Задачи с прямоугольным треугольником

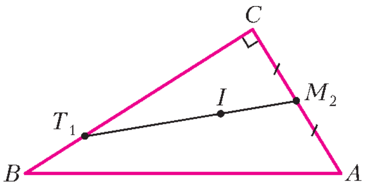

Рис. 14

Задача 13. *Докажите, что в прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) точки T_1, I, M_2 принадлежат одной прямой (рис.14).*

Решение. Так как прямая T_1I делит высоту h_a пополам (задача 4), а в прямоугольном треугольнике катет AC совпадает с h_a, то задача решена.

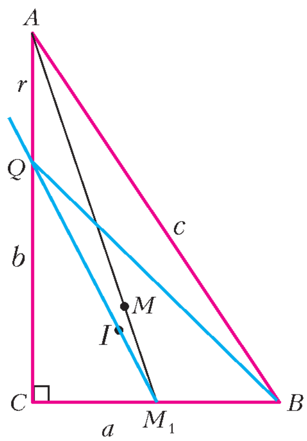

Рис. 15

Задача 14. *Дан прямоугольный ΔABC ($\angle C = 90°$) с заданными положениями центроида M и инцентра I. При помощи одной линейки разделите периметр этого треугольника пополам.*

Решение. Прямая AM пересечет BC в точке M_1 (рис.15). Прямая M_1I пересечет AC в точке Q такой, что $AQ = r$ (свойство 3). Прямая BQ разделит периметр ΔABC пополам, ибо

$$c + r = c + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = p.$$

Задача 15. *В прямоугольном ΔABC через середину гипотенузы BC и инцентр I проведена прямая. Она пересекает катет AB под углом $75°$. Найдите острые углы ΔABC.*

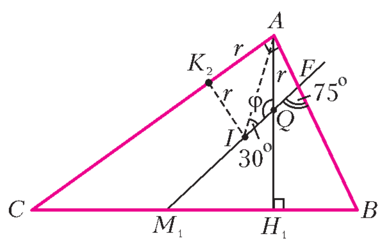

Рис. 16

Решение. Пусть прямая M_1I пересекает AH_1 в точке Q и AB – в точке F (рис.16). Тогда, согласно условию, $\angle BFM_1 = 75°$, а $AQ = r$ (свойство 3). Кроме того, $AI = r\sqrt{2}$ и $\angle AIF = 30°$ (так как $\angle BFM_1 = 75°$ – внешний для ΔAIF).

Пусть $\angle AQI = \varphi$. По теореме синусов для ΔAQI имеем

$$\frac{AI}{\sin\varphi} = \frac{AQ}{\sin 30°}, \text{ или } \frac{r\sqrt{2}}{\sin\varphi} = \frac{r}{1/2},$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ и } \varphi = 135°.$$

Из четырехугольника $BFQH_1$ найдем угол B:

$$\angle B = 360° - 90° - 135° - 75° = 60°.$$

Тогда $\angle C = 30°$.

Задачи, связанные с вневписанной окружностью

Заметим, что свойства, аналогичные вышеуказанным, можно наблюдать и при рассмотрении вневписанных окружностей треугольника ABC.

Пусть I_a – центр вневписанной окружности ω, касающейся стороны BC и продолжений AB и AC (рис.17). Вот несколько фактов, которые мы предлагаем вам доказать самостоятельно:

а) I_aK_1 делит h_a пополам;

б) I_aM_1 отсекает на продолжении h_a за точку A отрезок AY, равный радиусу окружности ω;

в) $I_aM_1 \parallel AK_1$;

г) I_aM_1 делит отрезок AT_1 пополам.

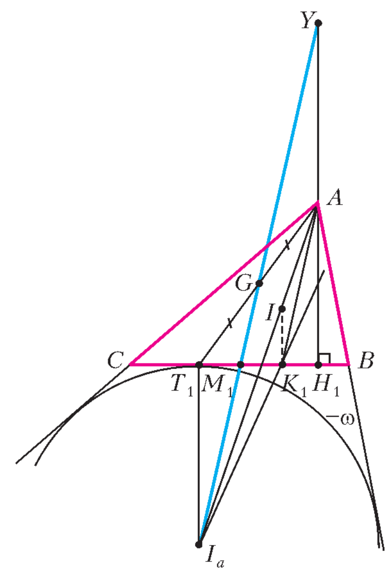

Рис. 17

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Квантовые чудеса

М.КАГАНОВ

Введение

В статье «Как квантовая механика описывает микромир» (см. «Квант» №2, 3 за 2006 г.) рассказывалось о фундаментальном уравнении квантовой механики – уравнении Шрёдингера – и с его помощью рассматривалась задача поведения частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. В предлагаемой вниманию читателей публикации главное внимание будет уделено решению нескольких сравнительно простых задач, которые подобраны так, чтобы продемонстрировать необычность поведения микрочастиц по сравнению с макроскопическими телами. Из соображений простоты мы ограничимся только одномерными задачами.

Предлагаемые задачи, как правило, не могут претендовать на описание какого-то реального физического явления. Но они могут помочь понять реальные явления, достойные называться *квантовыми чудесами.*

Частица или волна? Одна или много?

Наибольшей психологической трудностью квантовой механики считается непредставимость основного объекта, для описания движения которого она создана. То частица проявляет свои волновые свойства, то корпускулярные. Математический аппарат квантовой механики устроен так, что, решая любую физическую задачу, можно пользоваться общими приемами, позволяющими строго сформулировать математическую задачу, а для решения задачи нет необходимости *предполагать заранее*, какую черту поведения микроскопической частицы мы установим – волновую или корпускулярную. Решив задачу, мы *поймем*, как квантовая механика описывает движение частицы. Поймем, даже если не сможем себе представить.

В данной статье строгая постановка задачи означает возможность записать уравнение Шрёдингера, установить необходимые граничные и начальные условия. Решение поставленной задачи состоит не только в нахождении ψ-функции, удовлетворяющей уравнению Шрёдингера с начальными и граничными условиями, но и в вычислении интересующих нас физических величин. Будут решаться только такие задачи, где ψ-функция описывает движение *одной* частицы под действием силы, не зависящей от времени. Однако конкретные физические результаты, которые «содержатся» в ψ-функции одной частицы и которые можно сравнивать с результатами эксперимента, относятся не к одной частицы, а *к ансамблю*, коллективу во всем подобных частиц.

Что же описывает уравнение Шрёдингера: движение одной частицы или многих частиц? Одной! Но чтобы воспользоваться полученными результатами, их нужно перевести на язык макроскопической, классической физики. Именно для этого необходим переход к ансамблю многих частиц.

Переход из микромира в макромир не проходит «безнаказанно»: меняется описание причинной связи между событиями. В макромире властвует обычный механический детерминизм. Во всяком случае, когда речь идет о движении одной частицы под действием заданной силы. Зная начальные условия, мы можем проследить движение частицы во все последующие моменты. Уточним: пусть при $t = 0$ известны координата x_0 и скорость v_0 частицы. Решив уравнение Ньютона (сила известна), мы найдем положение частицы в любой момент времени, т.е. функцию $x = x(t)$, равную x_0 при $t = 0$. Производная $dx(t)/dt$ есть скорость частицы $v(t)$. Естественно, когда $t = 0$, то $v = v_0$. Именно это утверждение и носит пышное название *механического детерминизма.*

Пусть не обманет вас слово «макромир». В макромире происходят разнообразные события, предсказать результаты которых абсолютно достоверно невозможно. Иногда это связано только с неполным знанием начальных условий. Классический пример – бросание кости. Если бы знать, но абсолютно точно(!), как бросить кубик, чтобы он выпал нужной гранью вверх, задача имела бы однозначное решение. А так надо довольствоваться оценкой вероятности того, что произойдет.

Бывает, и весьма часто, иначе: точно известна сила, приводящая макротело в движение, и известно, как будет двигаться тело под действием этой силы. Но если тело движется, например, в воздухе или скользит по наклонной плоскости, то на тело, кроме известной силы, действуют также силы со стороны молекул воздуха или атомов того тела, по которому оно скользит. Конечно, описать во всех подробностях движение тела и всех частиц (воздуха, наклонной плоскости) невозможно. Обычно достаточно ограничиться усредненным описанием влияния окружающей среды с помощью силы трения или сопротивления атмосферы. Учитывая силу трения (сопротивления), описывать движение макроскопического тела можно вполне надежно, но важные черты движения при этом существенно изменяются.

Так, часть энергии тела из-за трения необратимо теряется, превращаясь в тепло, – исчезает обратимость. Обратимость уравнений механики – формальное следствие того, что они не изменяются при замене t на $-t$: ускорение – вторая производная от координаты – при замене t на $-t$ не меняется. Сила же трения пропорциональна скорости тела – первой производной от координаты, которая при такой замене изменяется. Именно это обстоятельство и есть формальная причина потери обратимости.

В таком описании сил трения внимательный читатель ощутит непоследовательность. Каждая молекула воздуха или наклонной плоскости подчиняется тем же законам, что и само тело (сейчас речь не идет об изменениях, вносимых квантовой механикой). Почему же появляется необратимость? Это – весьма сложный вопрос. В основе ответа на него лежит явление диссипации, обусловленной переходом энергии от небольшого числа механических степеней свободы макроскопического тела к по сути бесконечному числу степеней свободы микроскопических частиц. Движение микрочастиц столь хаотично, что вероятность возвращения энергии обратно к телу равна нулю. По этому поводу говорят о необратимом запутывании, а более строгим языком – о росте *энтропии*, которая служит мерой беспорядка.

Вернемся к одной квантовой частице, движение которой описывается ψ-функцией – решением уравнения Шрёдингера. Волновая функция – функция координат и времени. Задав начальное состояние, мы найдем вполне определенное решение $\Psi = \Psi(x,t)$. Казалось бы, вполне детерминированный процесс. Но, задав себе простейший вопрос о том, где находится частица в момент времени t, мы вынуждены ограничиться утверждением, что нам известна лишь вероятность нахождения частицы в интервале dx вокруг точки x, и вероятность эта равна $|\Psi(x,t)|^2 dx$. Подчеркнем: несомненно, речь идет об ансамбле частиц, а не об одной частице. Без ансамбля тождественных частиц понятие вероятности теряет смысл. И дело не в неполноте знаний или во взаимодействии с большим количеством иных частиц. Вероятность – первичное понятие квантовой механики. Строгое рассмотрение показало, что добиться большей точности предсказаний нельзя, нельзя избежать использования вероятности при описании движения микроскопических частиц.

Корпускулярно-волновой дуализм квантовых частиц не только делает их движение очень непохожим на движение классических тел, но заставляет рассматривать поведение ансамбля частиц даже тогда, когда, казалось бы, уравнение описывает движение одной частицы. В этом состоит еще одна психологическая трудность понимания квантовой механики.

Траектория, стационарное состояние

Общее описание движения микроскопических частиц квантовой механикой убеждает нас: квантовые законы движения не похожи на классические. Но чтобы возникло ощущение чуда, появилось впечатление, что происходит нечто, чего «не может быть», необходимо рассмотреть примеры. Сделать наглядным отличие поведения квантовых микрочастиц от макроскопических тел можно, если четко представить движение классических макротел в условиях, точно совпадающих с условиями, в которых будет рассмотрено движение квантовых частиц. При описании движения классических тел и квантовых частиц мы постараемся использовать одинаковые термины – там, где это возможно.

В одномерном случае как-то неудобно говорить о *траектории.* Классическая частица в одномерном мире, конечно, *всегда* движется по прямой. Исчерпывающее описание движения частицы под действием внешней, не зависящей от времени силы $F = F(x)$ сводится к определению зависимости координаты частицы от времени – к нахождению функции $x = x(t)$. Полная информация о движении частицы содержится в этой функции. Скорость частицы равна $v(t) = dx(t)/dt$, импульс частицы (количество движения) есть $p(t) = mv(t)$.

Функция $x(t)$ – решение уравнения Ньютона. Из уравнения Ньютона следует *закон сохранения энергии*

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const}, \text{ или } \varepsilon = \frac{p^2}{2m} + U(x) = \text{const}. \quad (1)$$

Сила – производная, взятая с противоположным знаком, от потенциальной энергии: $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$. Для понимания связи уравнения Ньютона с законом сохранения энергии продифференцируйте первое из указанных равенств по времени, помня, что координата x зависит от времени t, и немедленно полу́чите уравнение Ньютона:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = F(x). \quad (1')$$

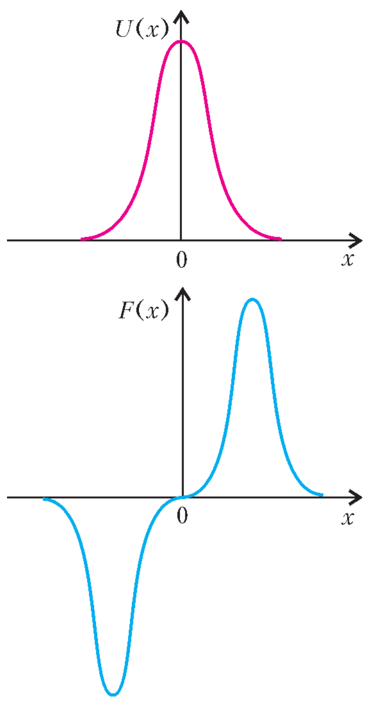

Рис. 1

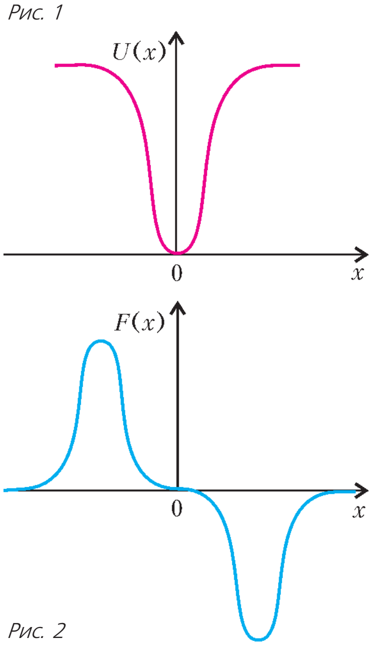

Рис. 2

Мы будем рассматривать потенциальную энергию либо в виде потенциального барьера (рис.1), либо в виде потенциальной ямы (рис.2). На рисунках 1 и 2 показано также, как выглядит сила, под действием которой ускоряется или замедляется частица.

Рисунок 3 изображает предельно упрощенный потенциальный барьер, а рисунок 4 – предельно упрощенную потенциальную яму. Это идеализация, конечно, но очень удобная для расчета. На всей оси x, кроме точек $x = \pm d$, сила равна нулю, а в точках $x = \pm d$ $F = \pm\infty$. Функция $F(x)$, равная нулю при всех значениях x, кроме $x = 0$, а при $x = 0$ равная бесконечности, это та самая дельта-функция Дирака, о которой говорилось в упомянутой ранее статье. Обозначается она так: $\delta(x)$. Таким образом, для прямоугольного барьера

$$F(x) = -U_0\,\delta(x+d) + U_0\,\delta(x-d), \quad (2)$$

а для прямоугольной ямы

$$F(x) = U_0\,\delta(x+d) - U_0\,\delta(x-d). \quad (2')$$

Уточним определение δ-функции: интеграл от $\delta(x)$ по интервалу, содержащему точку $x = 0$, равен единице.

В тех задачах, которые здесь обсуждаются, всегда и справа и слева с определенного расстояния до бесконечности потенциальная энергия есть ноль или константа. Уравнения (1) задают зависимость скорости v и импульса p от координаты x:

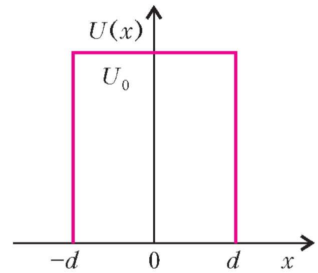

Рис. 3

$$v = \sqrt{\frac{2(\varepsilon - U(x))}{m}},$$

$$p = \sqrt{2m(\varepsilon - U(x))},$$

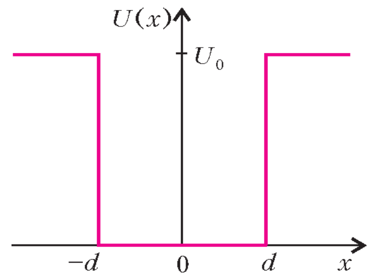

Рис. 4

а из рисунков 1 и 2 видно, что расстояние от точки с координатой x на кривой $U = U(x)$ до прямой $\varepsilon = \text{const}$ по вертикали равно кинетической энергии макрочастицы. При заданной потенциальной энергии значение энергии ε определяет характер движения. Так, согласно рисунку 1, частица с энергией, превышающей $\max U(x) = U_0$, движется беспрепятственно вдоль всей оси x, а частица с энергией $\varepsilon < U_0$ движется только по полуоси: либо справа от потенциального барьера, либо слева. В случае потенциальной ямы различие еще более разительно: если $\varepsilon > U_0$, то частица совершает инфинитное движение, т.е. где бы частица ни начала свое движение, она уйдет на бесконечность. При $\varepsilon < U_0$ движение финитно: частица движется в пределах потенциальной ямы.

Зная, что предсказания квантовой механики могут быть проверены только в экспериментах с ансамблями частиц даже при рассмотрении движения одной частицы, выясним, как движение многих тождественных частиц описывается классической механикой.

Основными терминами для описания движения коллектива тождественных частиц служат плотность частиц n и плотность потока частиц $\vec{j}$. Заметим, что плотность потока частиц – это вектор. В трехмерном пространстве размерность плотности частиц есть см^{-3}, а плотности потока частиц – $\text{с}^{-1}\cdot\text{см}^{-2}$. В одномерном случае n – это число частиц на единице длины, размерность n есть см^{-1}, а плотность потока частиц $j = vn$ – это число частиц, проходящих через точку в единицу времени, размерность j есть с^{-1}.

И n, и j – функции x и t. Между n и j есть связь, называемая *уравнением непрерывности*:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь использованы традиционные обозначения: $\partial\ldots/\partial t$ – производная по времени при постоянном значении координаты x, а $\partial\ldots/\partial x$ – производная по координате при постоянном значении времени t. Для вывода уравнения непрерывности надо вычислить изменение числа частиц на интервале dx за время dt, обязанное различию плотности потока на концах интервала (число частиц на интервале dx равно ndx, а за время dt через любую точку проходит jdt частиц). Уравнение непрерывности встречается всегда, когда плотность чего-либо изменяется в пространстве только за счет перемещения, а появление (рождение) или уничтожение (гибель) отсутствуют.

Уравнение непрерывности позволяет описать *стационарное состояние*. В классической механике, когда речь идет об одной частице, стационарное состояние как термин не употребляется. Если частица движется периодически, то говорят, что частица движется по стационарной траектории, подчеркивая, что траектория не изменяется со временем. Когда же речь идет об ансамбле тождественных частиц, стационарное состояние означает следующее. В понятие тождественности входят одинаковые начальные условия для всех частиц. Пусть в область, где на частицы действует сила, входит постоянный поток частиц плотностью $j = j_0$ с одной и той же для всех частиц энергией $\varepsilon_0 = mv_0^2/2$. Вся картина движения потока частиц не зависит от времени – осуществляется *стационарное состояние*: плотность потока не зависит от времени (произведение скорости v на плотность частиц n, равное плотности потока частиц j, не изменяется со временем). При этом скорость v зависит от координаты, как это следует из закона сохранения энергии, и, следовательно, плотность частиц зависит от координаты: $n = n(x)$. Там, где скорость больше, там плотность меньше, а где скорость меньше, там плотность больше, – это хорошо известный эффект (например, часто наблюдаемое скопление автомашин на участках замедленного движения). Стационарное состояние легко обобщается на поток частиц с различными энергиями. Если пренебречь столкновениями, то каждая группа частиц с одной и той же начальной скоростью подчиняется уравнению непрерывности, и каждая, независимо от других, движется так, как описано выше.

Чтобы в дальнейшем подчеркнуть отличие поведения квантовых частиц в сравнении с классическими, отметим несколько очевидных фактов.

Какова бы ни была форма или высота потенциального барьера, классическая частица с энергией, меньшей высоты барьера, под барьер проникнуть не может. От барьера она отразится и со скоростью, равной по величине, но направленной противоположно первоначальной скорости, двинется от барьера. Поток тождественных частиц поведет себя так же. Если плотность потока частиц к барьеру обозначить j_+, а плотность потока частиц от барьера обозначить j_-, то их отношение j_-/j_+ есть коэффициент отражения. Обозначим его буквой R, тогда для классических частиц $R = 1$.

Каковы бы ни были форма и размер потенциальной ямы, если энергия частицы меньше потенциальной энергии вне ямы, классическая частица будет двигаться от одной стенки к другой и покинуть яму не сможет. Ничто не запрещает частице неподвижно лежать на дне ямы. Период движения частицы в яме зависит от ее энергии. В прямоугольной яме шириной $2d$, изображенной на рисунке 4, период равен $T = \dfrac{4d}{\sqrt{2(\varepsilon - U_0)/m}}$.

Совсем очевидный и уже отмеченный выше факт: классическая частица с энергией $\varepsilon > U(x)$ при любом значении координаты x движется свободно со скоростью, зависящей от координаты. Плотность потока частиц j при этом неизменна. Наконец, энергия классической частицы может иметь любое значение. Есть единственное ограничение: полная энергия ε должна быть больше или равна потенциальной энергии $U(x)$. Иначе: энергетический спектр классической частицы непрерывен.

Уравнение Шрёдингера. Плотность потока...

Как Шрёдингер сформулировал уравнение, носящее теперь его имя, довольно подробно рассказано в упомянутой выше статье. Не повторяя сказанного, напомним только, что введение ψ-функции послужило основой создания волновой механики. Сначала квантовую теорию в шрёдингеровском варианте называли именно *волновой* механикой, подчеркивая волновые свойства атомных и субатомных частиц. Действительно, иногда понять квантовое явление легче, сравнивая движение квантовый частицы не с движением классической частицы, а с распространением волны, например электромагнитной.

Выпишем уравнения Шрёдингера для одномерного случая. Множественное число (уравнения) использовано потому, что мы выпишем два уравнения: нестационарное и стационарное. *Нестационарная* волновая функция в одномерном случае зависит от двух переменных – от координаты и от времени: $\Psi = \Psi(x,t)$, а *стационарная* волновая функция, тоже обозначаемая буквой ψ, но меньших размеров, зависит только от координаты: $\psi = \psi(x)$. Для состояния частицы, энергия которой имеет определенное значение, стационарная волновая функция $\psi(x)$ – это амплитуда в выражении для нестационарной волновой функции:

$$\Psi(x,t) = \exp\left(-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}\right)\psi(x). \qquad (4)$$

Итак, в одномерном случае нестационарное уравнение Шрёдингера имеет вид

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi\right), \qquad (5)$$

а стационарное уравнение –

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\varepsilon - U(x)\right)\psi = 0. \qquad (6)$$

Эти дифференциальные уравнения должны быть дополнены граничными и начальными условиями, но об этом позже.

В цитированной статье (и, конечно, не только в ней) сказано, что выражение $\Psi\Psi^* dx$, где звездочка * обозначает комплексное сопряжение, есть вероятность обнаружить частицу в точке x при многократном осуществлении эксперимента, в котором частица движется так, как описывает ψ-функция. Следовательно, $\rho(x,t) = \Psi\Psi^* = \left|\Psi(x,t)\right|^2$ есть плотность вероятности обнаружить частицу в точке x в момент времени t. Если $\rho(x,t) \neq 0$ в небольшой области пространства, то напрашивается зрительный образ – *облако вероятности*. Несомненно, интересно и важно знать, как оно движется, каков его закон движения.

Вывести уравнение, описывающее изменение плотности вероятности $\rho(x,t)$, нетрудно. Для этого используются уравнение (5) для Ψ и аналогичное уравнение для Ψ^*. После соответствующих преобразований получится

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad j = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right). \qquad (7)$$

Мы получили уравнение непрерывности. Естественно, здесь j – плотность потока. Но потока чего? Так как ρ – плотность вероятности, то j – *плотность потока вероятности.*

Удивительное дело: величины, с помощью которых можно только оценить вероятность того, попадет ли частица в данную точку пространства (ρ и j), с ходом времени изменяются в пространстве так, будто описывают движение газа частиц. Уравнение непрерывности показывает, что при движении вероятность не рождается и не исчезает, а только перемещается в пространстве. Если начальное состояние частицы таково, что она с достоверностью находится в какой-то области пространства, то с ходом времени может измениться область, где частицу можно обнаружить, но по-прежнему во всей доступной области частица с достоверностью находится.

Уравнение непрерывности (7) описывает *закон сохранения частицы.*

(Продолжение следует)