С полюса – на полюс

А.СТАСЕНКО

– Нет никаких сомнений! – воскликнул Гленарван. – ...мы нашли ключ к решению почти всей загадки, и единственным неизвестным теперь является долгота...

Жюль Верн

Как известно, дети капитана Гранта решили пройти, проплыть, проскакать вокруг Земли вдоль тридцать седьмой параллели южной широты ($\theta = -37°$). А вот был случай, когда Общество по распространению пингвинов (Penguin Distribution Society) распорядилось, наоборот, *вдоль меридиана* доставить партию своих любимых существ с южного полюса на северный «в течение сорока восьми часов» (как полагается при всяком серьезном распоряжении). Конечно, такое требование можно было выполнить только при помощи летательного аппарата. Кстати, требуемая при этом скорость полета v_θ не так уж велика – разделим длину меридиана (или полуокружности Земли) на время, равное двум суткам:

$$v_\theta = \frac{\pi R}{2T} \approx \frac{3{,}14 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{2 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 116 \text{ м/с} \approx 420 \text{ км/ч}.$$

Заметим, что в сказанном выше уже содержится намек на систему координат (рис.1): географическая широта θ отсчитывается от экватора (где $\theta_e = 0$) и достигает на полюсах значений $\theta_N = 90°$ и $\theta_S = -90°$. А индекс « θ » у скорости указывает на то, что эта скорость направлена строго по меридиану, вдоль которого изменяется только угол θ, а долгота φ остается постоянной. Это значит, что нет составляющей скорости, направленной вдоль параллели, т.е. $v_\varphi = 0$. Таким образом, первый самолет все время находится в плоскости, вращающейся вместе с Землей.

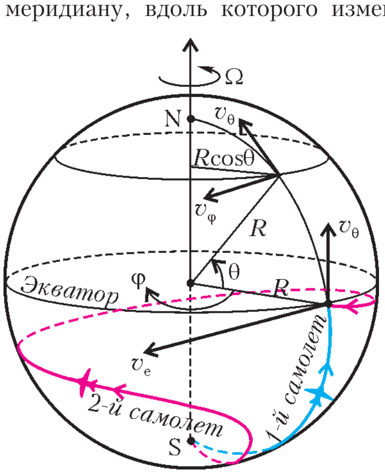

Рис. 1

Но почему «первый»? А дело в том, что потребовалось переместить и вторую партию пингвинов с южного полюса на северный полюс за те же 48 часов, но в плоскости, неподвижной *относительно звезд*, – в качестве контрольного образца: мало ли что думают пингвины о звездах и о Солнце!

Поскольку Земля вращается «с запада на восток», относительно Земли второй самолет должен все время лететь на запад, так что по прибытии на другой полюс угол φ изменится на $2 \cdot 360° = 720°$ (вспомним – за двое суток). Но это значит, что на второй самолет атмосфера (которая вращается вместе с Землей) будет «дуть» все сильнее по мере приближения к экватору, где линейная скорость достигает значения

$$v_\varphi = v_e = \frac{2\pi R}{T} \approx \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 460 \text{ м/с}$$

– в полтора раза больше скорости звука! Тут уж не обойтись без истребителя или сверхзвукового авиалайнера.

Итак, два самолета одновременно отправились с южного полюса на северный вдоль, например, нулевого меридиана, где $\varphi = 0$ (что может быть фундаментальнее нуля!). Взглянув на карту или глобус, можно сразу предсказать, границы каких стран пересечет первый самолет. А вот штурману второго самолета придется подумать о предстоящей траектории полета, чтобы сообщить об этом заранее наземным диспетчерам (во избежание международных конфликтов). Подумаем и мы.

Если меридиональная скорость самолета v_θ постоянна, то широта его местонахождения пропорциональна времени (рис. 2,*а*):

$$\theta = -90° + \frac{v_\theta t}{R} = 90°\left(\frac{2t}{t_N} - 1\right), \qquad (*)$$

где $t_N = 2$ суток – время прибытия на северный полюс. Можно убедиться, что при $t = 0$ имеем $\theta_S = -90°$, а при

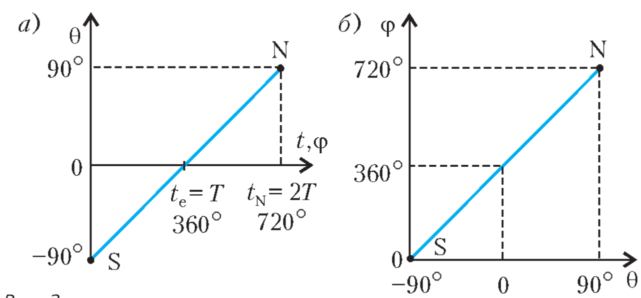

Рис. 2

$t = t_N$ получаем $\theta_N = +90°$. Естественно, что через сутки оба самолета должны одновременно пересечь экватор ($\theta_e = 0$) в одной и той же точке (тут важно не столкнуться), но под разными углами: первый под углом $90°$, а второй под углом $\operatorname{arctg}\frac{v_\theta}{v_e} = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = 14°$. Так что если стартовать с южного полюса вдоль нулевого меридиана, то указанное событие произойдет над Гвинейским заливом (см. карту или глобус). И при этом скорость второго самолета относительно Земли будет равна

$$\sqrt{v_e^2 + v_\theta^2} = v_e\sqrt{1 + \left(\frac{v_\theta}{v_e}\right)^2} = v_e\sqrt{1 + \frac{1}{16}}.$$

А для любого значения широты, как легко показать, скорость второго самолета равна

$$v = v_\theta\sqrt{1 + 16\cos^2\theta} = v_e\sqrt{\cos^2\theta + \frac{1}{16}}.$$

Но чтобы найти траекторию полета, нужно связать долготу с широтой, т.е. установить зависимость $\theta(\varphi)$, или, как говорят ученые, «исключить время» в формуле ($*$). В данном случае это очень просто: Земля вращается с постоянной угловой скоростью Ω, значит, угол φ должен быть пропорционален времени:

$$\varphi = \Omega t = \frac{2\pi}{T}t.$$

Найдем отсюда t и подставим в формулу ($*$):

$$\theta = 90°\left(\frac{2T}{t_N}\frac{\varphi}{2\pi} - 1\right) = 90°\left(\frac{\varphi}{360°} - 1\right) = \frac{\varphi}{4} - 90°.$$

(Продолжение см. на с.34)

(Начало см. на с.31)

Мы учли здесь, что полное время полета равно двум суткам, т.е. $t_N = 2T$, а $2\pi = 180°$. А можно, наоборот, φ выразить через θ (рис.2,*б*) – кому что нравится:

$$\varphi = 360° + 4\theta .$$

Осталось взять карту или глобус, нанести на них (карандашом, на всякий случай) траектории обоих самолетов и срочно сообщить в соответствующие диспетчерские службы о своих намерениях – не только о координатах θ и φ, но и о времени пролета t над их странами (из формулы ($*$)).

Таким образом, траектория второго самолета в системе координат, связанной с Землей, похожа на «спираль, навитую на сферу». Любопытно, что в прямоугольной картографической проекции Меркатора (об этом замечательном ученом рассказывалось в «Кванте» №6 за 2006 г.) эта прямая пропорциональность между широтой и долготой давала бы прямую линию, что очень удобно для навигации.

И тут штурман второго самолета подумал: интересно, над какими странами мы пролетели бы, если бы (в нарушение инструкции) все время держали постоянную скорость полета относительно Земли? Но решение этой задачи он предоставил бортовому компьютеру, а мы – читателю.

От простого – к сложному

В.ЭПШТЕЙН

Вниманию читателей предлагаются две, казалось бы стандартные, задачи к теме «Идеальный газ». В задачах используются обычные элементы «конструктора»: вертикальная трубка, запаянная с одной стороны; столбик жидкости, отделяющий воздух в трубке от окружающей среды; открытый сосуд с жидкостью. Предлагается исследовать поведение такого «конструктора» при нагревании. И выясняется, что при определенных условиях ситуация выходит за рамки стандартной и наблюдается качественное изменение характера физического процесса.

Задача 1. *В вертикальной трубке, запаянной сверху (рис.1), столбик ртути высотой h отделяет область трубки высотой H, заполненную воздухом, от окружающей среды при температуре T_0. Внешнее давление составляет H_0 мм рт.ст. Определите смещение столбика ртути x при повышении температуры до T.*

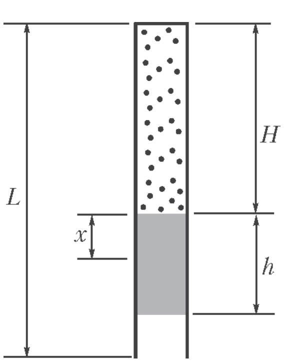

Рис. 1

Введем безразмерные координату и температуру:

$$\xi = \frac{x}{H} \text{ и } \tau = \frac{T}{T_0} .$$

Рассмотрим два случая.

а) Если $H + h < L$, то при изменении температуры давление внутри трубки не меняется. По уравнению изобарического процесса,

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T} ,$$

или, поскольку сечение трубки постоянно,

$$\frac{H}{T_0} = \frac{H + x}{T} .$$

В безразмерных переменных это уравнение примет вид

$$\tau = 1 + \xi , \text{ где } -1 < \xi < 0 .$$

б) Если $H + h = L$, то часть ртути при повышении температуры выливается из трубки, и давление там изменяется. Из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{V_0 p_0}{T_0} = \frac{Vp}{T} , \text{ или } \frac{H\left(H_0 - h\right)}{T_0} = \frac{\left(H + x\right)\left(H_0 - \left(h - x\right)\right)}{T} .$$

В безразмерном виде это выглядит так:

$$\tau = \frac{1}{\xi_0}\left(1 + \xi\right)\left(\xi_0 + \xi\right) , \text{ где } \xi_0 = \frac{H_0 - h}{H} .$$

Поскольку в состоянии равновесия $h < H_0$, то $\xi_0 > 0$.

На графике на рисунке 2 представлены результаты расчетов. В случае б) (давление в трубке меняется) зависимость $\tau(\xi)$ – квадратичная функция, график которой –

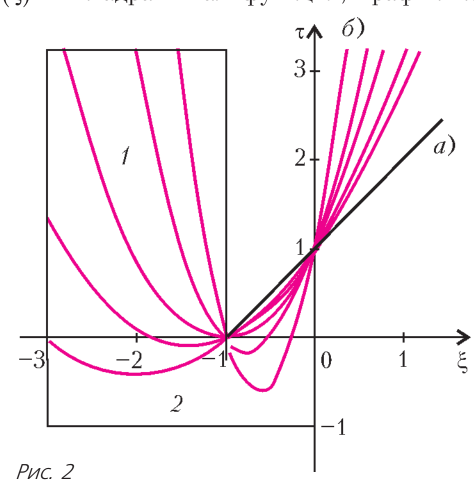

Рис. 2

парабола, пересекающая ось безразмерных координат в точках $\xi = -\xi_0$ и $\xi = -1$. При этом можно выделить две группы парабол, отвечающих условиям $\xi_0 > 1$ и $\xi_0 < 1$.

Значениям $\xi < 0$ соответствует повышение уровня ртути при понижении температуры газа в трубке. Для этого необходим контакт ртути в трубке с ртутью в сосуде с открытой поверхностью (рис.3).

Из графиков видно, что при $\xi_0 < 1$ изобарическая (случай а)) и неизобарическая (случай б)) зависимости различаются существенно. Между тем, качественное различие ситуаций, связанное с возможностью неоднозначной зависимости положения поверхности ртути от температуры, не наблюдается. Область неоднозначности (*1* и *2*) находится вне области допустимых значений безразмерных параметров ($\tau > 0$, $\xi > -1$).

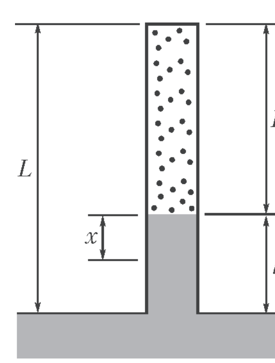

Рис. 3