Глава 11 Исследование функции

Беседа Развитие понятия функции

История

Ферма
1601 – 1665

Галилей
1564 – 1642

Ньютон
1643 – 1727

Лейбниц
1646 – 1716

Идея функциональной зависимости также восходит к древним источникам, однако явное применение понятия функции нужно отнести к XVII веку. Важнейшей новой идеей, которая возникла в это время, является идея переменных, с которой в математику пришло движение, изменение, процессы, наблюдаемые во времени. Развитие этой идеи связано с великими именами Декарта, Ферма, Галилея, Ньютона и Лейбница. Все эти имена уже появлялись в нашем курсе, и мы еще неоднократно будем обращаться к ним впредь.

Cogito, *ergo sum* –
Мыслю, *следовательно*, *существую*.
Эти великие слова сказал почти четыреста лет назад французский ученый Рене Декарт.

Рене Декарт родился 31 марта 1596 г. в дворянской семье. Он воспитывался и получил образование в колледже, находившемся в ведении католического монашеского ордена иезуитов. В колледже он заинтересовался естествознанием, географией и математикой. Вот что позже писал сам Декарт: «Как только возраст мне позволил … я совершенно оставил изучение наук и решил не искать новой науки, кроме той, которую мог бы обрести в самом себе и в великой книге природы. Я использовал оставшиеся молодые годы на то, чтобы путешествовать, видеть дворы и армии, изучать людей различных характеров…». Желая осуществить мечту о путешествиях, Декарт поступает в голландскую армию и принимает участие в Тридцатилетней войне. Закончив военную службу, он пробыл некоторое время в Париже.

В 1629 г. Декарт переселился в Голландию, где написал важнейшие свои труды. Наряду с выдающимися математическими исследованиями он открыл один из основных законов оптики, сформулировал закон сохранения количества движения, разработал новую гипотезу о происхождении планет, создал теорию кровообращения и сделал значительный вклад в области философии.

Вышедшее в 1637 г. в Лейдене (Голландия) его философское произведение «Рассуждение о методе» содержало основы новой математической науки – аналитической геометрии, базирующейся на методе координат. Этот год по праву считают началом современной математики.

Определение функции

Термин «функция» стал употребляться Лейбницем и его учеником Иоганном Бернулли с 1698 года. Определение функции, данное И. Бернулли, выглядит в переводе так: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной и постоянных».

Некоторое время понятие функции сближалось с понятием формулы. Так Л. Эйлер в 1748 году, уточняя определение Бернулли, пишет: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-то образом из этого количества и чисел».

Замечательный русский математик Н. И. Лобачевский, чье имя мы всегда связываем с открытием «геометрии Лобачевского», «неевклидовой геометрии», незадолго вслед за Эйлером (в районе 1755 года) писал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средства испытывать все числа и выбирать одно из них…».

Мы сейчас пользуемся определением, которое было дано еще в 1837 году немецким математиком Дирихле: «y есть функция переменной x, если каждому значению x соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие – аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами».

Развитие понятия функции не остановилось в XVIII веке, хотя мы, прежде всего, используем определения функции, близкие к приведенному. В конце XIX века сформировалось понятие отображения, развивающее понятие числовой функции. Отображение – закон, по которому каждому элементу x некоторого заданного числового множества X сопоставляется однозначно определенный элемент y другого заданного множества Y (при этом множества X и Y могут совпадать, например, $X = Y = \boldsymbol{R}$). Такое соотношение между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ стали записывать в дальнейшем $y = f(x)$. Говорят, что отображение f действует из X в Y и пишут f: $X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Леонард Эйлер

1707–1783

Леонард Эйлер родился в Швейцарии, но большую часть жизни прожил и проработал в России, женился на русской, опубликовал в России большинство своих трудов, умер и похоронен в Петербурге.

Классический труд Эйлера «Введение в анализ бесконечных» переиздается до сих пор. Именем Эйлера названы десятки теорем, формул и понятий из всех областей математики.

Мы столкнемся с именем Эйлера повсюду – в геометрии (прямые Эйлера в треугольнике, формула Эйлера $e + f = k + 2$, связывающая число вершин, граней и ребер многогранника), теории чисел (функция Эйлера $\varphi(n)$ – число натуральных чисел до n, взаимно простых с n), теории графов (эйлеровы пути – конфигурации, которые можно начертить, не проходя дважды по одному участку), математическом анализе (впечатляющая формула Эйлера $e^{\pi i} = -1$, соединяющая знаменитые числа), в тригонометрии (ему принадлежит большинство современных обозначений в теории тригонометрических функций), комбинаторике – задача Эйлера о 36 офицерах и т. д.

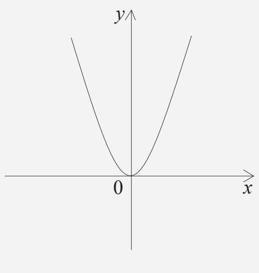
§ 1 Схема исследования функции

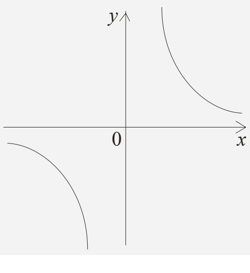
Примеры и комментарии

1. Запишем области определения D некоторых функций.
1) $y = 2x - 1$, $D = \boldsymbol{R}$;
2) $y = \dfrac{1}{x-1}$, D: $x \neq 1$;
3) $y = \sqrt{1-x}$, D: $x \leq 1$;
4) $y = -x^2$, $D = \boldsymbol{R}$.

2. Область определения может задаваться отдельным указанием и отличаться от естественной области определения. Например, может встретиться такая запись: $y = x^2$, $x \geq 0$.

3. Нахождение промежутков знакопостоянства тесно связано с нахождением нулей функции. Часто бывает так, что проходя через нуль, функция меняет знак. Эти случаи изображены на графике. Функции $y = x^2$ и $y = \dfrac{1}{x}$ дают примеры, когда промежутки знакопостоянства не связаны с нулями функции. Первая из них обращается в нуль при $x = 0$, но проходя через эту точку, функция знака не меняет. Вторая меняет знак при переходе через $x = 0$, но в этой точке функция не определена.





1. Исследование функции начинается с явного описания ее *области определения*. Напомним, что если функция задана формулой и нет дополнительных указаний, то ее областью определения считается (по умолчанию) множество всех вещественных чисел, при которых можно выполнить все операции, входящие в формулу, и вычислить ее значение.

2. Полезно сразу найти *нули функции*, т. е. значения аргумента, при которых функция обращается в нуль. Найти нули функции $y = f(x)$ – это то же самое, что решить уравнение $f(x) = 0$.

3. Важным элементом исследования является нахождение промежутков, на которых функция сохраняет постоянный знак – *промежутки знакопостоянства*. Для этого надо решить неравенства $f(x) > 0$, $f(x) < 0$. Ясно, что достаточно решить одно из этих неравенств.
Далее надо обратиться к исследованию того, как меняются значения функции при значениях аргумента, движущихся по области определения «слева направо», т. е. в порядке их возрастания.

4. При таком движении аргумента функция может то убывать, то возрастать. При этом, как правило, всю область определения можно разбить на некоторое количество промежутков, на каждом из которых сохраняется характер изменения функции, или как говорят, ее *монотонность* – на таком промежутке функция или убывает, или возрастает.

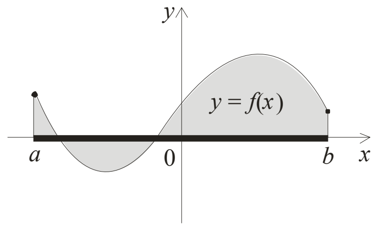
5. Наконец, следует найти *наибольшее и наименьшее значения* функции на всей области определения. Для многих функций они оба или одно из них могут не существовать. Например, ясно, что функция $y = x$ принимает любые значения, среди которых нет ни набольшего, ни наименьшего.

6. Завершается исследование описанием *множества значений* функции, которое тесно связано с нахождением наибольших и наименьших значений.
Сведем пункты исследования функции $y = f(x)$ в одну схему.

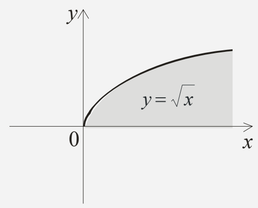
Чтение графика

Примеры и комментарии

1. Область определения на графике – это проекция графика на ось абсцисс.

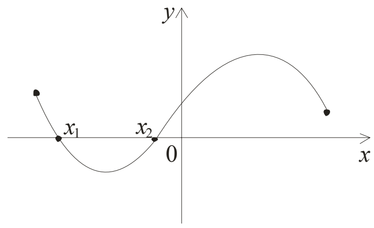


$D(f) = [a; b]$

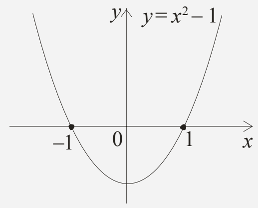


$D: x \geq 0$

2. Нули функции – это точки пересечения ее графика с осью абсцисс.

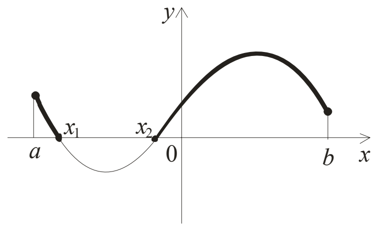


$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1, x = x_2$

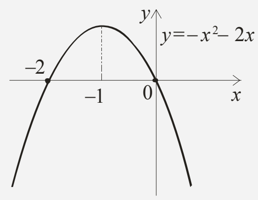


$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

3. Промежутки знакопостоянства – это промежутки на оси x, где $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$.

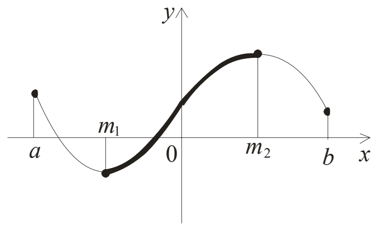


$f(x) > 0$: $[a; x_1)$, $(x_2; b]$
$f(x) < 0$: $(x_1; x_2)$

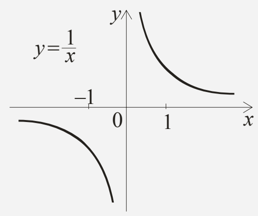


$f(x) > 0$: $-2 < x < 0$
$f(x) < 0$: $x < -2$; $x > 0$

4. Промежутки монотонности – это промежутки на оси x, где $f(x)$ либо убывает (↘), либо возрастает (↗).

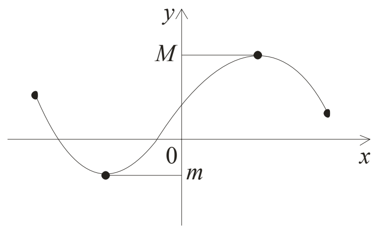


f ↗: $[m_1; m_2]$
f ↘: $[a; m_1]$, $[m_2; b]$

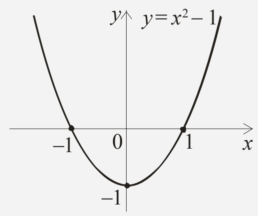


y ↘: $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$

5. Наибольшее и наименьшее значения – для их нахождения надо найти самую высокую и самую низкую точки графика.

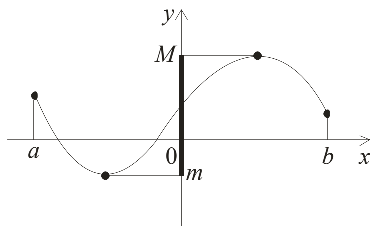


$y = M$ – наибольшее значение,
$y = m$ – наименьшее значение

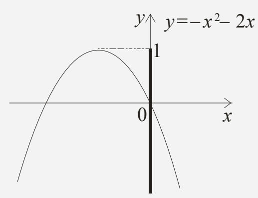


$y = -1$ – наименьшее значение, наибольшего значения нет

6. Множество значений функции – это проекция графика на ось ординат.



Множество значений: $[m; M]$



Множество значений: $y \leq 1$.

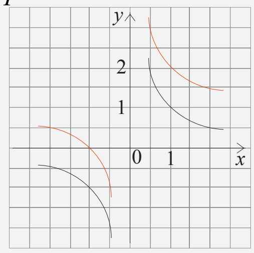
§ 2 Движение графика функции

Примеры и комментарии

Построить графики функций.

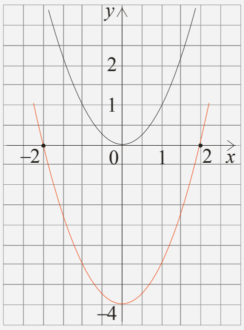
1. $y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

График функции $y = \frac{1}{x}$ сдвигаем на 1 *вверх*.



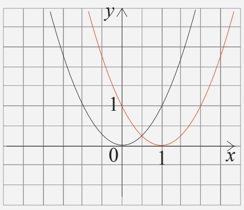
2. $y = x^2 - 4$

График функции $y = x^2$ опускаем *вниз* на 4. Отмечаем нули функции.



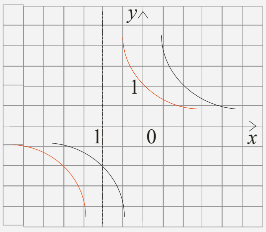
3. $y = (x-1)^2$

График функции $y = x^2$ сдвигаем на 1 *вправо*.



4. $y = \frac{1}{x+1}$

График функции $y = \frac{1}{x}$ сдвигаем на 1 *влево*.

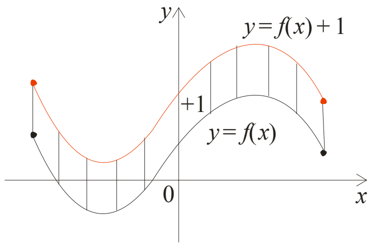


1. Параллельный перенос вдоль оси ординат

Сравним графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x) + 1$.

Пусть точка $P(a; b)$ лежит на графике первой функции, т. е. $b = f(a)$. Тогда точка $P'(a; b + 1)$ лежит на графике второй функции.

Вывод: график функции $y = f(x) + 1$ получается из графика функции $y = f(x)$ подъемом этого графика вверх на 1, т. е. параллельным переносом на 1 вдоль оси ординат.



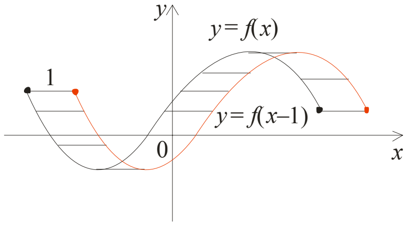
В общем виде график функции $y = f(x) + y_0$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на y_0 вдоль оси ординат. Если $y_0 > 0$, движение графика происходит вверх, если $y_0 < 0$, то вниз.

2. Параллельный перенос вдоль оси абсцисс

Сравним графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x - 1)$.

Пусть $f(a) = b$, т. е. точка $P(a; b)$ лежит на графике первой функции. Чтобы получить для второй функции то же значение b, надо взять $x = a + 1$: $f(a + 1 - 1) = f(a) = b$. Это означает, что точка $P(a; b)$ на графике функции $y = f(x)$ отвечает точке $P'(a + 1; b)$ на графике функции $y = f(x - 1)$.

Вывод: график функции $y = f(x - 1)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на 1, т. е. параллельным переносом на 1 вдоль оси абсцисс.

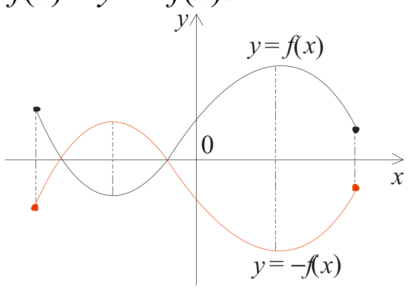


В общем виде график функции $y = f(x - x_0)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на x_0 вдоль оси абсцисс. Если $x_0 > 0$, график движется вправо, если $x_0 < 0$, то влево.

Симметрия

1. Симметрия относительно оси абсцисс

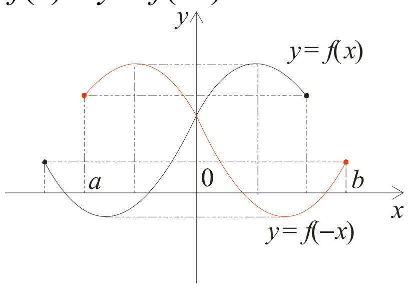
Сравним графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$.



Точка $(a; b)$ первого графика соответствует точке $(a; -b)$ второго. Это означает, что графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс.

2. Симметрия относительно оси ординат

Сравним графики функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$.

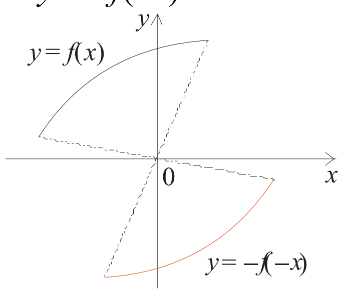


Точка $(a; b)$ первого графика соответствует точке $(-a; b)$ второго. Это означает, что графики функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ симметричны относительно оси ординат.

Обратим внимание на то, что области определения функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ симметричны друг другу и могут оказаться различными. Если первая функция определена на промежутке $[a; b]$, то вторая – на промежутке $[-b; -a]$.

3. Центральная симметрия относительно начала координат

Сравним графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(-x)$.



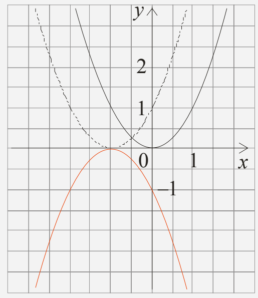
Точке $P(a; b)$ графика первой функции можно сопоставить точку $P(-a; -b)$, которая лежит на графике второй. Это означает, что график функции $y = -f(-x)$ получается из графика $y = f(x)$ симметричным отражением относительно начала координат. Это не является удивительным, так как смена знака у x означает симметрию относительно оси x, а смена знака у y – симметрию относительно оси y. Последовательное выполнение этих двух симметрий и дает центральную симметрию.

Примеры и комментарии

Построить графики функций.

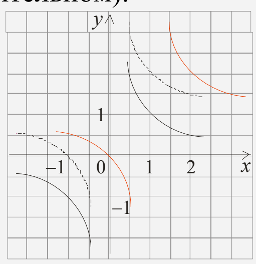
1. $y = -(x + 1)^2$

Строим график функции $y = x^2$, сдвигаем его влево на 1 и отражаем относительно оси абсцисс.



2. $y = \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

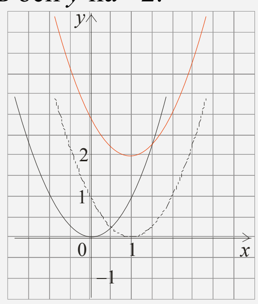
График функции получится из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ двумя параллельными переносами вдоль координатных осей. Сначала можно сдвинуть вдоль оси y на 1 в положительном направлении, а затем вдоль оси x на -1 в отрицательном (т. е. на $+1$ в положительном).



3. $y = x^2 - 2x + 3$

$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$

Для построения графика можно последовательно сделать два параллельных переноса графика функции $y = x^2$: вдоль оси x на $+1$ и вдоль оси y на $+2$.

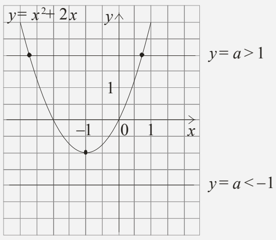


§ 3 Решение уравнений и неравенств по графику

Примеры и комментарии

1. Исследовать корни уравнения $x^2 + 2x - a = 0$ в зависимости от параметра a.

Для решения начертим график функции $y = x^2 + 2x$. Чтобы найти корни уравнения $x^2 + 2x - a = 0$, перепишем его в виде $x^2 + 2x = a$ и проведем прямую $y = a$, параллельную оси абсцисс.



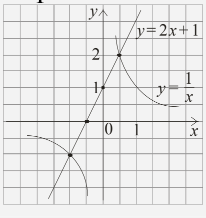
В зависимости от a эта прямая либо совсем не будет пересекать график функции $y = x^2 + 2x$, либо касаться его в одной точке, либо пересекать его в двух точках.

Точку касания найти легко – это вершина параболы $P(-1; -1)$. По графику мы видим, что при $a < -1$ уравнение не имеет корней, при $a = -1$ оно имеет один корень $x = -1$, при $a > -1$ оно имеет два корня.

По графику можно получить дополнительную информацию о корнях уравнения (когда их два, т. е. когда $a > -1$). Например, видно, что пока $a < 0$ оба корня будут отрицательны, а при $a > 0$ они будут разных знаков. Впрочем, для этого простого примера эту информацию можно получить и из теоремы Виета, зная, что произведение корней равно $-a$, а их сумма отрицательна (равна -2).

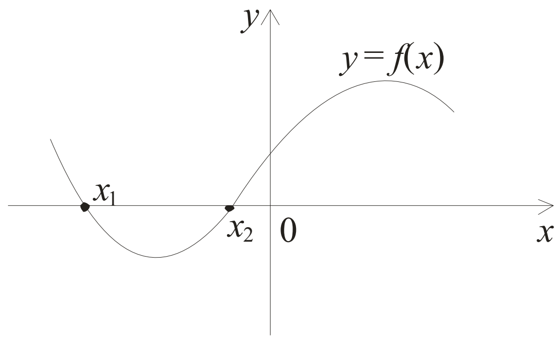
2. Не решая уравнение $\frac{1}{x} = 2x + 1$, найти количество корней.

Строим графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = 2x + 1$.



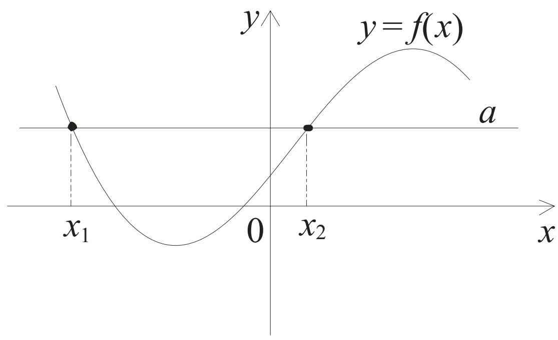
По графику видно, что уравнение имеет два корня.

Корни уравнения $f(x) = 0$ – это нули функции $y = f(x)$.



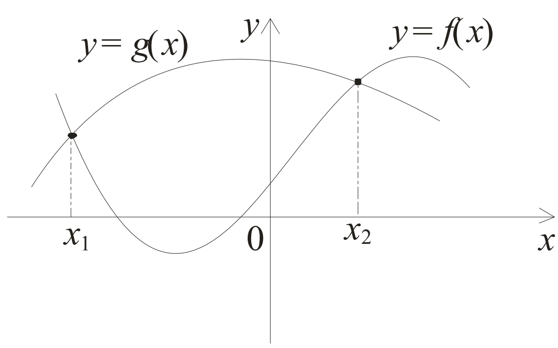
x_1, x_2 – корни уравнения $f(x) = 0$.

Корни уравнения $f(x) = a$ – это абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$.



x_1, x_2 – корни уравнения $f(x) = a$.

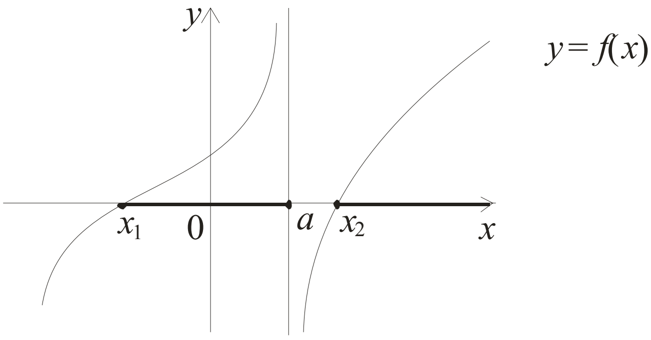
Корни уравнения $f(x) = g(x)$ – это абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.



x_1, x_2 – корни уравнения $f(x) = g(x)$.

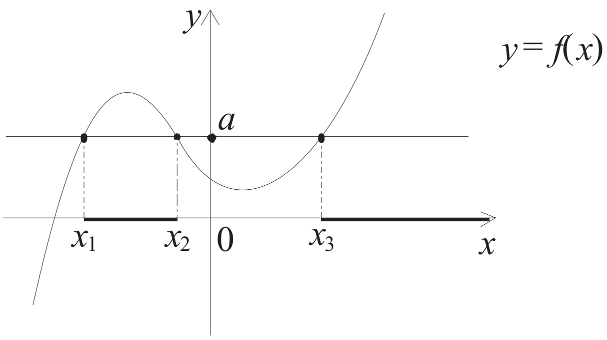
Неравенства

Для того чтобы графически решить неравенство вида $f(x) > 0$, надо найти точки, где функция меняет знак. Прежде всего, это может быть в нулях этой функции, а также в точках, где функция не определена.



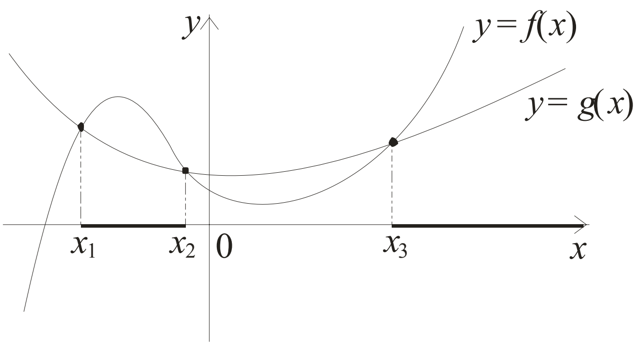
$f(x) > 0$ при $x_1 < x < a$ и $x > x_2$

Для графического решения неравенства вида $f(x) > a$ надо найти точки пересечения графика с прямой $y = a$.



$f(x) > 0$ при $x_1 < x < x_2$ и $x > x_3$

Для графического решения неравенство вида $f(x) > g(x)$ надо найти точки пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

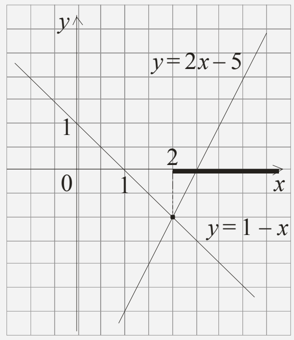


$f(x) > g(x)$ при $x_1 < x < x_2$ и $x > x_3$

Примеры и комментарии

1. Решить графически неравенство $2x - 5 > 1 - x$.

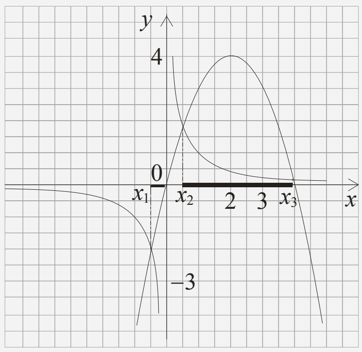
Строим прямые $y = 2x - 5$ и $y = 1 - x$ и находим точку их пересечения: $2x - 5 = 1 - x \Leftrightarrow 3x = 6$, $x = 2$.



Ответ: $x > 2$. Разумеется, этот ответ можно получить и вычислением: $2x - 5 > 1 - x \Leftrightarrow 2x + x > 1 + 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$, однако часто графики построить легче.

2. Решить графически неравенство $4x - x^2 > \dfrac{1}{x}$.

Строим графики функций $y = 4x - x^2$ и $y = \dfrac{1}{x}$.



По графику видно, что кривые пересекаются в трех точках, причем $x_1 \in (-1; 0)$, $x_2 \in (0; 1)$, $x_3 \in (3; 4)$. Надо также учесть точку $x = 0$, где функция $y = \dfrac{1}{x}$ не определена.

Ответ: $x_1 < x < 0$ и $x_2 < x < x_3$.

§ 4 Решение линейных и квадратных неравенств

Примеры и комментарии

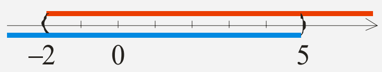
1. Решить неравенство $-2(x+1) \le 5 - x$.

$-2(x+1) \le 5 - x \;\Leftrightarrow\; -2x - 2 \le 5 - x \;\Leftrightarrow x \ge -7$.

Ответ: $x \ge -7$, или $x \in [-7; +\infty)$.

2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x+6>0 \\ 10-2x>0 \end{cases}$.

$3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -2$; $10 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 5$.

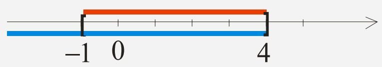


Ответ: $-2 < x < 5$, или $x \in (-2; 5)$.

3. Найти решение неравенства $3x - 4 \le 2x$ на промежутке $[-1; 5]$.

Решаем неравенство $3x - 4 \le 2x \Leftrightarrow x \le 4$.

Наносим решения системы на числовую ось:



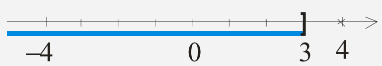
Ответ: $-1 \le x \le 4$, или $x \in [-1; 4]$.

4. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-16}$.

Составляем систему условий:

$\begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x^2-16 \ne 0 \end{cases}$

Наносим условия на числовую ось:



Ответ: $x < -4$ и $-4 < x \le 3$, или $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 3]$.

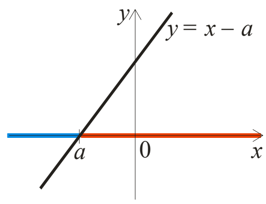
1. Линейные неравенства

Линейное неравенство – это неравенство, которое равносильными преобразованиями может быть приведено к виду $x - a > 0$. Вместо знака $>$ может стоять любой другой знак неравенства $<$, $\ge$ или $\le$. Решение линейного неравенства сводится к вопросу нахождения промежутков, где соответствующая линейная функция сохраняет постоянный знак.

Полезно запомнить, что простейшая линейная функция вида $y = x - a$ отрицательна до своего нуля $x = a$ и положительна после него.

$x - a < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0)$

$x - a > 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$

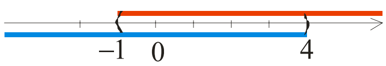


2. Системы линейных неравенств

При решении *систем линейных неравенств* на числовую ось наносят решения каждого из них и затем берут общую часть.

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x+5>2-x \\ x+5>3(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>-3 \\ 2x<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<4 \end{cases}$$



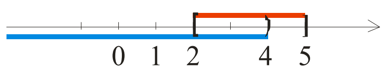
Ответ: $-1 < x < 4$, или $x \in (-1; 4)$.

Нахождение решений линейного неравенства, принадлежащих данному неравенству, сводится к решению системы неравенств.

Пример. Найти решения неравенства $1 - \dfrac{x}{2} > \dfrac{x}{4} - 2$ на промежутке $[2; 5]$.

Решаем неравенство $1 - \dfrac{x}{2} > \dfrac{x}{4} - 2$, наносим на числовую ось промежуток $[2; 5]$ и находим общие точки.

$$1 - \frac{x}{2} > \frac{x}{4} - 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x < 3 \Leftrightarrow x < 4.$$



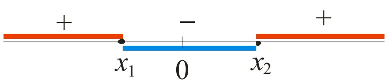
Ответ: $2 \le x < 4$, или $x \in [2; 4)$.

Квадратные неравенства

Квадратное неравенство – это неравенство, которое равносильными преобразованиями может быть приведено к неравенству вида $x^2 + px + q > 0$ (или $<, \geq, \leq$).

Решение квадратного неравенства – это вопрос о нахождении промежутков постоянного знака соответствующей квадратичной функции. В свою очередь это зависит от наличия корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Полезно запомнить, что квадратичная функция вида $y = x^2 + px + q$ отрицательна в интервале между ее корнями, если таковые имеются, и положительна вне его. Если корней нет, то эта функция положительна на всей числовой оси.



$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$$

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

Алгоритм решения квадратного неравенства

1. Преобразованиями привести неравенство к виду $x^2 + px + q > 0$ (или $<, \geq, \leq$).
2. Выяснить, есть ли корни у квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ и если есть, то найти их.
3. Записать ответ.

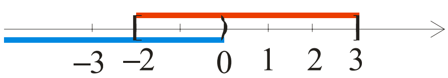
Нахождение решений квадратного неравенства на промежутке сводится к решению системы неравенств.

Пример. Найти отрицательные решения неравенства $6 - x^2 \geq -x$.

Преобразуем неравенство: $6 - x^2 \geq -x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$.

Корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 6$: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Наносим на числовую ось:



Ответ: $-2 \leq x < 0$, или $x \in [-2; 0)$.

Примеры и комментарии

1. Решить неравенство $(1 - x)(2 + x) \leq 2$.

Преобразуем неравенство:

$(1 - x)(2 + x) \leq 2 \Leftrightarrow$
$2 - 2x + x - x^2 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + x \geq 0$.

Наносим корни: $x^2 + x = 0$. $x_1 = -1$; $x_2 = 0$.

Ответ: $x \leq -1$; $x \geq 0$ или $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

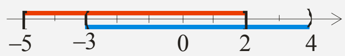
2. Найти решения неравенства $x(x - 1) < 12$ на промежутке $[-5; 2]$.

Преобразуем неравенство:

$x(x - 1) < 12 \Leftrightarrow x^2 - x < 12 \Leftrightarrow$
$x^2 + x - 12 < 0$.

Находим корни: $x^2 - x - 12 = 0$. $x_1 = -3$; $x_2 = 4$.

Наносим на числовую ось:



Ответ: $-3 < x \leq 2$, или $x \in (-3; 2]$.

3. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Записываем систему условий:

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$$

Решаем неравенства:

$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$: $-1 \leq x \leq 1$.

$x^2 - x + 1 > 0$. Трехчлен $x^2 - x + 1$ корней не имеет. $x^2 - x + 1 > 0$ при всех x.

Ответ: $-1 \leq x \leq 1$, или $x \in [-1; 1]$.

§ 5 Решение рациональных неравенств

Примеры и комментарии

Решить неравенство $\dfrac{x^3-4x}{9-x^2}\ge 0$.

1) Начинаем с преобразования левой части:

$$\frac{x^3-4x}{9-x^2}=\frac{x(x^2-4)}{-(x^2-9)}=$$

$$=-\frac{x(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}.$$

Меняем знак у неравенства:

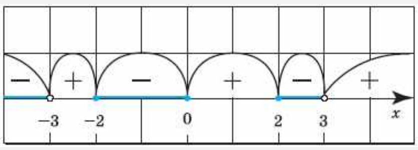
$$\frac{x(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}\le 0$$

Обратите внимание на то, что полезно так изменить знаки, чтобы коэффициенты при x в линейных множителях стали положительными.

2) Наносим корни на числовую ось, *по-разному отмечая корни числителя и знаменателя* (при строгом неравенстве этого можно не делать).

Пять корней разбили ось на шесть промежутков.

3) Отмечаем знаки справа налево.



4) Прежде чем выписывать ответ, заметим, что мы решаем *нестрогое* неравенство, поэтому корни числителя надо включать в ответ, а корни знаменателя нет.

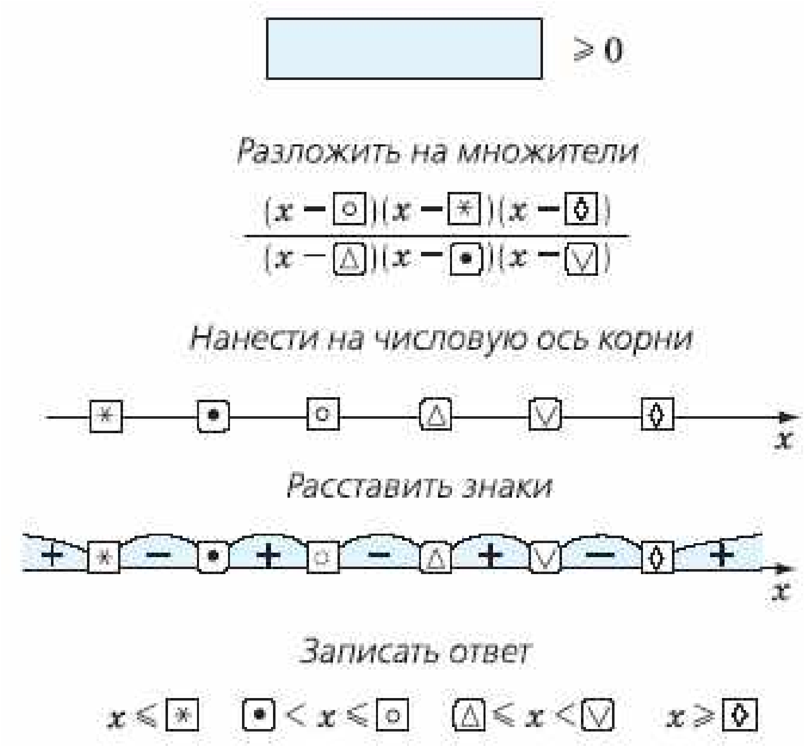
Ответ: $(-\infty;-3)\cup[-2;0]\cup[2;3)$.

Рациональным неравенством называется неравенство вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$, где $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональное выражение (отношение двух многочленов), а вместо знака > может стоять, разумеется, любой другой знак неравенства ($<$, $\ge$, $\le$).

Рациональные неравенства решают *методом интервалов* (промежутков). Этот метод состоит в следующем.

1. Числитель и знаменатель дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ раскладывают на линейные множители.
2. На числовую ось наносят корни всех линейных множителей. Эти точки разбивают числовую ось на интервалы (промежутки), на каждом их которых дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ сохраняет постоянный знак.
3. Определяют знак дроби на каждом из промежутков.
4. Записывают ответ.

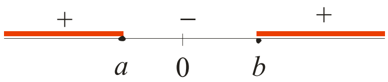
Схема применения метода интервалов



Основные примеры

1. Дробно-линейное неравенство

Так называется неравенство, приводящееся к виду $\frac{x-a}{x-b} > 0$ (или ≥ 0, < 0, ≤ 0). Его решение ничем не отличается от решения квадратного неравенства $(x-a)(x-b) > 0$.



$(a < b)$

Ответ: $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$.

Отличие от квадратного неравенства может состоять в том, что при нестрогом неравенстве $\frac{x-a}{x-b} \geq 0$ точку $x = b$ в знаменателе нельзя включать в множество решений.

Ответ (при $a < b$): $(-\infty; a] \cup (b; +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $\frac{x}{2x+1} \leq 1$.

Не зная знака знаменателя, на него умножать нельзя.

Преобразования: $\frac{x}{2x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2x+1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x-2x-1}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} \geq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

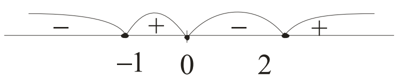
2. Неравенство, в знаменателе которого стоит квадратичная функция

Примеры

1) $\frac{1}{x^2-x-2} < 0$. Это неравенство равносильно квадратному неравенству $x^2 - x - 2 < 0$. Корни: -1; 2.

Ответ: $(-1; 2)$.

2) $\frac{x}{x^2-x-2} > 0$. Разложим знаменатель на множители и применим метод интервалов: $\frac{x}{(x+1)(x-2)} > 0$



Ответ: $(-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

3) $\frac{x+1}{x^2+x+2} \geq 0$. Знаменатель не обращается в нуль. $x^2 + x + 2 > 0$ при всех x. Неравенство равносильно линейному неравенству $x + 1 \geq 0$. Ответ: $[-1; +\infty)$.

Примеры и комментарии

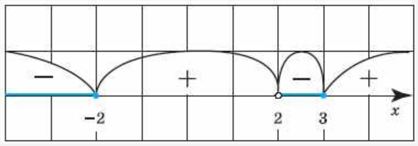
1. Решить неравенство $\frac{x^2-8}{x-2} < 1$.

1) Чтобы привести его к стандартному рациональному неравенству, надо перенести 1 из правой части в левую и преобразовать. Не пытайтесь освободиться от знаменателя!

2) Наносим корни.

$$\frac{x^2-8}{x-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)} < 0.$$

3) Расставляем знаки.



4) Записываем ответ.

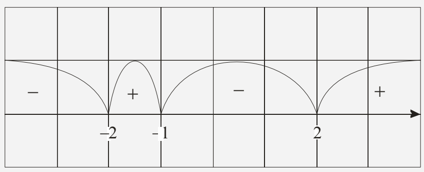
Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$.

2. Решить неравенство $\frac{(x+1)^2}{x^2+x-2} \geq 1$.

1) Перепишем неравенство в виде $\frac{x+2}{(x+1)(x-2)} \geq 0$.

2) Наносим на ось корни числителя и знаменателя -2, -1, 2.

3) Расставляем знаки



4) Записываем ответ:

$[-2, -1) \cup (2, +\infty)$.