Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 декабря 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2011» или «Ф2018». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2011–М2013, М2015(б), М2016, М2018 предлагались на IV этапе, задачи М2014, М2017(а), М2019, М2020 – на V этапе XXXII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2011–М2020, Ф2018–Ф2027

М2011. Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.

М.Мурашкин

М2012. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $B'C'D'$ параллельна плоскости BCD.

А.Бадзян

М2013. При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа $a+b$ и a^n+b^n целые?

В.Сендеров

М2014. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны точки K и L соответственно так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

С.Берлов

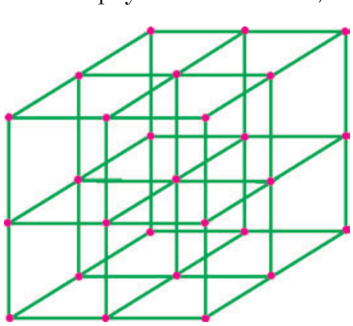


Рис.1

М2015. Можно ли спаять проволочный каркас куба $2\times2\times2$, разбитого на кубики $1\times1\times1$ (рис.1), из восемнадцати деталей конструктора, в котором каждая деталь имеет вид:

а) скобки из трех попарно перпендикулярных спиц длины 1 (рис.2);

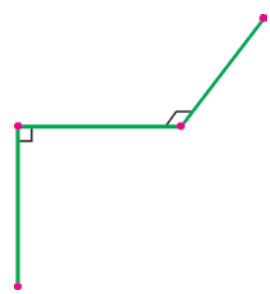


Рис.2

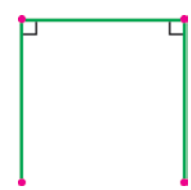


Рис.3

б) скобки из трех спиц длины 1 в виде буквы «П» (рис.3)?

Л.Емельянов

М2016. У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n\geq3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходится ровно 3 ребра, может быть у такого многогранника?

А.Гарбер

М2017. Квадрат 3000×3000 произвольным образом разбит на доминошки (т.е. на прямоугольники 1×2 клетки).

а) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и у каждой доминошки было не более двух соседей ее цвета (доминошки считаются соседними, если они содержат клетки, соседние по стороне).

б) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и ни у какой доминошки не было соседей ее цвета.

А.Пастор

М2018. Докажите, что если натуральное число N представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3.

П.Козлов

М2019. Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L. Отрезок AK пересекает ω второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности ω.

В.Филимонов

М2020*. Известно, что многочлен $(x+1)^n-1$ делится на некоторый многочлен $P(x)=x^k+c_{k-1}x^{k-1}+$ $+c_{k-2}x^{k-2}+\ldots+c_1x+c_0$ четной степени k, у которого все коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ – целые нечетные числа. Докажите, что n делится на $k+1$.

А.Гарбер

Ф2018. Точка движется вдоль оси X, скорость точки пропорциональна квадрату ее координаты. Средняя скорость точки на участке (1 м; 2 м) составила 1 м/с. Найдите среднюю скорость на участках (2 м; 4 м) и (1 м; 4 м).

З.Рафаилов

Ф2019. На тонком и легком жестком стержне длиной L закреплены два тела – массой M посредине стержня и массой $2M$ на одном из его концов. Другой конец стержня закреплен шарнирно. Получившийся маятник раскачивается в вертикальной плоскости, максимальный угол отклонения от вертикали составляет 1°. Найдите период колебаний этого маятника и максимальную разность натяжений половин стержня при движении.

Р.Простов

Ф2020. Крыло аиста имеет поперечную площадь 2 м^2, оно движется вниз с постоянной скоростью 2 м/с в течение интервала времени 0,2 с и столько же времени – вверх. Может ли аист при собственной массе 2 кг лететь на постоянной высоте с грузом массой 3 кг? Для тех, кто не видел аиста: у него ровно два крыла.

А.Птицын

Ф2021. В глубинах космоса, вдали от всех других тел, летает жидкая планета из ртути – огромный однородный шар. Ускорение свободного падения на поверхности планеты составляет 1000 м/с^2. Стальной шарик объемом 1 см^3 находится на расстоянии трети радиуса планеты от ее центра. Найдите полную силу, которая действует на шарик. Плотность ртути 13,6 г/см^3, плотность стали 7,8 г/см^3.

З.Шариков

Ф2022. Порция разреженного гелия находится в сосуде с поршнем. С гелием проводят замкнутый тепловой цикл, который состоит из четырех стадий. На первой стадии газ расширяется вдвое, при этом давление газа все время пропорционально его объему. На второй стадии газ продолжает расширяться – но уже при неизменном давлении, объем газа на этой стадии увеличивается еще в 4 раза. Следующая стадия – давление газа снова пропорционально его объему, газ охлаждается, пока его давление не упадет вдвое. И, наконец, четвертая стадия – охлаждение при неизменном давлении до начального состояния. Найдите термодинамический КПД этого цикла.

Р.Циклов

Ф2023. На горизонтально расположенном непроводящем стержне закреплены два маленьких тела, заряженных положительно (заряды нам неизвестны). Еще одно положительно заряженное тело – маленькая бусинка – может двигаться без трения вдоль стержня. Бусинка совершает малые колебания около положения равновесия. Во сколько раз изменится период таких колебаний, если расстояние между неподвижными зарядами уменьшится вдвое (разумеется, их для этого придется сделать на некоторое время подвижными)?

А.Простов

Ф2024. К обычной сети 220 В, 50 Гц подключены последовательно соединенные конденсатор емкостью 1 мкФ и нагреватель – резистор. Найдите максимальную мощность такого нагревателя. Кстати – зачем там понадобился конденсатор?

А.Зильберман

Ф2025. К «мостику» из конденсаторов (рис.4) подключили батарейку напряжением U_0. Затем ее отключили, а между точками $А$ и $Б$ включили катушку индуктивностью L. Найдите максимальный ток через катушку. Найдите также полный заряд, протекший через катушку, и выделившееся в ней количество теплоты. Сопротивление соединительных проводов очень мало, сопротивление провода, которым намотана катушка, считать небольшим.

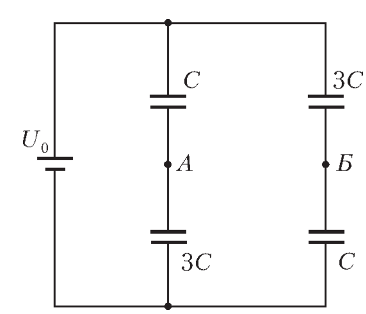


Рис. 4

Р.Старов

Ф2026. Для задержки во времени звуковых сигналов в прежние годы часто использовали массивную пружину, вдоль которой распространялась упругая волна. Итак, длинная однородная пружина лежит на гладком горизонтальном столе. За один конец пружину начинают растягивать, при этом ее длина увеличивается за 1 с на 5 см. Через какое время упругая волна добежит до второго конца пружины? Длина всей пружины 5 м, полная ее масса 2 кг, а жесткость 100 Н/м.

Р.Александров

Ф2027. Дно очень узкого и глубокого колодца квадратного сечения освещают подвешенной на уровне земли маленькой лампочкой, равноудаленной от его стенок. Стенки колодца зеркальные, но покрыты тонким ровным слоем пыли, так что отражается только 98% энергии падающего света. Во сколько раз темнее станет в центре дна колодца, когда пыли со временем станет в 2 раза больше?

Е.Антышев

Решения задач М1991 – М1995, Ф2003 – Ф2012

М1991. *Имеется 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?*

Приведем один из возможных алгоритмов.

Обозначим веса монет a, b, c, d, e, f. Первыми двумя взвешиваниями взвесим $X = a + b$ и $Y = c + d$.

Если $X = Y$, то фальшивая монета e или f. Взвешиваем e. Если $e = X/2$, то f – фальшивая, иначе – фальшивая e.

Если $X > Y$, то e и f настоящие. Взвешиваем $Z = a + c + e$. Если a фальшивая, то должно быть $Z = a + b + c = (a+b) + \frac{c+d}{2} = X + \frac{Y}{2}$; если b фальшивая, то $Z = 3c = \frac{3Y}{2}$; если c фальшивая, то $Z = a + c + d = \frac{a+b}{2} + (c+d) = \frac{X}{2} + Y$; если d фальшивая, то $Z = 3a = \frac{3X}{2}$.

Так как $\frac{3X}{2} > X + \frac{Y}{2} > \frac{X}{2} + Y > \frac{3Y}{2}$, то для Z выполнено ровно одно из равенств $Z = X + \frac{Y}{2}$, $Z = \frac{3Y}{2}$, $Z = \frac{X}{2} + Y$, $Z = \frac{3X}{2}$. По этому равенству однозначно находим фальшивую монету.

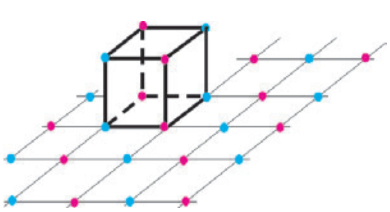
Случай $X < Y$ аналогичен рассмотренному.

М.Малкин

М1992. *На плоскости лежал куб. Его перекатили несколько раз через ребра так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на 90° градусов относительно своего начального положения?*

Ответ: нет.

Раскрасим вершины куба в красный и синий цвета так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. Разобьем плоскость на клетки так, чтобы грань куба была одной из клеток. Затем раскрасим все вершины клеток в шахматном порядке – так, чтобы вершины куба стояли на точках плоскости тех же цветов (см. рисунок). Тогда при любом перекатывании куба вершины его нижней грани



будут совмещаться с точками тех же цветов. Однако если бы верхняя (а значит, и нижняя) грань повернулась на 90°, то красные точки совместились бы с синими – противоречие.

И.Богданов

М1993. *Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, а X – произвольная точка, не лежащая на прямых AH, BH, CH. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1, а прямые AX, BX, CX – в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке (или параллельны).*

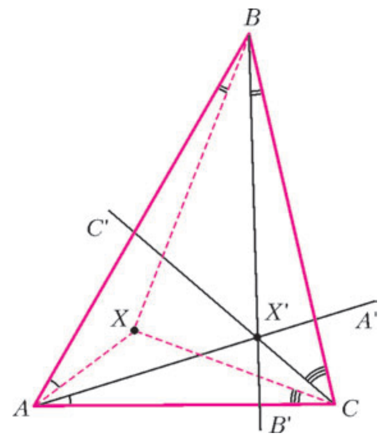


Рис. 1

Воспользуемся следующим фактом: если отразить прямые AX, BX, CX симметрично относительно биссектрис углов A, B, C соответственно, то полученные прямые AA', BB', CC' пересекутся в одной точке X' или будут параллельны (рис.1). (Это следует, например, из теоремы Чевы, записанной в синусах; точки X и X' называются *изогонально сопряженными.*)

Рассмотрим вначале случай, когда точки расположены на окружности в порядке $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ (рис. 2). (Доказательство для любого расположения точек получается, если равенства углов заменить на равенства ориентированных углов, т.е. углов, отсчитываемых от прямой до прямой против часовой стрелки.)

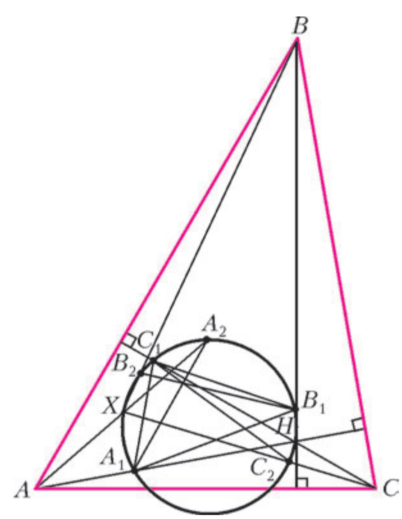


Рис. 2

Из перпендикулярностей $HA_1 \perp BC$ и $HC_1 \perp AB$ и свойства вписанных углов вытекает, что $\angle CBA = \angle A_1HC_1 = \angle A_1B_1C_1$. Аналогично, $\angle BAC = \angle C_1A_1B_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (и противоположно ориентированы).

Поскольку XH – диаметр, то $HB_2 \perp XB_2$; отсюда $\angle B'BA = \angle CBX = \angle A_1HB_2 = \angle A_1B_1B_2$. Полученное равенство углов означает, что при преобразовании подобия, переводящем треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, прямая BB' перейдет в прямую B_1B_2. Аналогичное утверждение справедливо и для прямых