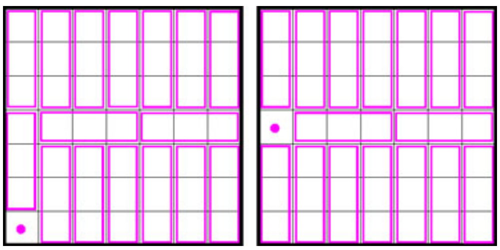

Рис. 8

мог быть ранен 16-м выстрелом (одна из возможных 16-ти стоянок осталась целой). Таким образом, до первого ранения выстрелов в указанные клетки не производилось. В дальнейшем эти клетки мы будем называть *нетронутыми.*

Б) Корабль не может быть ранен 16-м выстрелом, если какие-то два из них были сделаны в соседние по стороне клетки. Действительно, центральная клетка – *нетронутая*, поэтому всегда можно выделить 16 стоянок так, чтобы эти два выстрела пришлись в одну стоянку – тогда одна из оставшихся 15 стоянок окажется целой. Нижеследующие примеры на рисунке 9 показывают, как это можно сделать. Итак, последний, 16-й выстрел мог быть сделан либо в одну из периферийных клеток, за исключением угловых и срединных, либо в одну из внутренних клеток, кроме центральной. На рисунке 10 крестиком показаны возможные варианты для 16-го выстрела, причем кружочком на этих рисунках показаны *нетронутые* клетки. Ясно,

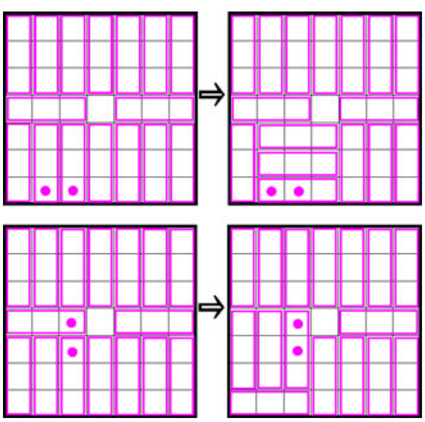

Рис. 9

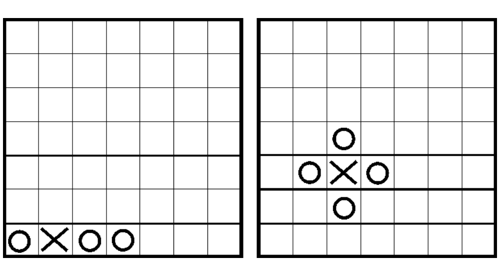

Рис. 10

что в силу нашей уловки во всех этих случаях необходимо сделать еще по крайней мере 3 выстрела, чтобы окончательно потопить корабль.

Таким образом, предположив, что корабль наверняка можно потопить не более чем за 18 выстрелов, мы пришли к выводу, что выстрелов надо больше. Противоречие.

Следовательно, корабль можно наверняка потопить минимум за 19 выстрелов.

ЛЕГЕНДА О ЗАДАЧЕ ГАУССА

1. $(1+100)\cdot 50 = 5050$.

2, 3, 4. Для трех данных сумм последовательность знаков одна и та же:

$$(+--+-++-).$$

5. $(+--+-++--++-+--+)$.

6, 7. $(+--+-++--++-+--+-++-+--++-$ $-+-++-)$.

8. $n = 64$, $n = 128$, …, $n = 64k$, где $k \in \boldsymbol{N}$. Последовательность знаков получается из последовательности, указанной в ответе к упражнениям 6, 7 и содержащей 32 знака, заменой знака *плюс* на пару знаков $+\,-$ и заменой знака *минус* на пару знаков $-\,+$. При этом получается последовательность знаков, период которой равен 64.

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. а, г, д) Да; б, в, е) нет.

2. а, в) Да; б, г) нет.

3. Да. **4.** Нет. **5.** Да. **6.** а, б) Нет; в, г, д) да.

7. Нет. **8.** Да. **9.** Нет. **10.** Да.

ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1. $W_{\text{кин}} = \dfrac{3(qBR)^2}{4m}$, где q – заряд и m – масса протона.

2. $t = \dfrac{2mv_0 \cos\alpha}{qE}$; $B_n = \dfrac{\pi E}{v_0 \cos\alpha} n$, где $n = 1, 2, 3\ldots$

3. $U = \dfrac{IB}{nea}$, где e – заряд электрона.

LXIX МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Математический праздник

6 класс

1. 503 таблетки.

Пока звери не съели лекарство, заберем одну таблетку у носорога, две у бегемота и три у слона. Теперь у всех таблеток поровну. Забрали мы 6 таблеток, т.е. осталось их 2000 – по 500 у каждого. У слона забрали 3 таблетки, т.е. Айболит прописал слону 503 таблетки.

2. Искомый разрез показан на рисунке 11.

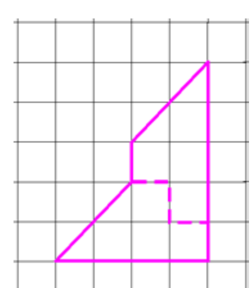

Рис. 11

3. На 3-й этаж.

Если на этаже не более трех квартир, то в десяти подъездах их не более чем $10\cdot 9\cdot 3 = 270$, т.е. в 10-м подъезде квартиры 333 не будет.

Если на этаже не менее пяти квартир, то уже в девяти подъездах будет не менее чем $9\cdot 9\cdot 5 = 405$ квартир, т.е. искомая квартира будет не в десятом подъезде. Значит, квартир на этаже 4, в первых девяти подъездах $9\cdot 9\cdot 4 = 324$ квартиры. Тогда в десятом подъезде квартиры начинаются с 325-й. На втором этаже они начнутся с 329-й, на третьем – с 333-й. Таким образом, Пете нужно подняться на третий этаж.

4. Вот один из способов решения задачи. Если бы у Тани большой кувшин вмещал 10 литров, то достаточно было бы попытаться налить в него воду из малого трижды. Если вода польется через край, то малый кувшин на 4 литра, если нет, то на 3. С пятилитровым кувшином такая проверка возможна, если Таня опорожнит пятилитровый кувшин, когда тот заполнится.

5. Возможны различные расстановки яблонь и груш, например такая, как показана на рисунке 12,*а*. Наибольшее число яблонь можно поместить, если груши растут достаточно густо. Например, если посадить груши в ряд через 5 метров, то найдется место для 12 яблонь (рис.12,*б*).

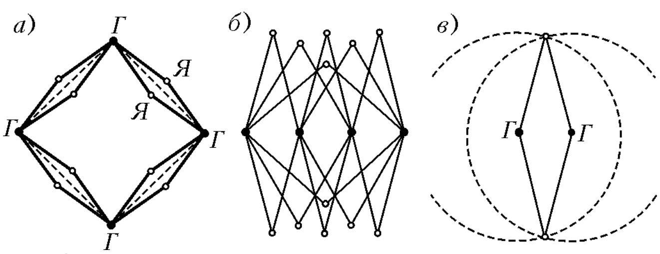

Рис. 12

Докажем, что больше двенадцати яблонь быть не может. В самом деле, рассмотрим две какие-то груши. На расстоянии 10 метров от них может быть только две яблони – одна по одну сторону от линии груш, другая – по противоположную (рис.12,*в*). Поэтому каждая пара груш «обслуживает» не более чем две яблони. Так как пар груш ровно шесть (пересчитайте!), то максимальное число яблонь равно 12.

6. Каждая команда провела 4 игры. Ясно, что первая команда один раз сыграла вничью, а остальные игры проиграла. Вторая имеет две ничьи и два поражения. Третья команда пять очков на одних ничьих набрать не могла, стало быть, она один раз выиграла, кроме того, у нее две ничьи и поражение. Четвертая команда победила два раза (если бы один, то ей пришлось бы набрать в трех играх на одних ничьих 4 очка, что невозможно). Также у этой команды есть ничья и поражение. В итоге первые четыре команды выиграли 3 раза, а проиграли 7 раз. Однако число побед должно равняться числу поражений. Значит, 4 раза они проиграли пятой команде, и у той 12 очков.

Нетрудно привести пример турнира, где такое распределение очков возможно. Пусть пятая команда выиграла у всех, четвертая – у первой и второй, третья – у первой, а все остальные игры закончились вничью. Тогда у каждой команды будет названное число очков.

7 класс

1. $\frac{6}{7}$ и $\frac{1}{7}$. Треть доли Пуха увеличила втрое порцию Пятачка, т.е. сама была вдвое больше нее. Значит, вся доля Пуха была в 6 раз больше доли Пятачка, т.е. у Пуха было вначале $\frac{6}{7}$ торта, а у Пятачка – лишь $\frac{1}{7}$.

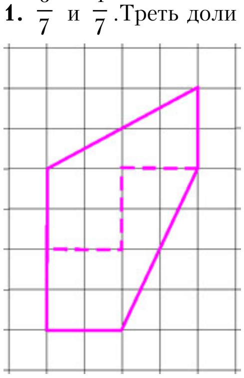
Рис. 13

2. Искомый разрез показан на рисунке 13.

3. Наташа права.

Всего существует 7 различных вариантов расположения дат в январском календаре. При этом есть всего два существенно различных варианта расположения треугольника 10-20-30 (см. рис.14 здесь и рис.3 к условию задачи), все остальные получаются из первых двух горизонтальными сдвигами треугольника. Проверим Наташино предположение для первого случая, а для второго случая рассуждения будут аналогичными. Очевидно, что у треугольника 30-9-10 угол 9 прямой (см. рис.14) и, аналогично, является прямым угол 13 у треугольника 10-13-20. Ясно, что стороны 9-30 и 10-13 равны; аналогично, равны стороны 9-10 и 13-20. Поэтому треугольники 9-30-10 и 13-10-20 равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, отрезки 10-30 и 10-20 равны. Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, получаем, что сумма острых углов в треугольнике 9-10-30 равна 180° – 90° = 90°. Осталось заметить, что сумма углов, дополняющих угол 10 до развернутого угла, равна сумме острых углов треугольника 9-10-30. Значит, угол 10 тоже равен 90°. Итак, треугольник 10-20-30 является равнобедренным и прямоугольным.

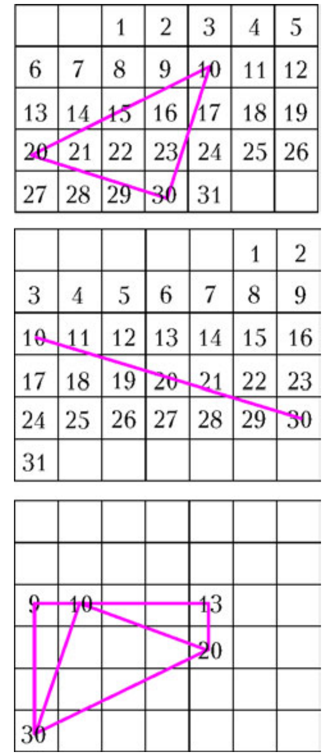

Рис. 14

4. а) 1; б) 1989.

а) Первый математический праздник был в 1990 году. Ясно, что год его проведения делится на его номер, потому что номер равен единице.

б) Пусть N – номер праздника. Тогда год его проведения равен $(2006 - 17) + N =$ $= 1989 + N$. Пусть год проведения делится на номер, т.е. 1989 + + N делится на N. Значит, 1989 делится на N. Поскольку мы ищем наибольшее N, то нужно взять $N = 1989$.

5. Например, сад может выглядеть так, как показано на рисунке 15.

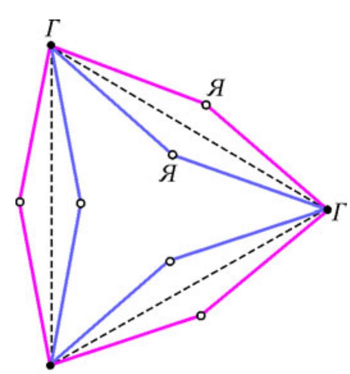

Рис. 15

Замечание. На самом деле, можно так расположить груши и яблони, что яблонь будет во много раз больше, чем груш. Расставим груши на одной прямой через равные расстояния так, чтобы расстояние между первой и последней не превосходило 20 метров. После этого берем любые две груши (назовем их A и B) и ставим яблоню в вершине равнобедренного треугольника с основанием AB и боковыми сторонами длиной 10 метров. Еще одну яблоню ставим симметрично этой яблоне относительно линии груш (рис.16). Значит, яблонь можно поставить вдвое больше числа пар груш, а оно равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Мы

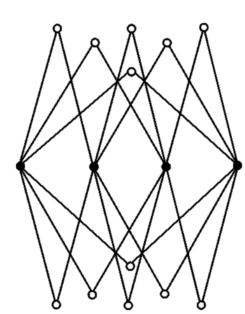
Рис. 16

сможем поставить $\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 = n(n-1)$ яблонь. Отметим, что в этом случае отношение числа яблонь и числа груш равно $\frac{n(n-1)}{n} = n-1$, значит, выбирая достаточно большие n, это отношение можно сделать сколь угодно большим.

6. а) Да; б) нет.

а) Сначала закрасим ряд длиной 9 клеток, содержащий изначально закрашенную клетку (рис.17). Далее будем красить

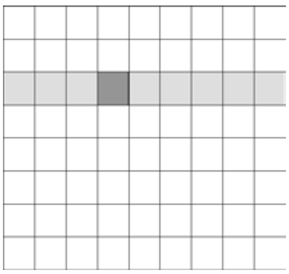

Рис. 17

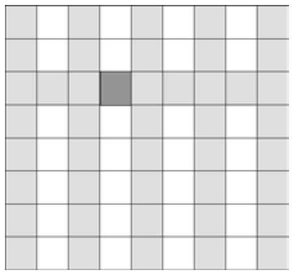

Рис. 18

столбцы через один, начиная закраску от клеток покрашенного ряда (рис.18). После этого закрасить оставшиеся клетки доски совсем просто.

Замечание. Данный способ покраски обобщается на тот случай, когда хотя бы одна из сторон прямоугольника имеет нечетную длину. Повернем прямоугольник так, чтобы его ширина была нечетной, а после этого повторим только что описанную процедуру: красим ряд нечетной длины и так далее.

б) Вот одно из возможных решений. Посмотрим на полупериметр фигуры, состоящей из закрашенных клеток. Вначале, когда закрасили одну клетку, полупериметр равен 2. На каждом шаге полупериметр или увеличивается на 1 (если у клетки была только одна соседняя закрашенная клетка) или уменьшается на 1 (если таких соседей было 3), т.е. полупериметр увеличивается или уменьшается на 1. Следовательно, когда закрашено четное число клеток, полупериметр закрашенной фигуры нечетен. Заметим, что полупериметр всего прямоугольника 8×10 равен 18, т.е. четный, поэтому весь прямоугольник закрасить нельзя.

Задачи старших классов

8 класс

1. 982 школьника.

Пусть все задачи решили n школьников. Тогда хотя бы 5 задач решили $4n$ человек, хотя бы 4 задачи – $16n$ человек,… …, хотя бы одну задачу решили $1024n$ человек. Следовательно, $1024n \le 2006$, откуда получаем $n \le 2006:1024 < 2$. Поскольку Вася решил ровно одну задачу, то $1024n > 0$, откуда $n > 0$. Поэтому $n = 1$; хотя бы одну задачу решили 1024 школьника, а значит, ни одной задачи не решили 2006 – – 1024 = 982 школьника.

2. 7 чисел.

Приведем сначала пример таблицы, в которой ровно семь ненулевых чисел:

0	1	−1
−1	2	1
1	−1	0

Докажем, что меньшим количеством ненулевых чисел обойтись нельзя.

Если в таблице ровно одно ненулевое число, то сумма чисел в строке, содержащей это число, отлична от нуля.

Допустим, в таблице ровно три ненулевых числа. Если все они стоят в одной строке, то сумма чисел в любом столбце отлична от нуля. Если не все они стоят в одной строке, то в какой-нибудь строке стоит ровно одно ненулевое число и сумма чисел в этой строке не равна нулю.

Допустим, в таблице ровно пять ненулевых чисел. Тогда в таблице 4 нуля, значит, какие-то два нуля стоят в одной строке. Поскольку сумма чисел в этой строке равна нулю, все числа в этой строке – нули. Осталось заметить, что в столбце, в котором стоит оставшийся ноль, ровно два нуля, что невозможно.

3. Пусть D – середина стороны A_1B_1 (рис.19). Тогда $\angle C_1DA_1 = 90^\circ$. Следовательно, четырехугольник CC_1DA_1 – вписанный, откуда $\angle DA_1C_1 = \angle DCC_1 = 45^\circ$ и $\angle DC_1C = \angle DA_1A$. Таким образом, треугольники DC_1C и B_1A_1A подобны по двум углам. Коэффициент подобия равен $\frac{B_1A_1}{DC_1} = 2$, поэтому $AA_1 = 2\,CC_1$.

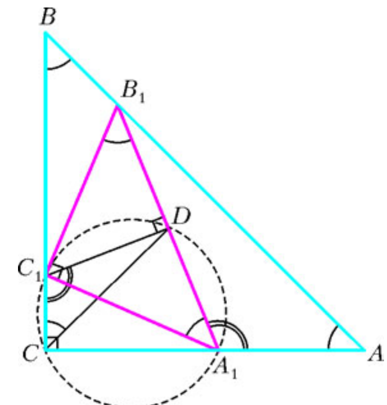

Рис. 19

4. Так как монет 9 и никакие две фальшивые не лежат рядом, то какие-то две настоящие монеты лежат рядом, а остальные монеты чередуются (рис.20). Заметим, что достаточно найти две настоящие монеты, лежащие рядом (этим расположение остальных монет определяется однозначно). Начав с произвольной монеты, пронумеруем монеты подряд числами от 1 до 9 (рис. 21). Взвешивать можно разными способами. Вот один из них.

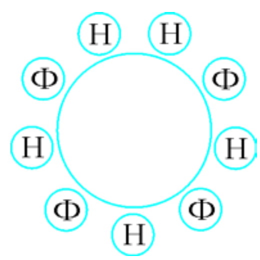

Рис. 20

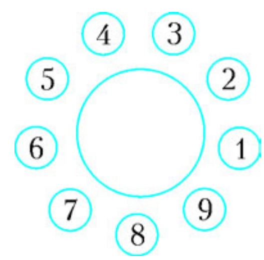

Рис. 21

Взвесим монеты 1 и 4. Возможны два случая.

- Монеты 1 и 4 весят одинаково. Взвесим монеты 2 и 3. Если 2 и 3 весят одинаково, то они настоящие, поскольку лежат рядом. Пусть одна монета тяжелее (фальшивая), будем считать, что это монета 2, тогда монеты 3, 1 и 4 настоящие. Монеты 3 и 4 – две настоящие рядом.
- Монеты 1 и 4 весят по-разному. Пусть монета 4 тяжелее (фальшивая). Тогда монеты 5, 3 и 1 – настоящие, а монета 2 – фальшивая. Взвесим монеты 9 и 6. Если они одинаково весят, то 7 и 8 – настоящие. Если же какая-то из них настоящая, то мы находим две настоящие рядом.

5. Пример изображен на рисунке 22 (важно, что режем не по клеточкам).

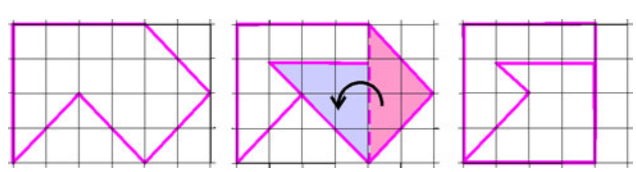

Рис. 22

6. n может быть любым натуральным числом, кроме 1, 2, 4, 5, 8 и 11.

Вычислим для каждой недели сумму Ваниных оценок за эту неделю. Посмотрим, как могла измениться сумма оценок на удачной неделе. Пусть оценки Вани ухудшились по x предметам. Тогда они улучшились хотя бы по $x + 2$ предметам. Следовательно, $x(x+2) \le 7$, т.е. $x \le 2$. Сумма оценок за те предметы, за которые оценки улучшились, возросла хотя бы на $x + 2$, а сумма оценок за те предметы, за которые оценки ухудшились, уменьшилась не более чем на $2x$. Поскольку $x \le 2$, то $2x \le x+2$, т.е. уменьшилась сумма не больше, чем увеличилась. Таким образом, сумма Ваниных оценок не уменьшается, причем сохраниться она может только если по двум предметам оценки ухудшились на 2, а по четырем улучшились на 1.

Так как в итоге сумма оценок не увеличилась, а каждую неделю не уменьшалась, то она не изменялась все время наблюдения за успеваемостью. Следовательно, понижение оценки происходит всякий раз на 2 балла, а повышение – на 1 балл, т.е. для каждого предмета повышений оценки произошло в два раза больше, чем понижений. Таким образом, количество изменений каждой оценки кратно трем.

Пусть Ваня наблюдал за своей успеваемостью n недель, не считая первой. Посмотрим, чему может быть равно n. Рассмотрим следующие случаи.

- Пусть n кратно трем. Ниже представлен пример изменений оценок Вани при $n = 3$:

Первая неделя	5	5	3	3	4	4	5
1-я неделя наблюдений	3	3	4	4	5	5	5
2-я неделя наблюдений	4	4	5	5	3	3	5
3-я неделя наблюдений	5	5	3	3	4	4	5

Повторяя последние три недели k раз, получим пример для $n = 3k$.

- Пусть $n = 3k + 1$. Посмотрим на предмет, про который мы знаем, что оценка по нему менялась. Так как количество изменений оценки по этому предмету кратно трем, а $n = 3k + 1$, то была хотя бы одна неделя, на которой эта оценка не изменилась. В эту неделю все остальные оценки изменялись. Поэтому по всем предметам оценки когда-либо менялись, и значит, есть неделя (для каждого предмета – своя), когда оценка по этому предмету осталась без изменений. Поскольку предметов 7, число недель не может быть меньше семи. Ниже представлен пример изменений оценок Вани при $n = 7$:

Первая неделя	5	5	3	3	4	4	5
1-я неделя наблюдений	3	3	4	4	5	5	5
2-я неделя наблюдений	4	4	5	5	5	3	3
3-я неделя наблюдений	5	5	5	3	3	4	4
4-я неделя наблюдений	5	3	3	4	4	5	5
5-я неделя наблюдений	3	4	4	5	5	5	3
6-я неделя наблюдений	4	5	5	5	3	3	4
7-я неделя наблюдений	5	5	3	3	4	4	5

Добавляя по три недели из предыдущего случая, получим любое n вида $3k + 1$, большее семи.

- Пусть $n = 3k + 2$. Посмотрим на предмет, про который мы знаем, что оценка по нему менялась. Так как количество изменений оценки по этому предмету кратно трем, а $n = 3k + 2$, то были хотя бы две недели, на которых оценка по этому предмету не изменилась, а по остальным предметам оценка менялась. Аналогично предыдущему случаю, для каждого предмета есть хотя бы две недели, на которых оценка по этим предметам не менялась, а по всем остальным менялась, поэтому число недель не может быть меньше чем 14.

Пример для $n = 14$ строится двукратным повторением примера для $n = 7$. Далее, очевидно, можно добавлять по три недели из примера первого случая.

9 класс

1. $n = 37$.

Если в первый день Вася съест a конфет, то за n дней он съест

$$a + (a+1) + \ldots + (a+n-1) = \frac{n(2a-1+n)}{2}$$

конфет. Значит, $\frac{n(2a-1+n)}{2} = 777$. Следовательно, n делит $2 \cdot 777 = 1554$. Так как $1554 = n(2a-1+n) > n^2$, то $n < 40$. Но максимальное число n, меньше 40 и делящее $1554 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$, равняется 37. Случай $n = 37$ действительно возможен при $a = 3$.

2. Если нашелся школьник, не решивший ни одной задачи, то не будем его рассматривать. Аналогично, если есть задача, не решенная ни одним из школьников, то не будем ее рассматривать. По-прежнему все школьники решили разное количество задач, все задачи решены разным количеством школьников. Пусть осталось m' школьников и n' задач. Тогда $m' \ge 1$, $n' \ge 1$. Если каждый из m' школьников решил от 2 до n' задач и все решили разное количество задач, то $m' \le n' - 1$. Так как каждая из n' задач решена от 1 до m' школьниками и все задачи решены разным количеством школьников, то $n' \le m'$. Противоречие. Значит, требуемый школьник найдется.

3. Рассмотрим окружности, описанные около данных прямоугольников (рис.23). Обозначим вторую точку их пересечения через X. Тогда $\angle BXN = \angle BXK = 90°$. Значит, точки N, X, K лежат на одной прямой, перпендикулярной BX. Кроме

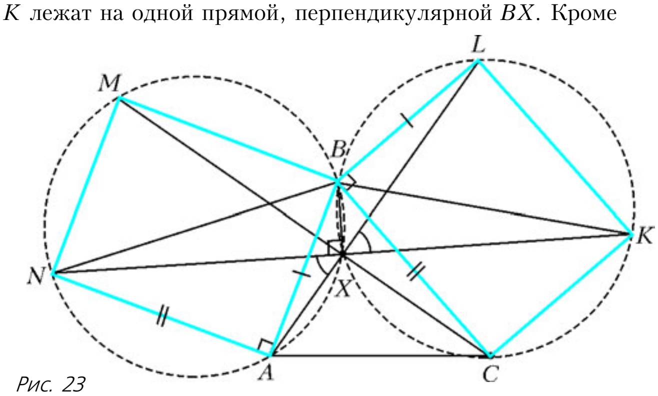

Рис. 23

того, треугольники NAB и KLB равны. Тогда $\angle NXA = \angle NBA = \angle LBK = \angle LXK$, значит, точки A, X, L также лежат на одной прямой. Аналогично, точки M, C, X лежат на одной прямой. Поэтому X – точка пересечения этих трех прямых.

4. Коэффициент при $x^{4 \cdot 2006}$ в полученном выражении равен 1. Коэффициент при нулевой степени равен значению выражения при $x = 0$, т.е. 2^{2006}. Сумма всех коэффициентов равна значению нашего выражения при $x = 1$, т.е. 2^{2006}. Значит, сумма первого и последнего коэффициентов больше суммы всех коэффициентов. Поэтому обязательно найдется отрицательный коэффициент.

5. На горизонтальном отрезке вниз построим полуокружность радиуса R, а вверх – две полуокружности радиуса $R/2$ до середины отрезка (рис.24,*а*). Точка касания двух маленьких окружностей есть точка M. Проведем через точку M прямые

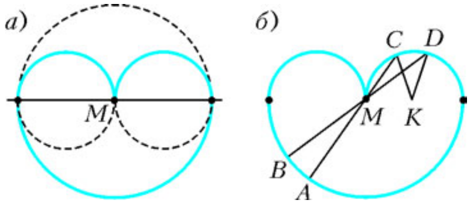

Рис. 24

AC и BD (рис.24,*б*). Пусть K – центр окружности, на которой лежат точки C и D. Тогда длина дуги CD равна $R/2 \cdot \angle CKD = R/2 \cdot 2\angle CMD = R \cdot \angle AMB$ и равна длине дуги AB.

6. Обозначим выбранные Борей числа по порядку a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, а выбранные Мишей – b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Достаточно доказать, что $a_k \ge b_{6-k}$ для любого k. Рассмотрим ситуацию, когда Боря выбрал $k-1$ число, а Миша выбрал $5-k$ чисел. В Бориной копии таблицы еще не вычеркнуты числа на пересечении $6-k$ столбцов. В Мишиной копии таблицы еще не вычеркнуты числа на пересечении k строк и k столбцов. Значит, найдутся строка и столбец, которые не вычеркнуты ни у Бори, ни у Миши, и пусть x – число на их пересечении. Тогда $a_k \ge x \ge b_{6-k}$.

10 класс

1. Нет.

Схематически изобразим графики двух данных трехчленов (рис.25). Из условия следует, что каждый из этих трехчленов при $x = 1000$ принимает положительное значение. Следовательно, и их сумма в этой точке должна быть положительна.

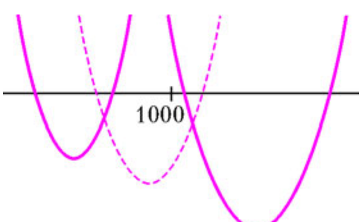

Рис. 25

График трехчлена, являющегося суммой данных, также располагается ветвями вверх. Пусть один из его корней больше тысячи, а другой – меньше тысячи. Тогда число 1000 располагается между корнями, т.е. значение трехчлена при $x = 1000$ отрицательно (его график схематически изображен на рисунке 25 штриховой линией). Противоречие.

2. Нет, не может.

Пусть α, β и γ – углы одного из данных треугольников. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}(\pi - (\alpha+\beta)) =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) =$$

$$= -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma .$$

Таким образом, доказано, что равенство $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma$ верно для углов любого треугольника. Но в остроугольном треугольнике тангенс каждого угла положителен, поэтому их произведение положительно. В тупоугольном же треугольнике тангенс тупого угла отрицателен, а два других тангенса положительны, поэтому произведение трех тангенсов отрицательно.

3. Да.

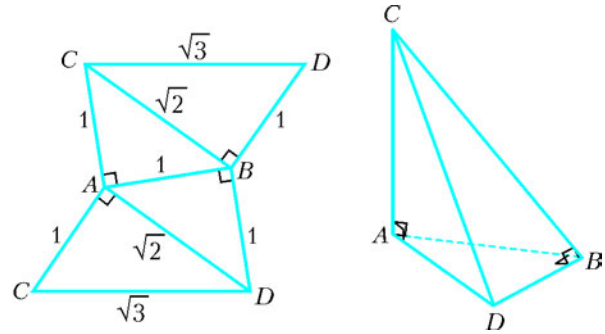

Рис. 26

Для этого надо взять тетраэдр $ABCD$, который вместе со своей разверткой показан на рисунке 26. Здесь $CA = AB = BD$ и $\angle CAB = \angle CAD = \angle ABD = \angle CBD = 90°$. Возможны несколько способов замощения пространства такими тетраэдрами.

Первый способ. Тетраэдр $ABCD$ и симметричный ему относительно плоскости ADC образуют четырехугольную пирамиду с квадратным основанием, одно из боковых ребер которой перпендикулярно основанию и равно его стороне (рис.27). Из

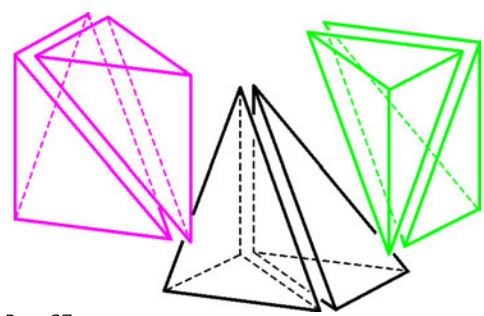
Рис. 27

трех таких пирамид можно составить куб, как показано на рисунке 28. Очевидно, что кубами пространство замостить можно.

Второй способ. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду, образованную центром куба и его гранью. У нее есть четыре плоскости симметрии, разрезающие ее на 8 тетраэдров, подобных $ABCD$. Следовательно, куб можно разрезать на 48 таких тетраэдров.

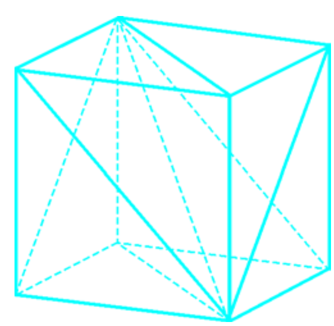
Рис. 28

Третий способ. Объединив тетраэдр $ABCD$ и симметричный ему относительно плоскости ABC, получим тетраэдр, основанием которого является равнобедренный прямоугольный треугольник, а высотой – боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла. Из двух таких тетраэдров, симметричных относительно общей боковой грани, составим тетраэдр с равнобедренным прямоугольным треугольником в основании и высотой, падающей в середину гипотенузы. Наконец, из двух таких тетраэдров можно составить тетраэдр, подобный $ABCD$. (Чтобы убедиться в этом, достаточно разрезать $ABCD$ по плоскости, проходящей через A, B и середину CD.) Таким образом, из 8 тетраэдров, равных $ABCD$, можно составить подобный им тетраэдр вдвое большего размера. Повторяя этот процесс, получим искомое замощение пространства.

4. 11 коробок.

Ответ следует из общего факта: пусть количество карточек равно n, где $2^{k-1} \le n < 2^k$ (n, k – натуральные числа); тогда требуется k пустых коробок. Сначала покажем следующее: k коробок достаточно, причем если $n = 2^{k-1}$, то не требуется использовать исходную коробку после того, как она освободится. При $k = 1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для некоторого натурального k.

Вначале пусть $n = 2^k$. Возьмем пустые коробки с номерами от 1 до $k + 1$. По предположению индукции можно перенести верхние 2^{k-1} карточек в коробку номер k, используя коробки $1, \ldots, k$ и не используя исходную коробку, которая еще не пуста. Аналогично переносим нижние 2^{k-1} карточек в коробку номер $k + 1$, используя коробки $1, \ldots, k - 1, k + 1$. После этого подвергаем верхние карточки обратному перекладыванию, заменив исходную коробку на $(k+1)$-ю. В итоге все карточки будут переложены в коробку $k + 1$, причем мы не использовали исходную коробку после того, как она освободилась.

Пусть теперь $2^k < n < 2^{k+1}$. Вначале переложим, как описано выше, 2^k карточек в коробку $k + 1$, использовав коробки $1, \ldots, k + 1$. Оставшиеся $n - 2^k < 2^k$ карточек по предположению индукции можно переложить в коробку k, использовав коробки $1, \ldots, k$. Теперь подвергнем «верхние» карточки обратному перекладыванию, заменив исходную коробку на k-ю. Для дальнейшего заметим, что если используется минимально возможное количество коробок, то все они окажутся одновременно занятыми не позже, чем мы освободим исходную коробку. Действительно, пусть это неверно. Отметим в начальный момент какую-то пустую коробку i. Пусть на некотором шаге мы кладем в нее карточку. Так как по предположению какая-то коробка будет после этого пуста, то можно заменить i-ю на эту коробку начиная с данного шага. Будем поступать так каждый раз, когда нужно класть карточку в коробку i. В итоге мы переложим нижнюю карточку в некоторую коробку j. После этого повторим все действия в обратном порядке, заменив исходную коробку на j-ю. Карточки будут переложены в коробку j, а коробка i использована не будет, т.е. количество коробок можно уменьшить.

Теперь покажем, что при $2^{k-1} \le n < 2^k$ потребуется не менее k коробок. При $k = 1$, 2 это тривиально. Пусть это верно для некоторого $k \ge 2$ и пусть $2^k \le n < 2^{k+1}$. Предположим, что можно обойтись k коробками. Разобьем исходную стопку карточек на верхнюю и нижнюю части, содержащие не менее чем по 2^{k-1} карточек. В силу доказанного выше, в некоторый момент потребуется занять «нижними» карточками k коробок уже для того, чтобы освободить исходную. «Верхние» карточки не могут при этом находиться в исходной коробке (до этого шага она еще не пуста, а верхняя из «нижних» карточек уже снята). Значит, они находятся в некоторой другой коробке i на самой верхней из «нижних» карточек (обозначим ее a). Так как «нижние» карточки занимают $k > 1$ коробок, то карточка a еще должна быть переложена, чтобы все они оказались в одной коробке. Для этого потребуется в некоторый момент занять «верхними» карточками k других коробок. В них не могут находиться «нижние» карточки (так как непосредственно под «верхней» карточкой может находиться лишь карточка a, а она еще находится в коробке i). Значит, все «нижние» карточки уже находятся в одной коробке – противоречие.

Таким образом, потребуется не менее $k + 1$ коробок.

5. Пусть $3n + 1 = a^2$, $10n + 1 = b^2$, где $a, b \in \mathbf{N}$, и пусть $29n + 11$ равно простому числу p. Далее можно рассуждать разными способами. Вот один из них.

Перемножим указанные равенства, в результате получим $30n^2 + 13n + 1 = (ab)^2$. Вычитая из этого равенства верное равенство $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, получим $29n^2 + 11n = (ab)^2 - (n+1)^2$. Отсюда $np = (ab - n - 1)(ab + n + 1)$. Хотя бы один из множителей в правой части делится на p и потому не меньше p. Во всяком случае, $ab + n + 1 \ge p$, откуда $ab \ge 28n + 10$. Возведем это неравенство в квадрат: $(ab)^2 \ge 784n^2 + 560n + 100$. С другой стороны, $(ab)^2 = 30n^2 + 13n + 1$, что противоречит предыдущему. Утверждение доказано.

Замечание. Условие задачи выполнено, например, при $n = 8$, $n = 96$.

6. Пусть P'_a, P'_b и P'_c – проекции точки P на прямые, содержащие стороны треугольника (рис. 29; другие случаи расположения указанных точек рассматриваются аналогично). Докажем, что эти точки лежат на одной прямой. Действительно, $\angle PP'_cP'_a = \angle PBP'_a = 180° - \angle PBC = \angle PAC = 180° - \angle PP'_cP'_b$.

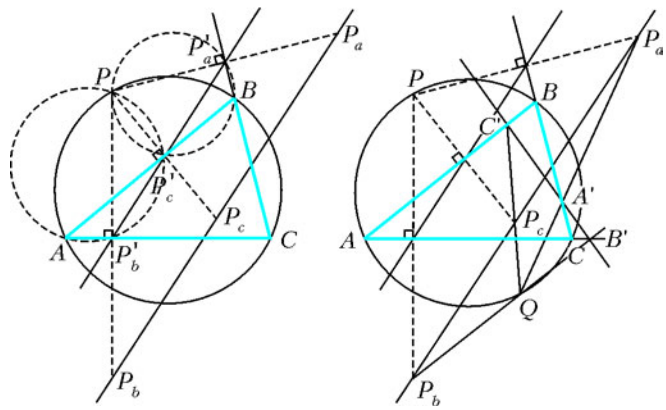

Рис. 29

Первое и последнее равенства верны в силу того, что четырехугольники $PP'_aBP'_c$ и $PP'_cP'_bA$ вписанные. Полученная прямая называется *прямой Симсона* точки P относительно треугольника ABC. Следовательно, точки P_a, P_b и P_c также лежат на одной прямой, проходящей в два раза дальше от точки P, чем прямая Симсона. Аналогичное утверждение верно и для Q_a, Q_b и Q_c – точек, симметричных точке Q относительно сторон треугольника. Обозначим прямую, содержащую точки P_a, P_b и P_c, через l_p, а прямую, содержащую точки Q_a, Q_b и Q_c, – через l_q. Рассматриваемые в задаче точки A', B' и C' можно определить как точки пересечения пар прямых PQ_a и QP_a, PQ_b и QP_b, PQ_c и QP_c.

Пусть прямая, параллельная l_q и проходящая через P, пересекает l_p в точке X (рис.30). Пересечение прямой, параллельной l_p и проходящей через Q, с прямой l_q обозначим через Y. Стороны треугольника PXP_a соответственно параллельны сторонам треугольника Q_aYQ, а значит, эти треугольники гомотетичны. Прямые PQ_a, P_aQ и XY должны проходить через центр этой гомотетии, т.е. точку A'. Таким образом, точка A' лежит на прямой XY. Аналогично можно показать, что на этой прямой лежат точки B' и C'.

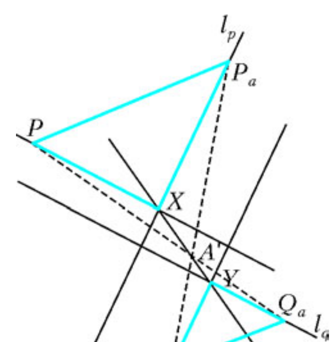

Рис. 30

11 класс

1. $\pi/4$.

Для искомой разности δ возрастающей прогрессии

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in [0; 3\pi/2]$$

получаем $\delta \in (0; \pi/2)$ и $\cos\delta \ne 1$. Рассмотрим следующие два случая, один из которых непременно имеет место:

• $\alpha_3 \le \pi$, тогда $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \le \pi$ и $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > > \cos\alpha_3$, откуда

$$2\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_3 = 2\cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} = 2\cos\alpha_2\cos\delta,$$

поэтому $\cos\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = \pi/2$ (а значит, $\alpha_3 \ge \pi/2$);

• $\alpha_3 \ge \pi/2$, тогда $\pi/2 \le \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 \le 3\pi/2$ и $\sin\alpha_3 > \sin\alpha_4 > > \sin\alpha_5$, откуда

$$2\sin\alpha_4 = \sin\alpha_3 + \sin\alpha_5 = 2\sin\frac{\alpha_3+\alpha_5}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_5}{2} = 2\sin\alpha_4\cos\delta,$$

поэтому $\sin\alpha_4 = 0$ и $\alpha_4 = \pi$ (а значит, $\alpha_3 \le \pi$).

Таким образом, оба случая имеют место, поэтому $\alpha_2 = \pi/2$ и $\alpha_4 = \pi$, откуда $\delta = \pi/4$.

2. $a = 5$, $b = 2$.

Пусть натуральные числа a и b взаимно просты, а десятичная запись числа a имеет n знаков. Тогда условие задачи для них записывается в виде уравнения

$$a : b = \overline{b,a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = b + a\cdot 10^{-n} \Leftrightarrow 10^n\left(a-b^2\right) = a\cdot b,$$

из которого следует, в частности, что $a > b$. В силу взаимной простоты чисел a и b, числа $a-b^2$ не имеет общих делителей ни с a, ни с b, следовательно, уравнение превращается в систему из двух уравнений

$$a - b^2 = 1,\ 10^n = a\cdot b.$$

В силу все той же взаимной простоты чисел a и b (с учетом неравенства $a > b$), последнему уравнению удовлетворяют только пары чисел $a = 10^n$ и $b = 1$, а также $a = 5^n$ и $b = 2^n$. Первая пара при подстановке в первое уравнение дает для числа n уравнение $10^n = 2$, которое, очевидно, не имеет решений. Вторая пара чисел a и b при подстановке в первое уравнение дает для числа n уравнение

$$5^n - 4^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Так как его левая часть представляет собой возрастающую функцию от n, а правая – убывающую, то оно имеет не более одного корня, который угадывается: $n = 1$, откуда и находим единственную пару $a = 5$ и $b = 2$.

3. Нет.

Разрежем конус по какой-либо образующей и изобразим на плоскости его развертку, представляющую собой плоский угол A_0OA_1 величины α (рис.31). След ленты на ней, изображающий первый виток, будет выглядеть как полоса с параллельными краями, проходящая от стороны OA_0 к стороне OA_1. Приложим к этому углу еще одну развертку конуса – угол A_1OA_2 той же величины α. Перейдя через сторону OA_1 нового угла, след ленты продолжит ту же полосу на второй развертке, пока не дойдет до стороны OA_2, изобразив второй виток, и т.д.

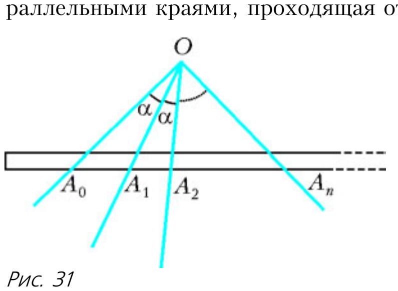

Рис. 31

Если лента делает n витков, причем $n > \pi/\alpha$, то полоса (по условию, не проходящая через точку O) пересекает лучи OA_0, OA_1, …, OA_n, что невозможно, так как тогда $\pi > \angle A_0OA_n = n\alpha > \pi$. Поэтому число n витков ленты не превышает π/α, а значит, заведомо конечно.

4. Алиса.

Пусть Алиса независимо от действий Базилио берет первым ходом 1 монету, вторым – 2, третьим – 3 и т.д., увеличивая каждый раз количество взятых монет на 1. Это не противоречит правилам, так как при такой игре Алисы Базилио сможет первым ходом взять 1 или 2 монеты, вторым – 2 или 3 и т.д. Тогда после k-го хода Алисы игроки возьмут монет не менее

$$(1+2+\ldots+k)+\left(1+2+\ldots+(k-1)\right) = k^2$$

и не более

$$(1+2+\ldots+k)+(2+3+\ldots+k) = k(k+1)-1.$$

Так как $1331 = 36\cdot 37 - 1$, то монет в любом случае хватит на 36-й ход Алисы. А так как $36^2 = 1296$ и $1331 - 1296 = 35$, то монет в любом случае не хватит на 36-й ход Базилио. Таким образом, Алиса выиграет.

5. Искомое ГМТ – биссектриса угла без его вершины и фиксированной точки, а также отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из фиксированной точки на стороны угла (без концов). На рисунке 32 это луч AO без точек A и O и отрезок KL без точек K и L.

Пусть A – вершина данного угла, O – фиксированная точка на биссектрисе, OBC – рассматриваемый равнобедренный треугольник ($OB = OC$) и M – середина стороны BC. Треугольник OBC может располагаться так, что $AB = AC$. При этом точка M лежит на биссектрисе AO, причем для любой точки M на биссектрисе AO, кроме точек A и O, можно построить равнобедренный треугольник OBC так, что M будет серединой отрезка BC. Таким образом, весь луч AO, кроме точек A и O, входит в искомое ГМТ.

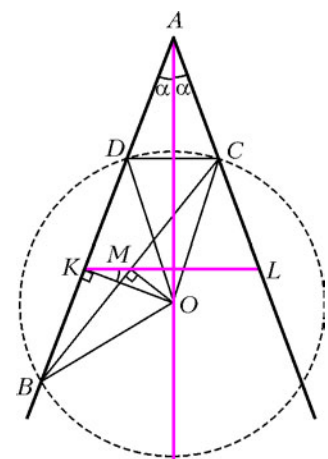

Рис. 32

Пусть теперь $AB \ne AC$ (см. рис.32) и пусть D – точка, симметричная точке C относительно биссектрисы AO. Тогда D лежит на луче AB и $OD = OC = OB$. Опустим перпендикуляр OK на BD. Так как $OB = OD$, то $BK = KD$ и, следовательно, KM – средняя линия в треугольнике BDC. Поэтому $KM \parallel DC$ и $KM \perp AO$. Таким образом, в этом случае точка M обязана лежать на отрезке KL таком, что L и C принадлежат одной стороне угла, $OK \perp AB$ и $KL \perp AO$.

Обратно, пусть M – любая точка указанного отрезка KL, не лежащая на биссектрисе и отличная от точек K и L. Проведем через M прямую, перпендикулярную OM. Пусть она пересекает стороны угла в точках B и C и пусть $\angle BAO = \angle OAC = \alpha$. Так как $OK \perp AB$ и $KM \perp AO$, то $\angle OKM = \angle BAO = \alpha$. Поскольку $\angle BKO = \angle BMO = 90°$, то точки B, K, M, O лежат на одной окружности. Отсюда $\angle OBM = \angle OKM = \alpha$ (как вписанные). Тогда $\angle OBC = \alpha = \angle OAC$ и, следовательно, точки A, C, O, B лежат на одной окружности. Так как $\angle BAO = \angle OAC = \alpha$, то равны хорды BO и OC. Таким образом, треугольник OBC равнобедренный и $BM = MC$, т.е. M входит в искомое ГМТ.

6. а) За 4, 7 и 10 у.е.;

б) за $\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil, \left\lceil\frac{2n}{k}\right\rceil, \ldots, \left\lceil\frac{(k-1)n}{k}\right\rceil$ и $\left\lceil\frac{kn}{k}\right\rceil = n$ у.е., где через $\lceil x\rceil$ обозначено наименьшее целое число, не меньше x.

Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ – массы конфет в коробках стоимостью в 1, 2, …, n у.е. соответственно, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ – номера тех коробок, которые нужно купить.

1°. Докажем, что для искомого набора номеров должны быть выполнены неравенства

$$n_j \ge \frac{jn}{k} \equiv m_j \,,\; j = 1,\, \ldots,\, k, \qquad (*)$$

которые при $n = 10$ и $k = 3$ превращаются в оценки

$$n_1 \ge \frac{10}{3} = 3{,}3\ldots,\; n_2 \ge \frac{20}{3} = 6{,}6\ldots,\; n_3 \ge \frac{30}{3} = 10 .$$

Действительно, предположим, что для некоторого j выполнено противоположное неравенство $n_j < m_j$. Тогда, например, в случае

$$a_1 = \ldots = a_{n_j} = \frac{n_j}{n} < a_{n_{j+1}} = \ldots = a_n = 1 + \frac{n_j}{n}$$

получаем

$$a_1 + \ldots + a_n = n_j \frac{n_j}{n} + \left(n - n_j\right)\left(1 + \frac{n_j}{n}\right) = n\,,$$

$$a_{n_1} + \ldots + a_{n_k} = (k - j)\left(1 + \frac{n_j}{n}\right) + j\frac{n_j}{n} =$$

$$= k - j + \frac{k}{n} n_j < k - j + \frac{k}{n}\frac{jn}{k} = k\,,$$

т.е. нарушено требование задачи, а именно:

$$a_{n_1} + \ldots + a_{n_k} < \frac{k}{n}\left(a_1 + \ldots + a_n\right).$$

2°. Пусть теперь все неравенства $(*)$ верны. Докажем, что тогда требование задачи выполнено. Действительно, при $n = 10$ и $k = 3$ имеем

$$a_4 + a_7 + a_{10} \ge \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} + \frac{a_5 + a_6 + a_7}{3} + \frac{a_8 + a_9 + a_{10}}{3} =$$

$$= \frac{(9+1)a_2 + \ldots + (9+1)a_{10}}{30} \ge \frac{9a_1 + 9a_2 + \ldots 9a_{10}}{30} =$$

$$= \frac{3}{10}\left(a_1 + \ldots + a_{10}\right),$$

а в общем случае, обозначив $n_j - m_j = \varepsilon_j \in [0;1)$ и $n_0 = m_0 = a_0 = 0$, получаем

$$a_{n_1} + \ldots + a_{n_k} \ge$$

$$\ge \frac{a_1 + \ldots + a_{n_1}}{n_1 - n_0} + \frac{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}{n_2 - n_1} + \ldots + \frac{a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}}{n_k - n_{k-1}} \ge$$

$$\ge \frac{\varepsilon_0 a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + \left(1 - \varepsilon_1\right)a_{n_1}}{m_1 - m_0} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_1 a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + \left(1 - \varepsilon_2\right)a_{n_2}}{m_2 - m_1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varepsilon_{k-1}a_{n_{k-1}} + a_{n_{k-1}+1} + \ldots + \left(1 - \varepsilon_k\right)a_{n_k}}{m_k - m_{k-1}} = \frac{k}{n}\left(a_1 + \ldots + a_n\right),$$

так как при каждом j справедливо равенство $m_j - m_{j-1} = \dfrac{n}{k}$ и неравенство

$$\frac{a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j}}{n_j - n_{j-1}} \ge \frac{\varepsilon_{j-1}a_{n_{j-1}} + a_{n_{j-1}+1} + \ldots + \left(1 - \varepsilon_j\right)a_{n_j}}{m_j - m_{j-1}}\,,$$

означающее, что *среднее значение функции* на промежутке уменьшается, когда этот промежуток меняют так, что к функции добавляются значения, меньшие ее среднего, и убавляются – бóльшие: речь идет о ступенчатой функции f, задаваемой равенствами $f(x) = a_j$ при $j - 1 < x \le j$, а под средним значением понимается ее интеграл по заданному промежутку, деленный на его длину, причем промежуток усреднения $\left(n_{j-1}; n_j\right]$ заменяется промежутком $\left(m_{j-1}; m_j\right]$. Формально же последнее неравенство выводится, например, из цепочки

$$\left(n_{j-1} - m_{j-1}\right)\left(a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j}\right) - \varepsilon_{j-1}\left(n_j - n_{j-1}\right)a_{n_{j-1}} =$$

$$= \varepsilon_{j-1}\left(\left(a_{n_{j-1}+1} - a_{n_{j-1}}\right) + \ldots + \left(a_{n_j} - a_{n_{j-1}}\right)\right) \ge 0 \ge$$

$$\ge \varepsilon_j\left(\left(a_{n_{j-1}+1} - a_{n_j}\right) + \ldots + \left(a_{n_j} - a_{n_j}\right)\right) =$$

$$= \left(n_j - m_j\right)\left(a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j}\right) - \varepsilon_j\left(n_j - n_{j-1}\right)a_{n_j}\,.$$

Итак, стоимость набора из k коробок, удовлетворяющего требованию задачи, будет наименьшей для наименьших целых чисел n_j, удовлетворяющих неравенствам $(*)$.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. $p = \dfrac{\rho g R_З}{2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{11}$ Па $= 1{,}6$ млн атм .

2. $v_{ср} = v_1 = 70$ км/ч ; $t = \dfrac{s\left(v_3 - v_1\right)}{v_3\left(v_1 - v_2\right)} = 16$ мин.

3. $x = \dfrac{m + \rho_л h S}{\left(\rho_в - \rho_л\right)S} = 1$ м .

4. $h = \dfrac{T}{8\rho_с g a^2} \approx 0{,}32$ м .

8 класс

1. На чашку с бутылью нужно положить груз массой 2,6 г.

2. $m_1 = \dfrac{cm\left(t_{пл} - t\right)}{\lambda} \approx 5{,}1$ г ; $t_{уст} = t_{пл} = 29{,}8$ °C .

9 класс

1. $m = \dfrac{M\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$.

2. $\tau = \dfrac{\lambda\rho_л\pi^2 d^2\left(D^2 - d^2\right)}{16\rho I^2} \approx 19$ мин .

3. $R_3 = \dfrac{R_1R_4}{R_2} = 40$ Ом ; $R_{AB} = \dfrac{\left(R_1 + R_2\right)R_4}{R_2 + R_4} \approx 33$ Ом .

4. $\alpha = \dfrac{\pi - \varphi}{2}$, этот угол не зависит от угла падения солнечного света на зеркала.

10 класс

1. $v(t) = v_0\dfrac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi} + gt\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $0 < t < \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

2. При $\omega^2 R > \mu g$ шайба начнет скользить по доске при $\alpha = 0$; при $\omega^2 R \le \mu g < g$ шайба начнет скользить при

$$\alpha > \mathrm{arctg}\,\mu + \arcsin\frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2 + 1}}\,.$$

3. $l_2 = l_1\dfrac{v_1^2}{v_2^2}$.

11 класс

1. Ускорение равно $a = \omega^2 r\sqrt{2}$ и направлено к точке O под углом 45° к отрезку AO'.

2. $a = 0$ при $\min\left(\mu_1, \mu_2\right) > \mathrm{tg}\,\alpha$ и $a = g\left(\sin\alpha - \min\left(\mu_1, \mu_2\right)\cos\alpha\right)$ при $\min\left(\mu_1, \mu_2\right) < \mathrm{tg}\,\alpha$.

3. $v_1 = \dfrac{\hbar\omega}{\left(m_1 + m_2\right)c}$; $v_2 = 0$; $\Delta L = \dfrac{\hbar\omega}{c^2}\dfrac{L}{m_1 + m_2}$; $\Delta m = \dfrac{\hbar\omega}{c^2}$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $\rho_п = \rho_в \lambda^2$.

2. В первом случае установится температура 0 °С, а во втором – температура

$$t = \frac{rm_п - \lambda m_{л1} + t_л c_л m_{л1} + t_п c_в m_п}{c_в(m_п + m_{л1})} \approx 28\ °\text{C}.$$

3. $N = \frac{1}{2} Mgv\left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

9 класс

1. $\mu = -\text{ctg}(\alpha + \beta) \approx 0{,}17$.

2. При $m_3 \geq \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}$.

3. $S_2 = S_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$; $b_2 = \frac{V}{S_1}\frac{\alpha_2(1-\alpha_2)}{\alpha_1+\alpha_2}$; $k = \rho g S_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_2}$.

4. $32{,}7\ \text{Ом} < R_1 < 38{,}6\ \text{Ом}$.

10 класс

1. $v_1 = v_0 \frac{R_0}{R_1}$; $\alpha_1 = \alpha_0$.

2. а) $T_{\max} = T_{\min} + \frac{Q_1}{(3/2)\nu R}$;

б) $Q_{3\,отд} = Q_1$, $Q_{4\,о2д} = Q_2 \frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min} + Q_1}$;

в) $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 = Q_2$, $A_4 = -Q_2 \frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min} + Q_1}$;

г) $\eta = \frac{Q_1Q_2}{(Q_1+Q_2)\left((3/2)\nu RT_{\min} + Q_1\right)}$.

3. $R = \frac{1}{4}\left(R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{(1/R_1)+(1/R_2)+(1/R_3)}\right)$.

11 класс

1. Ускорение равно

$$a = g\frac{\sqrt{(2m_1m_3)^2 + \left(m_2(m_3 - m_1) - m_1^2\right)^2}}{(m_1+m_2)(m_1+m_3) + m_1m_3}$$

и направлено под углом $\varphi = \text{arctg}\frac{m_2(m_3-m_1) - m_1^2}{2m_1m_3}$ к горизонтали.

2. $r_0 \approx \lambda\frac{\rho_г}{\rho_ж} \approx 10^{-10}$ м, $m_0 \approx \frac{\lambda^3\rho_г^3}{\rho_ж^2} \approx 10^{-27}$ кг.

3. а) $U = \frac{rU_0 + R(\mathscr{E} - U_0)}{r+R} = 2{,}6$ В;

б) на резисторе и на правом диоде выделится одно и то же количество теплоты

$$Q = \frac{CR^2}{2}\left(\left(\frac{\mathscr{E} - 2U_0}{r+R}\right)^2 + \frac{I_0U_0}{R}\right) = 1{,}68\cdot10^{-4}\ \text{Дж},$$

на левом диоде тепло выделяться не будет.

4. $\omega = \sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}$;

$$I_1(t) = \frac{L_1I_1^0 - L_2I_2^0}{L_1+L_2} + \frac{L_2\left(I_1^0 + I_2^0\right)}{L_1+L_2}\cos\omega t,$$

$$I_2(t) = \frac{L_2I_2^0 - L_1I_1^0}{L_1+L_2} + \frac{L_1\left(I_1^0 + I_2^0\right)}{L_1+L_2}\cos\omega t;$$

$$Q(t) = \frac{I_1^0 + I_2^0}{\omega}\sin\omega t.$$

ТОЧКА ВНЕ ОКРУЖНОСТИ

(см. «Квант» №3)

1. 5. **2.** $\arcsin\frac{a}{b}$. **3.** 5. **4.** 9.

5. $\sqrt{ab}$. **6.** $7 + 4\sqrt{3}$. **7.** $\frac{a-r}{a+r}$. **8.** 13.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»; тел.: 930-56-48; e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат» 142300 г.Чехов Московской области Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36 E-mail: marketing@chpk.ru