Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 февраля 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1976» или «Ф1983». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1976 и М1977 предлагались на весеннем Турнире городов, а задача М1979 – на 5-м Турнире математических боев памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М1976 – М1980, Ф1983–Ф1987

М1976. Пусть N – любое натуральное число. Докажите, что в десятичной записи либо числа N, либо числа $3N$ найдется одна из цифр 1, 2, 9.

Р.Женодаров

М1977. В первом ряду шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а в последнем ряду – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, передвигая по одному ферзю за ход. Ферзь ходит по вертикали, горизонтали или диагонали на любое число клеток (если на его пути нет других ферзей).

С.Токарев

М1978. Биссектрисы углов BAD и BCD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на диагонали BD. Точка M – середина отрезка BD. Прямая, параллельная AD и проходящая через C, пересекает луч AM в точке P, лежащей вне четырехугольника. Докажите, что $DP = DC$.

В.Шмаров (ученик 9 кл.)

М1979. На прямолинейной дороге стоят несколько светофоров. На каждом светофоре красный свет и зеленый свет горят по равному целому количеству минут (для разных светофоров эти количества могут различаться). Автогонщик в каждый момент либо едет с фиксированной скоростью, либо стоит на красный свет у светофора. Он изучил режим работы светофоров и утверждает, что, выехав в соответствующее время, он может доехать от начала до конца за 30 или 32 минуты, но не может доехать за 31 минуту. Могут ли его слова оказаться правдой? (Если гонщик подъезжает к светофору в момент переключения света, он считает, что свет уже переключился.)

И.Богданов

М1980. Докажите, что любой выпуклый центрально-симметричный многоугольник площади 1 можно поместить в некоторый центрально-симметричный шестиугольник площади $\frac{4}{3}$.

В.Дольников

Ф1983. В системе, изображенной на рисунке 1, все грузы одинаковые, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нити очень легкие и нерастяжимые. В начальный момент грузы удерживают так, что нити натянуты, а при их отпускании движение начинается без рывков. Найдите ускорения блоков. Свободные куски нитей вертикальны.

А.Блоков

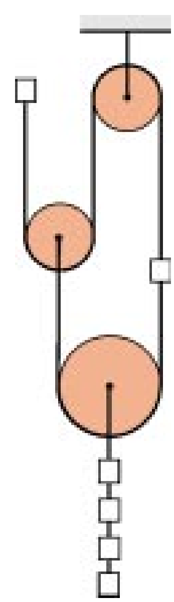


Рис. 1

Ф1984. Моль гелия находится в сосуде объемом 10 л при температуре 300 К. Объем газа увеличивают, при этом теплоемкость его во всем процессе равна $C = 1000$ Дж/К (и остается постоянной!). Оцените изменение температуры газа при его расширении в 20 раз.

Р.Александров

Ф1985. Батарейку напряжением $U = 6$ В с малым внутренним сопротивлением подключают к цепи, изображенной на рисунке 2. Конденсаторы имеют одинаковые емкости $C = 100$ мкФ,

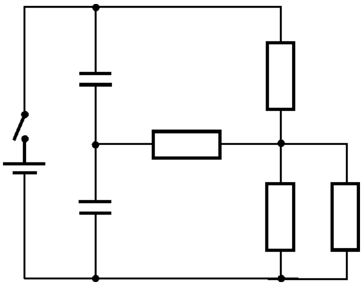


Рис. 2

резисторы также одинаковые, сопротивлением R = 10 кОм каждый. Какой полный заряд протечет через «горизонтальный» резистор? Какое количество теплоты в нем выделится?

А.Зильберман

Ф1986. Катушка содержит $N = 1000$ витков провода и намотана на тороидальный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью. Катушка включена в сеть переменного напряжения U = 36 В последовательно с резистором сопротивлением R = 100 Ом. От части катушки ($n = 250$ витков от одного из концов намотки) сделан отвод, и эта часть катушки замкнута проводником, имеющим очень малое сопротивление. Какой ток течет по этому проводнику? Рассеянием магнитного потока пренебречь. Сопротивление провода, которым намотана катушка, считать малым.

З.Рафаилов

Ф1987. Для уменьшения отражения света от поверхности линзы применяют просветляющий слой из материала с меньшим коэффициентом преломления, чем у стекла линзы. Расчет этого слоя обычно производят для длины волны 0,55 мкм, соответствующей зеленому цвету. Как изменится при этом отражение света для красного и фиолетового краев диапазона видимого света?

А.Светов

Решения задач М1951 – М1960, Ф1968 – Ф1972

М1951. *Имеются два разных расположения одних и тех же ладей на шахматной доске, причем известно, что одно получено из другого после двух ходов каждой ладьи. Всегда ли можно указать третье расположение этих же ладей на этой доске, из которого каждое из двух данных расположений достигается одним ходом каждой ладьи?*

Ответ: нет.

Относительно двух первоначальных расположений одной ладьи можно указать два возможных промежуточных ее положения. Если же брать большее количество пар начальных расположений ладей, то пары их возможных промежуточных положений могут иметь пересечения, и может оказаться, что объединение клеток, составляющих эти пары, содержит меньше элементов, чем всего ладей. Вот возможный пример.

Ладья:	1	2	3	4	5
Ее позиция №1:	b4,	c3,	d2,	b3,	c2
Ее позиция №2:	c5,	d4,	e3,	d5,	e4

Имеются всего четыре клетки b5, c4, d3, e2 для расстановки на них пяти ладей.

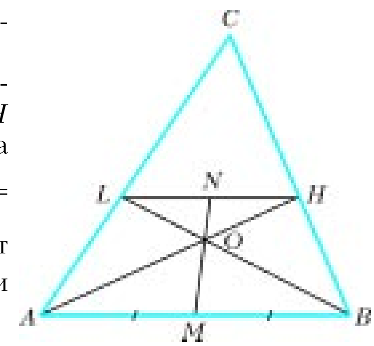
С.Волчёнков

М1952. *Пусть AH – высота, BL – биссектриса, CM – медиана треугольника ABC.*

а) Докажите, что AH, BL и CM пересекаются в одной точке в точности если $LH \parallel AB$.

б) Докажите, что $LH \parallel AB$ *в точности если* $\frac{\sin\angle A}{\cos\angle C} = \operatorname{tg}\angle B$.

а) В этом пункте L и H – произвольные (не обязательно совпадающие с основаниями биссектрисы и высоты) внутренние точки отрезков AC и BC соответственно.



Пусть $LH \parallel AB$, N – точка пересечения MO с LH (см. рисунок). Тогда $\frac{LN}{MB} = \frac{NO}{OM} = \frac{NH}{AM}$, $LN = NH$. Значит, N лежит на медиане CM, откуда и O лежит на CM.

Пусть O лежит на CM. Проведем $LH' \parallel AB$. Так как BL и AH' пересекаются на медиане CM, то $H' = H$. Таким образом, $LH \parallel AB$.

б) Поскольку AH – высота, BL – биссектриса, условие $LH \parallel AB$, или $\frac{BH}{CH} = \frac{AL}{CL}$, можно переписать в виде

$$\frac{c\cos\angle B}{b\cos\angle C} = \frac{c}{a},$$

т.е., поскольку

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B},$$

– в виде

$$\frac{\sin\angle A}{\cos\angle C} = \operatorname{tg}\angle B.$$

А.Полянский, В.Сендеров

М1953. *Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр. Известно, что его можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники* 2×1. *Докажите, что у него есть хотя бы одна сторона четной длины.*

Пусть каждый прямоугольник 2×1 составлен из двух разноцветных клеток – белой и черной. Поскольку многоугольник можно разрезать на такие прямоугольники, то в нем поровну черных и белых клеток. Посчитаем суммарные периметры черных и белых клеток, входящих в многоугольник. Для черных клеток – это та часть периметра, к которой изнутри прилегают черные клетки (будем эту часть называть черными отрезками периметра), и вся сетка, которая лежит внутри многоугольника. Для белых – белые отрезки периметра и вся сетка, которая лежит внутри многоугольника. Тогда белых отрезков периметра столько же, сколько черных. Но если все стороны нечетной длины и граница состоит из одного куска (вот тут и пользуемся тем, что многоугольник без дыр), то все стороны начинаются и заканчиваются отрезком