или

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta B}{B}=\frac{\Delta R}{R}.$$

После интегрирования получим

$$R\sqrt{B}=\text{const}.$$

Следовательно, радиус новой орбиты уменьшится в $\sqrt{3}$ раз.

Упражнения

1. С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, наблюдают упругое рассеяние α-частиц на ядрах дейтерия. Определите начальную энергию α-частицы, если радиус кривизны начальных участков траекторий ядра и α-частицы после рассеяния оказался равным R. Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля.

2. Частица массой m с положительным зарядом q находится в однородных электрическом и магнитном полях. Напряженность электрического поля равна E и параллельна линиям индукции магнитного поля (рис.9). В начальный момент частице сообщают скорость v_0, направленную под углом α к линиям индукции. Через некоторое время частица возвращается в начальную точку. Чему равно это время? Определите также значения индукции магнитного поля, при которых происходит возвращение частицы в начальную точку.

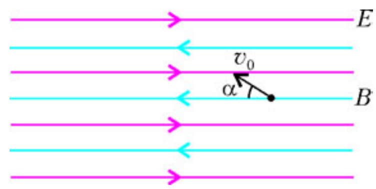

Рис. 9

3. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ помещена тонкая металлическая лента шириной d и толщиной a так, что плоскость ленты перпендикулярна линиям индукции (рис.10). По ленте пропускают ток I. Найдите разность потенциалов, возникающую между боковыми поверхностями ленты (т.е. на расстоянии d), если концентрация свободных электронов в металле ленты равна n.

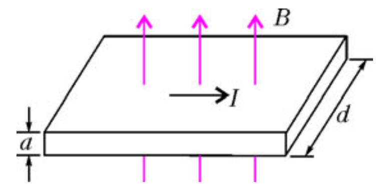

Рис. 10

Метод замены множителей

В.ГОЛУБЕВ

Основная идея метода

Метод интервалов для решения неравенств подробно рассматривается в школьных учебниках и пособиях для поступающих и, как правило, легко усваивается. Поэтому естественным можно признать желание свести решение того или иного неравенства повышенной сложности к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает.

Любое неравенство приводимо к виду

$$\frac{u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_n}{v_1\cdot v_2\cdot\ldots\cdot v_k}\vee 0, \qquad (1)$$

где символ «$\vee$» обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: $<$, $\le$, $\ge$, $>$. Согласитесь, что при решении неравенства (1) нас интересует только знак любого множителя в числителе или знаменателе, а не абсолютная его величина. Поэтому, если по каким-либо причинам нам неудобно работать с данным множителем, мы можем заменить его на другой знакосовпадающий с ним множитель в области определения неравенства (и имеющий в этой области те же корни). Этот бесхитростный факт и определяет основную идею метода замены множителей.

Важно обратить внимание читателя, что замена множителя осуществляется только (!) при условии приведения неравенства к виду (1), т.е. когда требуется сравнить произведение с нулем.

Монотонность – ключ к замене множителя

Основная часть замен обусловлена двумя следующими равносильными утверждениями.

Утверждение 1. *Функция $f(x)$ есть строго (!) возрастающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность (t_1-t_2) совпадает по знаку с разностью $(f(t_1)-f(t_2))$, т.е.*

$$f\nearrow\Leftrightarrow\left(t_1-t_2\overset{\text{одз}}{\leftrightarrow}f(t_1)-f(t_2)\right),$$

где символ «$\leftrightarrow$» *означает знакосовпадение*.

Утверждение 2. *Функция $f(x)$ есть строго (!) убывающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность (t_1-t_2) совпадает по знаку с разностью $(f(t_2)-f(t_1))$, т.е.*

$$f\searrow\Leftrightarrow\left(t_1-t_2\overset{\text{одз}}{\leftrightarrow}f(t_2)-f(t_1)\right).$$

Обоснование этих утверждений непосредственно вытекает из определения строго монотонной функции. Равносильность утверждений 1 и 2 следует из того факта, что если $y=f(x)$ есть монотонно возрастающая функция, то $y=-f(x)$ есть монотонно убывающая функция.

Комментарий. Из утверждений 1 и 2 вытекают все возможные замены множителей, за исключением знакопостоянных. Поэтому, если нет желания трогать знак неравенства, всюду положительные множители просто убираем, а всюду отрицательные заменяем на (-1). Популярный знакопостоянный множитель – квадратный трехчлен ax^2+bx+c с отрицательным дискриминантом – удобно заменять на старший коэффициент или на свободный член, т.е.

$$ax^2+bx+c\leftrightarrow a\leftrightarrow c\ \ (\text{при } D<0). \qquad (2)$$

Функция $y = t^n$ и определяемые ею замены

Поскольку функция $y = t^n$ при $n > 0$ является строго возрастающей на множестве неотрицательных чисел (а при нечетном натуральном n – на всей числовой оси), то в силу утверждения 1 справедливы такие замены:

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^n - t_2^n \text{ при } n > 0,\ t_1 \ge 0,\ t_2 \ge 0, \qquad (3.1)$$

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1} \text{ при } k \text{ натуральном}. \qquad (3.2)$$

Практически задачи конкурсных экзаменов содержат корни только второй или третьей степени, при этом подавляющая часть содержит корни только второй степени, работа с которыми и вызывает у школьников основные трудности. Поэтому и мы основное внимание уделим квадратным корням, полагая, что этого достаточно для безошибочной ориентации в других случаях.

Функции $y = t^2$ и $y = \sqrt{t}$, рассматриваемые на множестве неотрицательных чисел, являются взаимнообратными и строго возрастающими, т.е.

$$t_1 \vee t_2 \Leftrightarrow t_1^2 \vee t_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} \vee \sqrt{t_2}.$$

Поэтому

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^2 - t_1^2, \qquad (3.3)$$

$$\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2, \text{ где } t_1, t_2 \ge 0. \qquad (3.4)$$

Так как $|m| \ge 0$ и $|m|^2 = m^2$ для любого m, то из (3.3) получаем, что

$$|t_1| - |t_2| \leftrightarrow |t_1|^2 - |t_2|^2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2. \qquad (3.5)$$

Пример 1. *Решите неравенство*

$$\frac{\left(|x-2| - 4 - x^2\right)\left(|x+4| - \sqrt{x^2 - x - 2}\right)}{\left(|1-x| - 4\right)\left(|3+x| - |x-5|\right)} > 0.$$

Решение (подробное). Исходное неравенство представимо в виде

$$\frac{u_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_2} > 0.$$

Все множители u_1, u_2, v_1 и v_2 имеют вид $t_1 - t_2$, где $t_1 \ge 0$ и $t_2 \ge 0$, поэтому в силу (3.3) мы эти множители заменяем на знакосовпадающие с ними множители $t_1^2 - t_2^2$:

$$\frac{\left(|x-2|^2 - \left(4+x^2\right)^2\right)\left(|x+4|^2 - \left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2\right)}{\left(|1-x|^2 - 4^2\right)\left(|3+x|^2 - |x-5|^2\right)} > 0.$$

Так как $|m|^2 = m^2$ и $\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2 = x^2 - x - 2$, то с учетом неотрицательности подкоренного выражения $x^2 - x - 2$ получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\left((x-2)^2 - \left(4+x^2\right)^2\right)\left((x+4)^2 - \left(x^2-x-2\right)\right)}{\left((1-x)^2 - 4^2\right)\left((3+x)^2 - (x-5)^2\right)} > 0, \\ x^2 - x - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x-2-\left(4+x^2\right)\right)\left(x-2+\left(4+x^2\right)\right)(9x+18)}{(1-x-4)(1-x+4)(3+x-(x-5))(3+x+x-5)} > 0, \\ x \le -1 \text{ или } x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9\left(-x^2+x-6\right)\left(x^2+x+2\right)(x+2)}{16(-x-3)(5-x)(x-1)} > 0, \\ x \le -1 \text{ или } x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(далее знакопостоянные ($D < 0$) квадратные трехчлены $\left(-x^2+x-6\right)$ и $\left(x^2+x+2\right)$ согласно (2) заменяем на (-1) и (1) соответственно, остальные упрощения очевидны)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(-1)(1)(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} > 0, \\ x \le -1 \text{ или } x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} < 0, \\ x \le -1 \text{ или } x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \text{ ,л, } 1 < x < 5, \\ x \le -1 \text{ ,л, } x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < x < -2, \\ 2 \le x < 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $-3 < x < -2;\ 2 \le x < 5$.

Обратим внимание на две любопытные замены:

$$\sqrt{t} \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} t, \qquad (3.6)$$

$$\sqrt{f} + \sqrt{g} \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} f + g. \qquad (3.7)$$

Замена (3.6) очень удобна там, где приходится отслеживать область допустимых значений. Замена (3.7) суммы $\sqrt{f} + \sqrt{g}$ при возможном одновременном равенстве нулю подкоренных выражений на сумму $f + g$ позволяет учитывать эту возможность.

Пример 2. *Решите неравенство*

$$\left(x^2 + x - 6\right)\sqrt{x^2 - 2x - 3} \ge 0.$$

Решение. Данное неравенство преобразуем следующим образом:

$$\left(x^2 + x - 6\right)\sqrt{x^2 - 2x - 3} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x-6\right)\left(x^2-2x-3\right) \ge 0, \\ x^2 - 2x - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+3)(x-2)(x+1)(x-3) \ge 0, \\ x \le -1 \text{ или } x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3 \\ x = -1 \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$.

Показательная и логарифмическая функции и вызываемые ими замены

Показательная функция $y = a^t$, как известно, строго убывает при $0 < a < 1$ и строго возрастает при $a > 1$. Поэтому, в частности, для $a = 10$ получаем

$$10^{t_1} - 10^{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2.$$

Для произвольного основания a, пользуясь основным логарифмическим тождеством, можно увидеть, что

$$a^{t_1} - a^{t_2} = \left(10^{\lg a}\right)^{t_1} - \left(10^{\lg a}\right)^{t_2} = 10^{t_1 \lg a} - 10^{t_2 \lg a}.$$

Отсюда

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow t_1 \cdot \lg a - t_2 \cdot \lg a,$$

т.е.

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)\lg a. \qquad (4)$$

Функция $y = \lg x$ – строго возрастающая. Поэтому

$$x_1 - x_2 \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} \lg x_1 - \lg x_2.$$

Если $x_1 = a$ и $x_2 = 1$, то получаем, что $a - 1 \leftrightarrow \lg a - \lg 1$, т.е.

$$\lg a \leftrightarrow a - 1. \qquad (5)$$

Тогда соотношение (4) принимает вид

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1). \qquad (5.1)$$

Таким образом, мы установили, что *разность степеней с одним и тем же основанием всегда по знаку совпадает с произведением разности показателей этих степеней на разность основания и единицы.*

Для логарифмической функции $y = \log_a t$ аналогично устанавливаем, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 = \frac{\lg t_1}{\lg a} - \frac{\lg t_2}{\lg a} = \frac{1}{\lg a}(\lg t_1 - \lg t_2).$$

Отсюда следует, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{\lg t_1 - \lg t_2}{\lg a} \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a-1}.$$

Иными словами, *разность логарифмов по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с отношением разности подлогарифмических выражений к разности основания и единицы*:

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a-1}. \qquad (5.2)$$

Замечание. Утверждения (5.1) и (5.2) равносильны, поскольку показательная и логарифмическая функции взаимообратны.

Утверждения (5.1) и (5.2) позволяют исключительно эффективно решать очень многие неравенства, которые принято относить к разряду задач повышенной сложности. В частности, из этих утверждений легко получить следующие полезные схемы решения основных показательных и логарифмических неравенств:

1) $a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases}(f-g)(a-1) > 0,\\ a > 0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}a^f > b,\\ b > 0\end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)(a-1) > 0$;

3) $\log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases}(f-g)(a-1) > 0,\\ f > 0,\\ g > 0,\\ a > 0;\end{cases}$

4) $\log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases}(f-a^b)(a-1) > 0,\\ f > 0,\\ a > 0;\end{cases}$

5) $\log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(fg-1)(a-1) > 0,\\ f > 0,\\ g > 0,\\ a > 0;\end{cases}$

6) $\dfrac{a^{f_1} - a^{f_2}}{a^{g_1} - a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0$

и так далее.

Пример 3. *Решите неравенство*

$$\frac{\left(8-x^3\right)\left(2^x-1\right)}{\left(|x|^{2x-1} - |x|^{5-x}\right)} \times$$
$$\times \frac{\left(\sqrt{x+20} - \sqrt{2x+30}\right)\left(|x-2| - 4 - x^2\right)}{\left(\log_{x+20}(12-|x|) - \log_{x+20}(20-2|x|)\right)\log_5^3 x^2} < 0.$$

Решение (подробное). Первый множитель в числителе $\left(8-x^3\right)$ имеет вид $\left(t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1}\right)$ $(k=2)$, который знакосовпадает с разностью $(t_1 - t_2)$. Поэтому $\left(8-x^3\right)$ заменяем на $(2-x)$.

Множитель $\left(2^x - 1\right)$ имеет вид $a^{t_1} - a^{t_2}$, где $a = 2$, $t_1 = x$, $t_2 = 0$, который знакосовпадает с $(t_1 - t_2)(a-1)$. Поэтому множитель $2^x - 1$ заменяем на x.

Множитель $\left(\sqrt{x+20} - \sqrt{2x+30}\right)$ имеет вид $\left(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}\right)$, который знакосовпадает с $(t_1 - t_2)$. Поэтому его заменяем на $\left((x+20) - (2x+30)\right)$.

Множитель $\left(|x-2| - 4 - x^2\right)$ имеет вид $(t_1 - t_2)$, где $t_1 \geq 0$ и $t_2 = x^2 + 4 \geq 0$. Поэтому $(t_1 - t_2)$ знакосовпадает с $t_1^2 - t_2^2$. И так как $|x-2|^2 = (x-2)^2$, то указанный множитель заменяем на $\left((x-2)^2 - \left(x^2+4\right)^2\right)$.

В знаменателе первый множитель $\left(|x|^{2x-1} - |x|^{5-x}\right)$ имеет вид $a^{t_1} - a^{t_2}$, который знакосовпадает с $(t_1 - t_2)(a-1)$. Поэтому этот множитель знакосовпадает с произведением $\left((2x-1) - (5-x)\right)\left(|x| - 1\right)$. И так как $\left(|x|-1\right)$ знакосовпадает с $\left(|x|^2 - 1\right) = x^2 - 1$, то окончательно получаем, что первый множитель можно заменить на $\left((2x-1) - (5-x)\right)\left(x^2 - 1\right)$.

Второй множитель в знаменателе имеет вид $\log_a t_1 - \log_a t_2$, который знакосовпадает с произведением $(t_1 - t_2)\cdot(a-1)$. Поэтому сначала этот множитель заменяем на

$$\left((12-|x|) - (20-2|x|)\right)(x+20-1) = \left(|x|-8\right)(x+19).$$

И так как $|x| - 8$ знакосовпадает с $x^2 - 8^2$, то второй множитель в знаменателе заменяем на $(x-8)(x+8)(x+19)$.

Последний множитель $\log_5^3 x^2$ имеет вид a^3, который знакосовпадает с a. И так как $a = \log_5 x^2$, имея вид $\log_5 t_1 - \log_5 t_2$ ($t_1 = x^2$, $t_2 = 1$), знакосовпадает с $\left(x^2 - 1\right)$, то последний множитель заменяем на $\left(x^2 - 1\right)$.

Окончательно после всех замен устанавливаем, что исходное неравенство в своей области определения равносильно неравенству

$$\frac{(2-x)\,x\,(-x-10)\left(x-2-\left(x^2+4\right)\right)\left(x-2+x^2+4\right)}{(3x-6)(x-1)(x+1)(x-8)(x+8)(x+19)\left(x^2-1\right)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)\,x\,(-x-10)\left(-x^2+x-6\right)\left(x^2+x+2\right)}{3(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x-8)(x+8)(x+19)} < 0. \qquad (6)$$

Очевидно, что область определения левой части исходного неравенства задается системой

$$\begin{cases}x \neq 0,\\ 20 - 2|x| > 0,\end{cases}$$

т.е. область одновременного существования всех множителей представляет собой два промежутка: $-10 < x < 0$ и $0 < x < 10$. В этой области множители $(-x-10)$ и $(x+19)$ знакопостоянны, и их можно заменить на (-1) и (1) соответственно. Знакопостоянны в области определения и квадратные трехчлены $\left(-x^2+x-6\right)$ и $\left(x^2+x+2\right)$. Поэтому, заменив их на (-1) и (1), устанавливаем, что

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(-1)(x-2)\,x\,(-1)(-1)}{3(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x-8)(x+8)} < 0,\\ -10 < x < 0 \text{ или } 0 < x < 10\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-8 < x < -1\\ -1 < x < 0\\ 8 < x < 10.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-8;-1)\cup(-1;0)\cup(8;10)$.

Демонстрация решений неравенств без обоснований

1. $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(\left(4x^2+2x+1\right)-1\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(2x+1)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-0,5)\cup(1;+\infty).$$

2. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\ge\left(x^2+x+1\right)^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+5}{x+2}-3\right)\left(\left(x^2+x+1\right)-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-2x-1)x(x+1)}{x+2}\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-2;-1]\cup[-0,5;0].$$

3. $1<3^{\left|x^2-x\right|}<9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0<\left|x^2-x\right|<2 \Leftrightarrow \left|x^2-x\right|\left(\left|x^2-x\right|-2\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)^2\left(\left(x^2-x\right)-2\right)\left(x^2-x+2\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x+1)(x-2)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2).$$

4. $\log_{x^2}(3-2x)>1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(3-2x)-x^2}{x^2-1}>0,\\ 3-2x>0,\\ x^2\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}>0,\\ x<\dfrac{3}{2},\\ x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3<x<-1.$$

5. $\log_x\log_2\left(4^x-12\right)\le 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\log_2\left(4^x-12\right)-x\right)(x-1)\le 0,\\ \log_2\left(4^x-12\right)>0,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(4^x-12-2^x\right)(x-1)\le 0,\\ 4^x-12-1>0,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2^{2x}-2^x-12\right)(x-1)\le 0,\\ x>\log_4 13\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2^x+3\right)\left(2^x-4\right)(x-1)\le 0,\\ x>\log_4 13\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2^x-2^2\right)(x-1)\le 0,\\ x>\log_4 13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x-1)\le 0,\\ x>\log_4 13\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 13<x\le 2.$$

6. $\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2^x+3\dfrac{1}{2^x}\right)^{\log_2\frac{x^2}{x+6}}>1,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\log_2\dfrac{x^2}{x+6}\right)\left(2^x+\dfrac{3}{2^x}-1\right)>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^2-(x+6)\right)\left(2^{2x}-2^x+3\right)>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-6>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x+2)>0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

Базовая информация по методу замены множителей

Итак, вкратце изложим основные результаты.

I. *Стандартный вид неравенств*, когда применяется метод замены множителей:

$$\frac{u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_n}{v_1\cdot v_2\cdot\ldots\cdot v_k}\vee 0,$$

где символ «$\vee$» обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: $<$, $\le$, $\ge$, $>$.

II. *Основная идея метода замены множителей* состоит в замене любого множителя в числителе или знаменателе на знакосовпадающий с ним и имеющий одни и те же корни.

Замечание: преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

Предупреждение: указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду.

III. *Две основные замены:*

$$(t_1-t_2)\leftrightarrow\left(f(t_1)-f(t_2)\right),$$

если $f(t)$ – строго возрастающая функция;

$$(t_1-t_2)\leftrightarrow\left(f(t_2)-f(t_1)\right),$$

если $f(t)$ – строго убывающая функция.

IV. *Наиболее часто встречающиеся замены* (без учета области допустимых значений):

1) $|t|\leftrightarrow t^2$; 2) $|t_1|-|t_2|\leftrightarrow t_1^2-t_2^2$;

3) $at^2+bt+c\leftrightarrow a$ при $D=b^2-4ac<0$;

4) $\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}\leftrightarrow t_1-t_2$; 5) $\|t_1\|-\sqrt{t_2}\leftrightarrow t_1^2-t_2$;

6) $|t|-\left(at^2+bt+c\right)\leftrightarrow t^2-\left(at^2+bt+c\right)^2$ при $D=b^2-4ac\le 0$;

7) $a^{t_1}-a^{t_2}\leftrightarrow(t_1-t_2)(a-1)$; 8) $a^t-1\leftrightarrow t(a-1)$;

9) $f-g\leftrightarrow f^2-g^2$ при $f\ge 0$ и $g\ge 0$;

10) $\log_a f\leftrightarrow(f-1)(a-1)$;

11) $\log_a f-g\leftrightarrow\left(f-a^g\right)(a-1)$;

12) $\log_a f-\log_a g\leftrightarrow(f-g)(a-1)$.