Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2081» или «Ф2088». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2081–М2083 предлагались на XXIX Турнире городов, задача М2085 предлагалась на XLVIII Международной математической олимпиаде.

Задачи М2081–М2085, Ф2088–Ф2092

М2081. На доске записаны три положительных числа: x, y и 1. Разрешается дописывать на доску сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Всегда ли можно получить на доске число: а) x^2; б) xy?

Г.Гальперин

М2082. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников PKL, PLM, PMN, PNK равны.

А.Заславский

М2083. Дана клетчатая полоса $1\times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Б.Френкин

М2084*. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1.$$

А.Ефимов

М2085*. Среди участников математического соревнования некоторые дружат между собой; если A дружит с B, то и B дружит с A. Назовем группу участников *кликой*, если каждые двое из них дружат. Назовем количество человек в клике ее *размером*. Известно, что наибольший размер клики, состоящей из участников соревнования, является четным числом. Докажите, что всех участников можно рассадить в две комнаты так, чтобы наибольший размер клики в одной комнате был равен наибольшему размеру клики в другой комнате.

В.Астахов

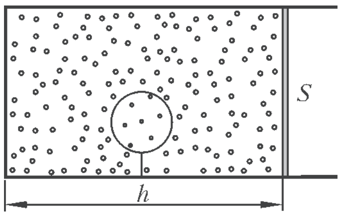
Ф2088. Автомобиль «Жигули» самой первой модели едет по огромной горизонтальной асфальтовой площади, описывая круг радиусом 200 м. Его скорость составляет при этом 20 м/с. При каком значении коэффициента трения между асфальтом и шинами автомобиля такое движение возможно? Представим себе, что коэффициент трения ровно вдвое больше этого минимального значения. За какое время автомобиль сможет увеличить свою скорость до 20,5 м/с, не прекращая движения по кругу? Центр тяжести автомобиля находится на его оси симметрии на равных расстояниях от передней и задней осей.

А.Повторов

Ф2089. На гладком горизонтальном столе находится брусок кубической формы массой 2 кг. На его верхней поверхности лежит второй брусок, его масса 1 кг. Коэффициент трения между поверхностями брусков составляет 0,7. Большой брусок тянут влево горизонтальной силой 6 Н, малый – вправо горизонтальной силой 3 Н (эти две силы направлены в противоположные стороны!). Найдите ускорения брусков.

З.Рафаилов

Ф2090. Горизонтальный цилиндрический сосуд с теплопроводящими стенками, заполненный аргоном плотностью $\rho = 1{,}7$ кг/м^3, закрыт подвижным поршнем и



находится в комнате (см. рисунок). Площадь поршня $S = 400$ см^2, расстояние от края цилиндра до поршня $h = 50$ см. В сосуде ко дну на нити прикреплен шар объемом $V_{ш} = 1000$ см^3, сделанный из тонкого нерастяжимого и теплопроводящего материала и заполненный гелием. Масса шара с гелием $m = 1,2$ г. После того как протопили печь и воздух в комнате прогрелся, поршень переместился на расстояние $\Delta h = 3$ см. Найдите изменение силы натяжения нити, удерживающей шар.

Е.Простомолотова

Ф2091. Три одинаковые батарейки напряжением 1,5 В каждая вначале не соединены друг с другом. Затем между каждым выводом батарейки и каждым из пяти оставшихся выводов подключают резистор сопротивлением 1000 Ом. Сколько всего получится резисторов? Какой ток при этом будет течь через каждую из батареек?

А.Простов

Ф2092. Школьник исследует резонанс в последовательном колебательном контуре, используя генератор звуковой частоты и высокоомный вольтметр переменного напряжения. Конденсатор имеет емкость 0,5 мкФ, индуктивность катушки равна 0,1 Гн. Сопротивление провода, которым намотана катушка, составляет 50 Ом. Вольтметр подключают параллельно конденсатору и изменяют частоту генератора. На какой частоте показания вольтметра будут максимальными? На какой частоте вольтметр покажет максимум, если подключить его к выводам катушки?

А.Зильберман

Решения задач М2056–М2065, Ф2073–Ф2077

М2056. *В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что* $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N\text{ единиц}}$. *Найдите наименьшее возможное значение N.*

Ответ: 9.

Как известно, любое число имеет тот же остаток от деления на 9, что и его сумма цифр. Поэтому числа, получаемые друг из друга перестановкой цифр, имеют одинаковый остаток от деления на 9, т.е. их разность делится на 9. Поэтому и сумма цифр разности, равная N, должна делиться на 9, откуда $N \geq 9$.

Значение $N = 9$ получается, например, так:

$$9012345678 - 8901234567 = 111111111.$$

Н.Агаханов

М2057. *25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.*

По условию имеется ровно 26 девочек, знакомых хотя бы с одним мальчиком из 25. Выберем произвольно мальчика M. Для оставшихся 24 мальчиков ровно 25 девочек знакомы хотя бы с одним из них. Тогда девочка D, не входящая в эти 25, знакома только с одним мальчиком M. Обозначим мальчиков $M_1, \ldots, M_{25}$; обозначим девочку, знакомую только с M_i, через D_i. Рассмотрим оставшуюся девочку (отличную от $D_1, \ldots, D_{25}$). Если она знакома менее чем с 16 мальчиками, то для группы из $k \geq 10$ мальчиков, не знакомых с ней, найдется ровно k девочек, знакомых хотя бы с одним из них, – противоречие.

С.Волчёнков

М2058. *В выпуклом четырехугольнике пять из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.*

Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, а E, I, F, K – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Равные отрезки из условия (их не меньше пяти) назовем *отмеченными*. Также будем называть *отмеченными* те из треугольников ABC, BCD, CDA, DAB, в которых две медианы отмеченные. Ясно, что отмеченный треугольник найдется; пусть это будет ABC. Из равенства медиан следует, что ABC равнобедренный: $AB = BC = a$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть отмеченным является треугольник CDA. Тогда ABC и CDA – равнобедренные треугольники с общим основанием и равными медианами к боковым сторонам. Значит, эти треугольники равны, откуда $CD = DA = a$. Отсюда легко вывести, что все 8 отрезков из условия задачи равны.

2. Пусть отмеченным является треугольник BCD (случай, когда отмечен ABD, аналогичен). Тогда $AB = BC = CD = a$. Без ограничения общности можно считать, что отмечен отрезок AF или BK (случаи, когда отмечен DE или CK, аналогичны). Если отмечен AF, то у треугольников ABC и CDA общая сторона AC, равные стороны BC и CD и равные медианы, проведенные к этим сторонам. Отсюда треугольники равны, и получаем $AB = BC = CD = DA = a$. Если отмечен BK, то у треугольников ABD и CBD общая сторона BD, равные стороны AB и BC и равные медианы, проведенные к третьим сторонам. Получим, что треугольники равны, и снова $AB = = BC = CD = DA = a$.

3. Пусть ни один из треугольников BCD, CDA, ADB не является отмеченным. Тогда в каждом из них отмечено ровно по одной медиане. В этом случае $AD \neq AB$, $CD \neq BC$, $AD \neq CD$. Разобьем теперь отрезки на пары (AF, CK), (BF, BK), (DE, DI). Ни в одной паре нет двух отмеченных отрезков. В самом деле, $AF \neq CK$, иначе $AD = CD$. Если $BF = BK$ или $DE = DI$, то треугольники ABD и CBD равны, и снова $AD = CD$ – противоречие. Значит, в каждой паре отмечен ровно один отрезок. Пусть в паре (DE, DI) отмечен DI, тогда в паре (BF, BK) отмечен BK. Если в паре (AF, CK) отмечен CK, то BKC и AID – равные треугольники