XIII Всероссийская заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» при участии журнала «Квант» проводит очередную Всероссийскую заочную математическую олимпиаду для школьников 5–10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь–декабрь 2006 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать по адресу: 115446 Москва, а/я 450, ОРГКОМИТЕТ, «М-КВАНТ» – номер класса.

В письмо вложите два пустых маркированных конверта с надписанным домашним адресом.

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант». (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и призы получили все, приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2006/07 учебном году.

Вниманию учителей математики 5–10 классов!
Пригласите к участию в олимпиаде своих учеников!

Задачи олимпиады

5 класс

1. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только рычажные весы без гирь, отмерить 9 кг гвоздей?

2. Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. За каждый день он проползает вверх на 3 см, а за каждую ночь сползает вниз на 1 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота 75 см?

3. Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было выдать, не открывая кошельков?

4. Круглая поляна обсажена деревьями. Мальчик и девочка пошли вокруг поляны, считая деревья. Они идут в одном направлении, но начали считать в разных местах. Дерево, которое у девочки было седьмым, у мальчика было двадцатым, а дерево, которое у мальчика было седьмым, у девочки было девяносто третьим. Сколько деревьев растет вокруг поляны? Ответ объясните.

5. Можно ли прямоугольник размером 35×23 разрезать без остатка на прямоугольники размером 5×7? Если можно, то как? Если нельзя, то почему?

6 класс

1. Доктор Айболит раздал четырем заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну таблетку больше, чем крокодил, бегемот – на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придется съесть слону?

2. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в 10-м подъезде в квартире 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одно и то же, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

3. Возьмите любое трехзначное число. Умножьте его на 7, результат умножьте на 11, а новый результат – на 13. Сравните полученное число с исходным, опишите обнаруженное явление и объясните его причину.

4. Страницы в книге пронумерованы подряд, от первой до последней. Хулиган Вася вырвал из разных мест книги 25 листов и сложил номера всех 50 вырванных страниц. У него получилось 2006. Докажите, что сложение было выполнено неправильно.

5. Среди всех положительных чисел с суммой цифр, равной 21, найдите наименьшее и наибольшее. Ответ обоснуйте.

7 класс

1. Фраза **Bekybekjwe – xezjxe j tvunemwe ctyd meuw**, имеющая прямое отношение к математике, зашифрована следующим образом: русские буквы заменены на латинские, причем гласные заменены на гласные, а согласные – на согласные. Расшифруйте фразу.

2. Найдите последнюю цифру числа 2007^{2006}.

3. Выразите l из соотношения

$$2l + k = \frac{4l^2 - k^2}{m + 2l}.$$

4. Изобразите на координатной плоскости $0xy$ множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению

$$\left||x| + x\right| + \left||y| + y\right| = 0.$$

5. Очень мощный прожектор высвечивает конус, угол между диаметрально противоположными лучами которого равен 90°. Каким конечным числом таких прожекторов можно гарантированно осветить все пространство?

8 класс

1. Решите в целых числах уравнение

$$xy + x + y = 3.$$

2. Дан треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см. Найдите площадь фигуры, каждая точка которой удалена от данного треугольника не больше чем на 1 см.

3. См. задачу 2 для 7 класса.

4. См. задачу 5 для 7 класса.

5. Докажите, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2006^2} < 1.$$

9 класс

1. Решите в целых числах уравнение
$$\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)=25 .$$
2. Докажите неравенство
$$\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \ldots \cdot \cos\left(2^{2006}\right)^\circ \le \frac{1}{2^{2007}\sin 1^\circ} .$$
3. См. задачу 5 для 7 класса.

4. Что больше: 2006^{2007} или 2007^{2006} ?

5. Рациональным или иррациональным является число $\sin 2007^\circ$?

10 класс

1. Решите уравнение
$$\sqrt{x}+\sqrt{2006-x}=\sqrt{2006} .$$
2. См. задачу 5 для 7 класса.

3. Докажите неравенство
$$\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 2006^\circ \le \frac{1}{\sin(1/2)^\circ} .$$
4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Изобразите на плоскости параметров $0ab$ множество точек (a,b) таких, для которых уравнение
$$(ab+1)x^2+(a+b)x+1=0$$
относительно переменной x имеет действительные корни, большие единицы.

Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» — часть программы Международного интеллект-клуба (МИК) "ГЛЮОН", проводимой с целью поиска, отбора и поддержки интеллектуально одаренных детей, проявляющих интерес к математике, физике и информатике. Уникальность этого турнира состоит в том, что все задачи предполагается решать с помощью численного моделирования на компьютере.

Для участия в турнире приглашаются команды школьников (5 человек), обладающих знаниями физики и навыками работы на IBM PC. Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами в два тура — заочный и очный.

X Турнир «Компьютерная физика»

Традиционно, заочный тур этого турнира начался в сентябре 2005 года рассылкой задания заочного тура «Кинетика фазовых переходов» по заявкам в лицеи, школы и гимназии (это задание было опубликовано в журнале «Квант» №5 за 2005 г.). Шесть лучших команд были приглашены на финал – очный тур соревнований, который проходил с 29 января по 5 февраля 2006 года в городе Протвино на базе Государственного научного центра Института физики высоких энергий. В проведении турнира приняли участие Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова и администрация города Протвино. Турнир прошел при поддержке фонда «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С» и журнала «Квант».

Прежде всего состоялась защита заочных заданий. Каждой команде было предложено выступить с докладом научных результатов перед командами оппонента и рецензента. Научная дискуссия завершилась победой команды «МИФИ-1» лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ).

Подготовка к соревнованиям очного тура началась с лекции профессора МГУ А.М.Попова о фотоэффекте и его классической и квантовой интерпретации, после чего команды получили задание очного тура и в течение последующих двух дней решали поставленную задачу.

На защите очного задания отличилась команда гимназии 56 из Ижевска, представившая наиболее развернутое и глубокое решение и ставшая победителем этого тура. Она же стала и абсолютным победителем турнира по итогам двух туров и получила переходящий приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени и памятными значками были награждены команда гимназии 56 из Ижевска и команда «МИФИ-1» лицея 1511 при МИФИ. Дипломы II степени получили команда Самарского аэрокосмического лицея и команда «МИФИ-2» лицея 1511 при МИФИ, а диплом III степени завоевала команда ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э.Баумана. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

Очный тур «Фотоэффект»

Современные взгляды на процесс фотоионизации атомов восходят к знаменитой работе А.Эйнштейна по фотоэффекту, выполненной в 1905 году и лежащей в основе квантовой теории. Фотоэффект был открыт Г.Герцем в 1887 году и позднее детально исследован А.Г.Столетовым. Опыты Столетова по изучению фотоэффекта с поверхности металлов привели к установлению ряда фактов, необъяснимых с точки зрения классической физики. Так, оказалось, что энергия фотоэлектронов не зависит от интенсивности воздействующего излучения и для данного материала определяется лишь его частотой ω. Причем существует минимальное значение частоты излучения ω^* — так называемая красная граница фотоэффекта, — вызывающего фотоэффект; для значений $\omega<\omega^*$ фотоэффект невозможен. Преодолевая трудности объяснения закономерностей фотоэффекта, Эйнштейн высказал гипотезу, что свет представляет собой поток частиц – квантов света, фотонов, несущих энергию $\hbar\omega$ ($\hbar=1,05\cdot10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка). Предположение о том, что свет распространяется в пространстве и поглощается веществом порциями $\hbar\omega$,