Вписанные и описанные многоугольники

И.СМИРНОВА, В.СМИРНОВ

Тема «Вписанные и описанные многоугольники» является одной из основных в курсе геометрии 7–9 классов. Однако ее изучение ограничивается вписанными и описанными треугольниками и правильными многоугольниками.

В новых стандартах по математике профильного уровня обучения в курсе геометрии 10–11 классов предусматривается изучение вписанных и описанных четырехугольников, в частности – необходимых и достаточных условий вписанности и описанности, теоремы Птолемея и др.

Здесь мы предлагаем материал о вписанных и описанных многоугольниках, предназначенный для углубленного изучения геометрии, подготовки к различным турнирам, конкурсам и олимпиадам по математике.

Вписанные четырехугольники

Начнем с рассмотрения некоторых свойств вписанных четырехугольников. В отличие от треугольников, не около каждого четырехугольника можно описать окружность. Нетрудно доказать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.*

Действительно, например, углы A и C вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ (рис.1) опираются на дуги, в сумме составляющие всю окружность. Поскольку вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, сумма углов A и C равна $180°$.

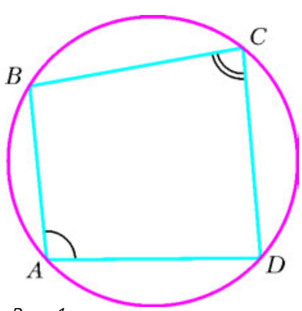


Рис. 1

Верно и обратное утверждение, а именно:

Теорема 2. *Если сумма противоположных углов четырехугольника равна $180°$, то около него можно описать окружность.*

В самом деле, пусть $ABCD$ – четырехугольник, у которого $\angle A + \angle C = 180°$. Заметим, что геометрическое место точек C, из которых отрезок BD виден под углом $180° - \angle A$, представляет собой дугу окружности, стягиваемую хордой BD. Так как по условию $\angle A + \angle C = 180°$, то точка C должна принадлежать данной окружности.

Таким образом, справедлива такая теорема.

Теорема 3. *Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна $180°$.*

Упражнения

1. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е) прямоугольной трапеции?

2. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого последовательно равны: а) $70°$, $130°$, $110°$, $50°$; б) $90°$, $90°$, $60°$, $120°$; в) $45°$, $75°$, $135°$, $105°$; г) $40°$, $125°$, $55°$, $140°$?

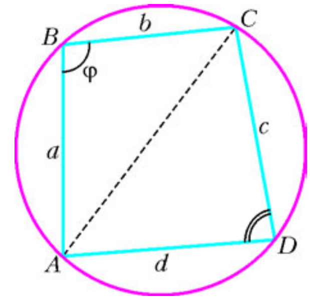


Рис. 2

Выясним, каким условиям должны удовлетворять стороны четырехугольника, вписанного в окружность.

Пусть четырехугольник $ABCD$ со сторонами a, b, c, d вписан в окружность (рис.2). По теореме косинусов,

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi =$$

$$= c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - \varphi) = c^2 + d^2 + 2cd\cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

и, следовательно, должно выполняться неравенство

$$\left|\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right| \le 1.$$

Верно и обратное: если для сторон четырехугольника выполняется указанное неравенство, то мы можем определить угол φ, положив

$$\varphi = \arccos\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left|a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right| \le 2(ab + cd)$$

и, значит, системе неравенств

$$-2(ab + cd) \le a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \le 2(ab + cd).$$

Сделаем несколько равносильных преобразований этой системы:

$$\begin{cases}(c-d)^2 \le (a+b)^2, \\ (a-b)^2 \le (c+d)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|c-d| \le a+b, \\ |a-b| \le c+d\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a-b \le c-d \le a+b, \\ -c-d \le a-b \le c+d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a \le b+c+d, \\ b \le a+c+d, \\ c \le a+b+d, \\ d \le a+b+c.\end{cases}$$

Легко видеть, что последняя система неравенств справедлива для любого четырехугольника со сторонами a, b, c, d.

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Для произвольного четырехугольника $ABCD$ существует четырехугольник $A'B'C'D'$ с такими же сторонами, около которого можно описать окружность.*

Упражнения

3. Существует ли четырехугольник со сторонами 1, 2, 3, 4, около которого можно описать окружность?

4. Можно ли описать окружность около четырехугольника со сторонами 1, 2, 3, 4 и одной диагональю 4?

Теорема Птолемея для четырехугольника, вписанного в окружность, утверждает, что произведение его диагоналей

(Продолжение см. на с. 34)

Египетские дроби

Дроби вида $\frac{1}{n}$, где n – натуральное число, часто называют *египетскими*. Другие названия таких дробей: *основные*, *аликвотные* (от латинского *aliquot* – несколько). Древнеегипетские вычислители почему-то питали особое пристрастие к дробям, в числителе которых стоит единица. В Британском музее хранится папирус, составленный писцом Ахмесом примерно за 1600–1700 лет до нашей эры. Одна из задач этого папируса – разделить 7 хлебов между 8 людьми – решается в характерном для всей египетской математики стиле: каждому проголодавшемуся нужно дать сумму $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ долей одного хлеба, выраженных аликвотными дробями. В другой задаче предлагается найти такое натуральное n, что $\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{n}$. Когда эту задачу предложили шестиклассникам на Московской олимпиаде в 1997 году, то справились с ней далеко не все – видимо, упорство не каждого современного школьника может сравниться с установкой на преодоление трудностей древнего египтянина.

В большинстве случаев для представления некоторой правильной дроби в виде суммы различных египетских дробей достаточно уметь раскладывать в такую сумму всякую дробь вида $\frac{2}{n}$. Например, зная разложения

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30},\ \frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75},\ \frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150},$$

дробь $\frac{7}{25}$ можно легко представить суммой различных египетских дробей:

$$\frac{7}{25}=\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{4}{25}=\frac{1}{25}+\frac{1}{15}+\frac{1}{75}+\frac{2}{15}+\frac{2}{75}=$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{30}+\frac{1}{50}+\frac{1}{75}+\frac{1}{150}.$$

Папирус Ахмеса предваряет таблица, в которой все дроби вида $\frac{2}{n}$ для нечетных n от 3 до 101 представлены суммами египетских дробей. Эта таблица помогала производить сложные арифметические выкладки согласно принятым канонам. По-видимому, писцы заучивали ее наизусть, так же, как сейчас школьники запоминают таблицу умножения.

Разложение произвольной дроби в сумму аликвотных дробей не единственно. Например,

$$\frac{3}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{75}=\frac{1}{10}+\frac{1}{50}.$$

Египтяне стремились использовать разложения с небольшим количеством слагаемых и по возможности с наименьшими знаменателями. Какими именно способами они при этом пользовались, мы не знаем. В настоящее время доказано, что всякое положительное рациональное число можно выразить суммой различных египетских дробей, а также предложено для этих целей несколько практических алгоритмов (вообще говоря, эти алгоритмы иногда дают различные разложения).

Алгоритм Фибоначчи (1180–1240) разложения рационального числа $r=\frac{m}{n}$, $0<r<1$, в сумму различных египетских дробей основан на последовательном приближении. Выберем a_1 так, чтобы дробь $\frac{1}{a_1}$ оказалась наибольшей из дробей, приближающих r снизу: $\frac{1}{a_1}\le r<\frac{1}{a_1-1}$. Тогда остаток $r_1=r-\frac{1}{a_1}=\frac{ma_1-n}{na_1}=\frac{m_1}{n_1}$ удовлетворяет неравенствам $0\le r_1<\frac{1}{a_1(a_1-1)}$, $0<$ $<ma_1-n=m_1<m$.

Следующее число a_2 выбираем так, чтобы дробь $\frac{1}{a_2}$ наилучшим образом приближала снизу остаток r_1: $\frac{1}{a_2}\le r_1<\frac{1}{a_2-1}$, так что $a_2\ge a_1^2-a_1+1$.

Далее полагаем $r_2=r_1-\frac{1}{a_2}=\frac{m_1a_2-n_1}{n_1a_2}=\frac{m_2}{n_2}$, тогда $0<m_1a_2-n_1=m_2<m_1$. Затем по r_2 определяем a_3 и т.д. Так как последовательность числителей m_i убывает, то при некотором $i=k<m$ получим $r_k=\frac{1}{n_k}=\frac{1}{a_k}$. В итоге окончательное разложение примет вид $r=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{a_k}$, при этом числа a_i удовлетворяют неравенствам $a_{i+1}\ge a_i^2-a_i+1$, $a_i\ge 2$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Алгоритм, предложенный М.В. Остроградским (1801–1862), родственен алгоритму Фибоначчи и аналогично позволяет получить разложение $r=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1b_2}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{b_1b_2\ldots b_k}$, где b_i – натуральные числа, $b_{i+1}\ge b_i$, $b_i\ge 2$.

Имеются и другие алгоритмы.

Среди любопытных находок укажем способ разложения единицы в сумму различных египетских дробей, предложенный Н.Ю.Нецветаевым в 1985 году:

$$1=\frac{1}{f_1f_3}+\frac{1}{f_2f_4}+\ldots+\frac{1}{f_nf_{n+2}}+\frac{1}{f_{n+1}f_{n+2}},$$

где f_i – числа Фибоначчи: $f_1=f_2=1$, $f_{i+1}=f_i+f_{i-1}$.

В 1915 году американский математик О. Келлог опубликовал задачу: какие n египетских дробей (дроби могут повторяться), взятые в сумме, дают наилучшее приближение к 1 снизу? Например, при $n = 3$ наилучшее приближение дает сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$. В 1922 году эта задача была решена американским математиком Кертисом. Оказалось, что в общем случае наилучшее приближение дает сумма n первых членов ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\ldots$ Знаменатель каждого члена этого ряда, начиная со второго, на 1 больше произведения знаменателей всех предыдущих членов. Последовательность чисел в знаменателях носит название последовательности Сильвестра (1814–1897) и может быть также задана рекуррентной зависимостью $a_1 = 2$, $a_{i+1} = a_i^2 - a_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots$

Знаете ли вы, что...

• Для любого натурального $k \geq 3$ единицу можно представить в виде суммы k различных египетских дробей.

• Для любого нечетного $k \geq 9$ единицу можно представить в виде суммы k различных египетских дробей с нечетными знаменателями. Например, в случае $k = 9$ годится разложение

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395}.$$

• Единицу нельзя представить в виде суммы четного количества различных египетских дробей с нечетными знаменателями.

• Дробь $\frac{1}{n}$ при простом n представима суммой двух египетских дробей двумя способами, а при составном n – более чем двумя способами.

• Дробь $\frac{2}{n}$ при простом n представима в виде суммы двух различных египетских дробей только одним способом.

• Представление числа $\frac{3}{n}$, где n не делится на 3, в виде суммы двух египетских дробей возможно в том и только в том случае, когда n имеет делитель вида $3k+2$.

• Дробь $\frac{4}{n}$ при нечетном n представима в виде суммы двух египетских дробей тогда и только тогда, когда $n = m(4k-1)$, m, k – натуральные.

• Любую дробь $\frac{4}{n}$ можно представить суммой трех египетских дробей (П.Эрдёш, 1913–1996).

• В случае $m < n^2$ (m, n – натуральные) существует разложение рационального числа $\frac{m}{n}$ в сумму различных египетских дробей, в которой не более $2^m - 1$ слагаемых.

• Если $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ – каноническое разложение натурального числа n на простые множители $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то количество способов, с помощью которых можно разложить число $\frac{1}{n}$ в сумму двух не обязательно различных египетских дробей, равно $\frac{1}{2}\left((2a_1+1)(2a_2+1)\ldots\right.$ $\left.\ldots(2a_k+1)\right)$.

• Любое рациональное число можно лишь конечным числом способов представить в виде суммы заданного количества египетских дробей (В.Серпинский, 1882–1969). Другими словами, при каждом s уравнение $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=1$ может иметь лишь конечное количество решений в множестве натуральных чисел.

• Для любого натурального n на числовом интервале $(0; 1)$ существует рациональное число, не представимое в виде суммы различных египетских дробей с не более чем n слагаемыми.

• Всякую дробь $\frac{m}{n} < 1$ (m, n – натуральные) можно разложить в сумму различных египетских дробей со знаменателями, не превосходящими n^2.

• Любое число, не меньшее $\frac{2}{3}$, нельзя представить в виде конечной суммы различных дробей, обратных квадратам натуральных чисел.

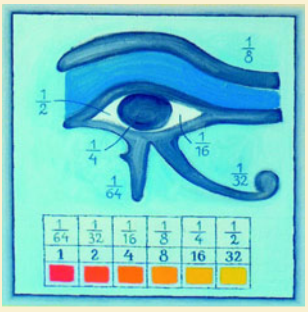
• Любое положительное рациональное число, меньшее $\frac{\pi^2}{6} - 1$, можно представить в виде конечной суммы различных дробей, обратных квадратам натуральных чисел (П.Эрдёш).

• Дробь $\frac{1}{2}$ равна сумме всех дробей вида $\frac{1}{pq}$, где $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$, p и q взаимно просты.

• Любое натуральное число n является суммой всех дробей вида $\frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_k}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

• Из любой арифметической прогрессии натуральных чисел можно выбрать несколько различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1$.

Глаз и Солнце



«Для древних характерно переплетение образа Солнца и глаза. В египетской мифологии часто упоминается бог Гор, олицетворяющий крылатое Солнце и являющийся одним из самых распространненых сакральных символов. В битве с врагами Солнца, воплощенными в образе Сета, Гор сначала терпит поражение. Сет вырывает у него Глаз – чудесное око – и разрывает его в клочья. Тот – бог учения, разума и правосудия – снова сложил части глаза в одно целое, создав «здоровый глаз Гора». Изображения частей разрубленного Ока использовались при письме в Древнем Египте для обозначения математических дробей» – из книги М.Г.Томилина, С.К.Стафеева «Пять тысячелетий оптики: предыстория».

Материал подготовил А.Жуков

В оформлении использована картина А.Ф.Панкина, «Глаз и Солнце»

(Начало см. на с. 31)

равно сумме произведений противоположных сторон. Мы докажем более сильную теорему.

Теорема 5. *Произведение диагоналей произвольного четырехугольника меньше или равно сумме произведений его противоположных сторон, причем равенство достигается только в случае четырехугольника, вписанного в окружность.*

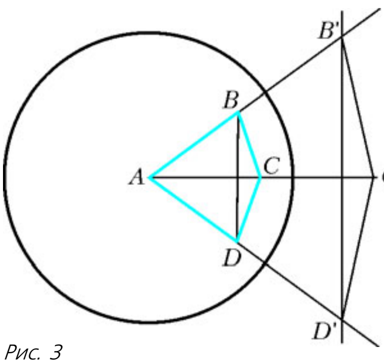


Рис. 3

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Воспользуемся инверсией с центром в точке A и радиусом R (рис.3). Напомним, что при инверсии точкам X, отличным от A, сопоставляются точки X' на луче AX, для которых $AX \cdot AX' = R^2$. При этом окружности, не проходящие через точку A, переходят в окружности, а окружности, проходящие через точку A, за исключением самой точки A, переходят в прямые.

Пусть точки B, C и D переходят в точки B', C' и D' соответственно. Тогда треугольники ABC и $AB'C'$, ADC и $AD'C'$, ABD и $AB'D'$ подобны и, следовательно, имеют место равенства

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AC'}, \quad \frac{CD}{AD} = \frac{C'D'}{AC'}.$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$\frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AD} = \frac{B'C' + C'D'}{AC'} \geq$$

$$\geq \frac{B'D'}{AC'} = \frac{B'D'}{BD} \cdot \frac{BD}{AC'} = \frac{AB'}{AD} \cdot \frac{BD}{AC'} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BD}{AD}.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD.$$

При этом равенство достигается только тогда, когда точки B', C', D' принадлежат одной прямой. Это выполняется только в случае, если точки B, C, D принадлежат окружности, проходящей через точку A.

Вписанные пятиугольники

Рассмотрим теперь пятиугольники, вписанные в окружность. Начнем с задачи.

Задача 1. *Можно ли описать окружность около пятиугольника с углами 8°°, 9°°, 1°°°, 13°°, 14°° ?*

Для ее решения установим соотношения между углами вписанного пятиугольника (рис.4). Заметим, что углы A и C опираются на дуги, в сумме составляющие всю окружность плюс дугу DE. Из этого вытекает следующая теорема.

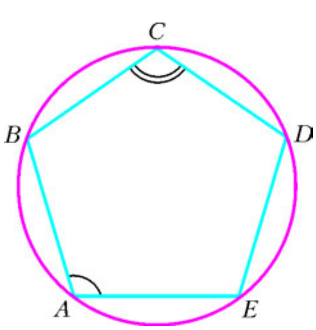


Рис. 4

Теорема 6. *Сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше $180°$.*

Указанные в задаче 1 углы не удовлетворяют этому условию, и, значит, около такого пятиугольника нельзя описать окружность.

Естественный вопрос, который возникает после этого: является ли полученное условие достаточным, чтобы около пятиугольника можно было описать окружность? Ответ на этот вопрос отрицательный.

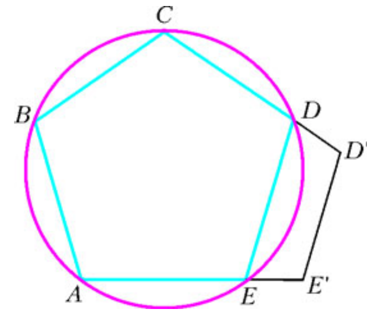


Рис. 5

Пример такого пятиугольника легко построить. Возьмем какой-нибудь вписанный пятиугольник $ABCDE$ (рис.5) и, продолжив две его стороны, построим пятиугольник $ABCD'E'$ так, чтобы сторона $D'E'$ была параллельна DE. Тогда углы этого пятиугольника будут равны углам исходного, но около него нельзя описать окружность.

Поставим другой вопрос, связанный с достаточным условием вписанности пятиугольника. Пусть $ABCDE$ – пятиугольник, сумма любых двух несмежных углов которого больше $180°$. Существует ли пятиугольник $A'B'C'D'E'$ с такими же углами, около которого можно описать окружность?

Прежде чем ответить на этот вопрос, решим такую задачу.

Задача 2. *По данным углам вписанного пятиугольника $ABCDE$ найдите углы между его диагоналями, выходящими из одной вершины.*

Ответ: $\angle CAD = \angle B + \angle E - 180°$ (рис. 6). Аналогичным образом выражаются и другие углы.

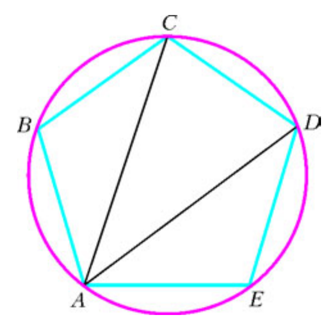


Рис. 6

Вернемся теперь к поставленному вопросу. Для ответа на него рассмотрим какую-нибудь окружность и разделим ее на дуги, равные удвоенным углам между диагоналями исходного пятиугольника, выходящими из одной вершины. Концы этих дуг будут вершинами искомого пятиугольника, вписанного в окружность.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Для произвольного пятиугольника $ABCDE$, суммы любых двух несмежных углов которого больше $180°$, существует пятиугольник $A'B'C'D'E'$ с такими же углами, около которого можно описать окружность.*

Задача 3. *По радиусу окружности и углам вписанного в нее пятиугольника $ABCDE$ найдите стороны этого пятиугольника.*

Ответ: $AB = 2R\sin\angle ADB = -2R\sin(\angle C + \angle E)$. Аналогичным образом выражаются другие стороны пятиугольника.

Решение задачи 3 показывает, что для пятиугольника, вписанного в окружность, имеет место теорема, аналогичная теореме синусов для треугольника. А именно:

Теорема 8. *Для пятиугольника $ABCDE$, вписанного в окружность радиуса R, имеют место равенства*

$$\frac{AB}{\sin(\angle C + \angle E)} = \ldots = \frac{AE}{\sin(\angle B + \angle D)} = -2R. \qquad (1)$$

Оказывается, верно и обратное утверждение:

Теорема 9. *Если для пятиугольника $ABCDE$ выполняются равенства (1), то около него можно описать окружность радиуса R.*

Для доказательства рассмотрим окружность радиуса R и отложим на ней дуги, равные удвоенным величинам

$\angle B + \angle E - 180°, \ldots$ Концы этих дуг будут вершинами многоугольника, равного исходному.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, можно ли описать окружность около пятиугольника с данными сторонами.

Теорема 10. *Для произвольного пятиугольника ABCDE существует пятиугольник $A'B'C'D'E'$ с такими же сторонами, около которого можно описать окружность.*

Доказательство. Пусть стороны пятиугольника равны a, b, c, d, e, где e – его наибольшая сторона. Если при $R = \frac{e}{2}$ выполняется равенство

$$\arcsin\frac{a}{2R} + \ldots + \arcsin\frac{e}{2R} = 180°,$$

то, откладывая на окружности радиуса R дуги величин

$$2\arcsin\frac{a}{2R}, \ldots, 2\arcsin\frac{e}{2R},$$

получим, что концы этих дуг являются вершинами искомого пятиугольника.

Предположим, что при $R = \frac{e}{2}$ выполняется неравенство

$$\arcsin\frac{a}{2R} + \ldots + \arcsin\frac{e}{2R} > 180°.$$

Тогда при увеличении R левая часть уменьшается и стремится к нулю. Поэтому найдется R, при котором будет выполняться равенство

$$\arcsin\frac{a}{2R} + \ldots + \arcsin\frac{e}{2R} = 180°,$$

и, значит, существует искомый пятиугольник.

Предположим, что при $R = \frac{e}{2}$ выполняется неравенство

$$\arcsin\frac{a}{2R} + \ldots + \arcsin\frac{e}{2R} < 180°,$$

или, что то же самое, неравенство

$$\arcsin\frac{a}{e} + \ldots + \arcsin\frac{d}{e} < 90°.$$

Докажем, что найдется R, для которого будет выполняться равенство

$$\arcsin\frac{a}{2R} + \ldots + \arcsin\frac{d}{2R} = \arcsin\frac{e}{2R}.$$

Для окружности радиуса $R = \frac{e}{2}$ отложим хорды $A'B' = a$, $B'C' = b$, $C'D' = c$, $D'E' = d$. Тогда будет выполняться неравенство $A'E' < e$. При стремлении радиуса окружности к $+\infty$ хорда $A'E'$ будет стремиться к $a + b + c + d$. Поскольку $e < a + b + c + d$, то найдется R, при котором будет выполняться требуемое равенство. Соответствующий пятиугольник $A'B'C'D'E'$ будет искомым пятиугольником, вписанным в окружность.

Упражнение 5. Можно ли описать окружность около пятиугольника со сторонами 1, 2, 3, 4, 5? Точнее: существует ли пятиугольник со сторонами 1, 2, 3, 4, 5, около которого можно описать окружность?

Вписанные многоугольники с бо́льшим числом сторон

Ситуация с вписанными в окружность семиугольниками, девятиугольниками и так далее аналогична рассмотренной ситуации с пятиугольниками. В частности, имеют место следующие теоремы.

Теорема 11. *Сумма любых трех несмежных углов вписанного семиугольника больше $36^{\circ\circ}$.*

Теорема 12. *Для произвольного семиугольника ABCDEFG, суммы любых трех несмежных углов которого больше $36^{\circ\circ}$, существует семиугольник $A'B'C'D'E'F'G'$ с такими же углами, около которого можно описать окружность.*

Теорема 13. *Для семиугольника ABCDEFG, вписанного в окружность радиуса R, имеют место равенства*

$$\frac{AB}{\sin(\angle C + \angle E + \angle G)} = \ldots = \frac{AE}{\sin(\angle B + \angle D + \angle F)} = 2R. \quad (2)$$

Теорема 14. *Если для семиугольника ABCDEFG выполняются равенства (2), то около него можно описать окружность радиуса R.*

Теорема 15. *Для произвольного семиугольника ABCDEFG существует семиугольник $A'B'C'D'E'F'G'$ с такими же сторонами, около которого можно описать окружность.*

Для вписанных многоугольников с четным числом сторон ситуация аналогична ситуации с вписанным четырехугольником. В частности, для вписанного шестиугольника справедливы такие теоремы.

Теорема 16. *Сумма трех несмежных углов вписанного шестиугольника равна $360°$.*

Теорема 17. *Если сумма трех несмежных углов выпуклого шестиугольника равна $360°$, то существует шестиугольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.*

Заметим, что, в отличие от вписанного пятиугольника, углы вписанного шестиугольника и радиус описанной окружности определяют стороны шестиугольника неоднозначно. Действительно, рассмотрим какой-нибудь вписанный шестиугольник $ABCDEF$ (рис.7). Повернем треугольник BDF вокруг центра окружности на некоторый угол. Получим треугольник $B'D'F'$. Шестиугольник $AB'CD'EF'$ вписанный и имеет те же углы, что и данный шестиугольник.

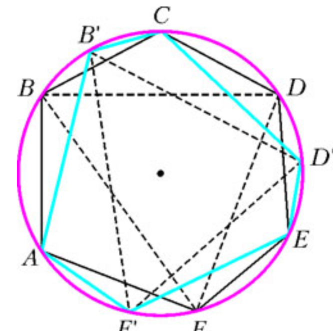


Рис. 7

Описанные многоугольники

Перейдем теперь к рассмотрению описанных многоугольников. Ситуация здесь в некотором смысле двойственная по отношению к вписанным многоугольникам. При этом стороны описанного многоугольника двойственны углам вписанного многоугольника. Так, например, если для вписанности четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных углов, то для описанности выпуклого четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных сторон. А именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема 18. *Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны.*

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, A', B', C', D' – точки касания (рис.8). Тогда $AA' = AD'$,

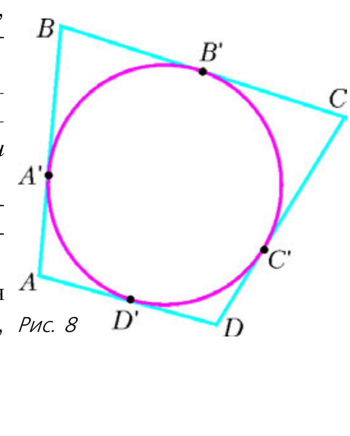


Рис. 8

$BA' = BB'$, $DC' = DD'$, $CC' = CB'$. Складывая почленно эти равенства, получим равенство $AB + CD = AD + BC$, означающее, что суммы противоположных сторон вписанного четырехугольника равны.

Теорема 19. *Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.*

Доказательство. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеет место равенство $AB + CD = BC + AD$. Рассмотрим окружность, касающуюся сторон углов A и D (рис.9). Центром этой окружности является точка пересечения биссектрис углов A и D. Предположим, что эта окружность не касается стороны BC. Проведем касательную $B'C'$, для которой угол B' равен углу B. Тогда четырехугольник $AB'C'D$ будет описан около окружности и, следовательно, для него будет выполняться равенство $AB' + C'D = AD + B'C'$. С другой стороны, по условию выполняется равенство $AB + CD = AD + BC$. Вычитая из первого равенства второе, получим $BB' + CC' = B'C' - BC$, или $B'C' = BB' + BC + CC'$. Последнее равенство не может выполняться для точек, не лежащих на одной прямой, значит, неверным было наше предположение о том, что окружность не касается стороны BC.

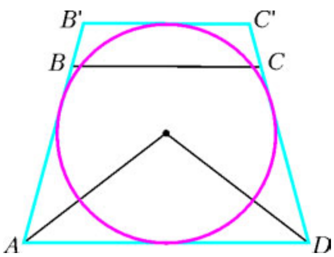


Рис. 9

Самостоятельно подумайте, где в доказательстве использовалась выпуклость четырехугольника. Приведите пример невыпуклого четырехугольника, у которого суммы противоположных сторон равны и в который нельзя вписать окружность.

Упражнения

6. Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) квадрат; д) дельтоид (рис.10)?

7. Можно ли вписать окружность в четырехугольник со сторонами 1, 2, 3, 4?

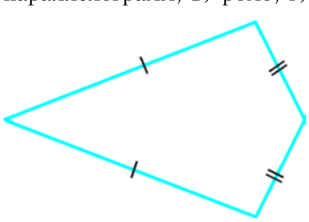


Рис. 10

Выясним, каким условиям должны удовлетворять углы четырехугольника, чтобы в него можно было вписать окружность.

Конечно, описанный четырехугольник должен быть выпуклым. Это равносильно тому, что углы четырехугольника меньше $180°$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 20. *Для произвольного выпуклого четырехугольника ABCD существует четырехугольник $A'B'C'D'$ с такими же углами, в который можно вписать окружность.*

Действительно, зафиксируем R и рассмотрим восемь прямоугольных треугольников с катетом R и противолежащими острыми угломи $A/2$, $A/2$, $B/2$, $B/2$, $C/2$, $C/2$, $D/2$, $D/2$. Складывая эти треугольники, получим четырехугольник $A'B'C'D'$, в который можно вписать окружность и углы которого равны углам исходного четырехугольника (рис.11).

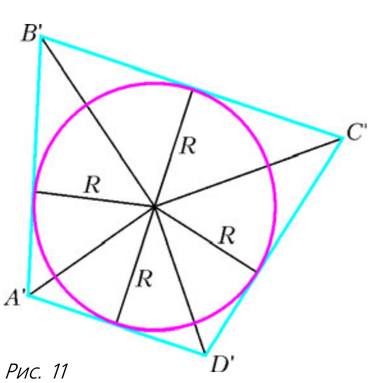


Рис. 11

Упражнение 8. Можно ли вписать окружность в четырехугольник с углами 70°, 80°, 100°, 110°?

Следующие упражнения и теоремы, двойственные соответствующим задачам и теоремам для вписанных пятиугольников, предлагаем для самостоятельного решения и доказательства.

Упражнение 9. Можно ли вписать окружность в пятиугольник со сторонами 1, 2, 1, 2, 1?

Теорема 21. *Сумма любых двух несмежных сторон описанного пятиугольника меньше суммы трех оставшихся сторон.*

Теорема 22. *Для произвольного пятиугольника ABCDE, сумма любых двух несмежных сторон которого меньше суммы оставшихся сторон, существует пятиугольник $A'B'C'D'E'$ с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.*

Теорема 23. *Для пятиугольника ABCDE, описанного около окружности радиуса R, имеют место равенства*

$$\frac{a+c+d-b-e}{\operatorname{ctg}\frac{\angle A}{2}} = \ldots = \frac{b+c+e-a-d}{\operatorname{ctg}\frac{\angle E}{2}} = 2R. \qquad (3)$$

Теорема 24. *Если для пятиугольника ABCDE выполняются равенства (3), то в него можно вписать окружность радиуса R.*

Теорема 25. *Для произвольного выпуклого пятиугольника существует пятиугольник с такими же углами, в который можно вписать окружность.*

Упражнение 10. Можно ли вписать окружность в пятиугольник с углами 80°, 100°, 110°, 120°, 130°?

Общие теоремы о вписанных и описанных многоугольниках

Сформулируем теперь общие теоремы о вписанных и описанных многоугольниках. Их доказательства повторяют доказательства рассмотренных выше частных случаев.

Теорема I. *Сумма любых n несмежных углов вписанного $(2n+1)$-угольника больше $180°(n-1)$.*

Теорема II. *Если сумма любых n несмежных углов $(2n+1)$-угольника больше $180°(n-1)$, то существует $(2n+1)$-угольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.*

Теорема III. *Сумма n несмежных углов вписанного 2n-угольника равна $180°(n-1)$.*

Теорема IV. *Если сумма n несмежных углов 2n-угольника равна $180°(n-1)$, то существует 2n-угольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.*

Теорема V. *Сумма любых n несмежных сторон описанного $(2n+1)$-угольника меньше суммы его остальных сторон.*

Теорема VI. *Если сумма любых n несмежных сторон $(2n+1)$-угольника меньше суммы его остальных сторон, то существует $(2n+1)$-угольник с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.*

Теорема VII. *Сумма n несмежных сторон описанного 2n-угольника равна сумме его остальных сторон.*

Теорема VIII. *Если сумма n несмежных сторон 2n-угольника равна сумме его остальных сторон, то существует 2n-угольник с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.*