

Значит, площадь боковой поверхности имеет наибольшее значение

$$S_{\max} = 4R^2 \text{ при } \gamma = 45^\circ.$$

**Задача 5.** Каковы должны быть размеры открытого бассейна с прямоугольным дном, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала?

Если указано, что дно бассейна имеет форму квадрата, задача легко решается с помощью производной, а в таком более общем виде ее можно решить, применив теорему о среднем.

**Решение.** Пусть  $x, y, z$  – длина, ширина и высота бассейна, тогда площадь дна и стен бассейна равна

$$S = xy + 2xz + 2yz,$$

а объем составляет

$$V = xyz.$$

Применим неравенство между средними трех положительных чисел  $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$  и получим

$$S \geq 3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2}, \text{ или } S \geq 3\sqrt[3]{4V^2},$$

при этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$xy = 2xz = 2yz, \text{ или } x = y, x = 2z.$$

Итак, дно бассейна должно иметь форму квадрата, высота же должна быть вдвое меньше его длины.

### Упражнения

Следующие задачи решите, используя элементарные приемы: неравенства, тригонометрические функции. Некоторые задачи полезно решить также с помощью производной и сравнить результаты.

1. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной диаго-

налью найдите тот, который имеет наибольшую площадь полной поверхности.

2. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю найдите тот, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

3. В правильную четырехугольную пирамиду впишите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема так, чтобы одна грань параллелепипеда лежала в плоскости основания пирамиды, а вершины противоположной грани принадлежали боковым ребрам.

4. В данный конус впишите цилиндр наибольшего объема.

5. В сферу радиуса  $R$  вписана правильная шестиугольная пирамида. Какова должна быть высота пирамиды, чтобы объем ее был наибольшим?

6. Около шара радиуса  $R$  описан конус. При какой высоте конуса его объем будет наименьшим? Докажите, что

$$V \geq 2V_1,$$

где  $V$  – объем конуса,  $V_1$  – объем шара.

7. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно  $b$  и составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . При каком значении  $\alpha$  объем пирамиды будет наибольшим? Чему равен этот объем?

8. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны  $x$ , а все остальные имеют длину, равную 1. Выразите объем тетраэдра как функцию  $x$ . При каком значении  $x$  объем тетраэдра имеет наибольшее значение?

9. Длина одного бокового ребра четырехугольной пирамиды равна  $x$ , все остальные ребра имеют длину, равную 1. Выразите объем пирамиды как функцию  $x$ . При каком значении  $x$  объем пирамиды принимает наибольшее значение?

10. Из точка  $A$ , расположенной вне плоскости, проведены к ней перпендикуляр  $AO$  и наклонные  $AB$  и  $AC$ . Известно, что  $BO = 1$ ,  $CO = 2\sqrt{2}$  и  $\angle BOC = 45^\circ$ . Найдите расстояние  $AO$ , при котором  $\angle BAC = 45^\circ$ . Какое наибольшее значение может принимать этот угол?

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Зависимость периода колебаний маятника от амплитуды

И. ГОРБАТЫЙ

В О ДВОРЕ ВВЕРХ КОЛЕСАМИ, ОПИРАЯСЬ НА СЕДЛО И РУЛЬ, стоял велосипед. Мальчик закончил ремонт колеса и теперь с сосредоточенным видом следил за его медленным вращением. Взгляд мальчика был прикован к ниппелю – неболь-

шому отростку для подсоединения насоса. Вот ниппель поднялся вверх, перевалил через верхнюю точку и начал опускаться, ускоряя вращение колеса. Но через некоторое время на очередной оборот энергии уже не хватило, колесо на мгновение остановилось, немного не дотавив ниппель до верхней точки, и стало поворачиваться в противоположную сторону, постепенно набирая скорость. Вращение колеса сменилось его колебаниями. «Когда колебания прекратятся, ниппель вниз должен быть», – подумал мальчик, – «или я плохо почистил и смазал втулку».

Известно, что любое твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, является маятником (точнее – физическим маятником). Простейший маятник – это груз малых размеров, закрепленный на длинной легкой нити (или стержне). Если можно пренебречь массой нити по сравнению с массой груза, размерами груза по сравнению с длиной нити, а также деформацией нити, то такой маятник называют математическим. При *малых* углах  $\alpha$  отклонения маятника от положения равновесия его колебания являются гармоническими, т.е. описываются формулой

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где  $\alpha_m$  – максимальный угол отклонения от положения равновесия (угловая амплитуда),  $\varphi_0$  – начальная фаза

колебаний,  $\omega = \sqrt{g/l}$  – циклическая частота,  $l$  – длина нити,  $g$  – ускорение свободного падения. Период малых колебаний математического маятника, равный

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2)$$

не зависит от амплитуды колебаний  $\alpha_m$ . Такое свойство колебаний – независимость периода от амплитуды – называют изохронностью колебаний.

Возникает вопрос: насколько малой должна быть амплитуда колебаний маятника, чтобы его колебания можно было считать изохронными? Например, угол  $30^\circ$  можно считать малым? А угол  $15^\circ$ ? Применительно к математическому маятнику можно спросить и иначе: при каких амплитудах можно пользоваться формулой (2) для расчета периода колебаний?

Ответы на эти вопросы, конечно, зависят от того, какую точность мы имеем в виду при определении периода. Так, если нас устраивает погрешность в 2%, то колебания маятника можно считать изохронными, а формулу (2) справедливой при больших угловых амплитудах, чем, скажем, при погрешности в 0,1%.

Ясно, что для ответа на поставленные вопросы необходимо исследовать зависимость периода колебаний маятника от амплитуды при произвольных, не обязательно малых, ее значениях. Начнем с простого эксперимента, а затем проведем теоретические расчеты.

**Эксперимент.** Зависимость  $T$  от  $\alpha_m$  желательно определить как можно в большем диапазоне изменений угловых амплитуд, а затухание колебаний в эксперименте должно быть достаточно малым: во всяком случае за один период колебаний амплитуда не должна заметно уменьшаться. Для этих целей в качестве маятника действительно удобно взять обычное велосипедное колесо. Хороший подшипник обеспечивает малое затухание колебаний, колебания происходят довольно медленно, а их амплитуду можно менять в широких пределах, вплоть до  $180^\circ$ . По спицам удобно отсчитывать углы отклонения от положения равновесия (на колесе моего велосипеда, например, имеется 36 спиц – отличный транспортир с ценой деления в  $10^\circ$ ).

Колесо совершает колебания, если его центр тяжести несколько смещен относительно оси вращения. Обычно это происходит за счет не совсем точной центровки колеса, а также из-за наличия ниппеля. Но можно дополнительно сместить центр тяжести колеса, утяжелив обод в некотором месте. Для этого мы прикрепили скотчем к ободу колеса груз небольших размеров массой около одного килограмма. При этом возросла сила, возвращающая колесо к положению равновесия (точнее, момент силы), и период колебаний уменьшился. Одновременно уменьшилось и затухание колебаний (поскольку возросла инерционность колеса). Мы поняли, что имеет смысл прикрепить еще один груз почти такой же массы, как и первый, в диаметрально противоположном месте обода (рис. 1). Затухание еще больше уменьшилось, а период колебаний увеличился, что было удобно для измерений.

Рис.1. Велосипедное колесо – физический маятник

Видно, что период колебаний монотонно увеличивается с ростом угловой амплитуды. При малых амплитудах эта зависимость выражена слабо: так, при увеличении амплитуды от предельно малых углов до  $\alpha_m = 60^\circ$  период колебаний

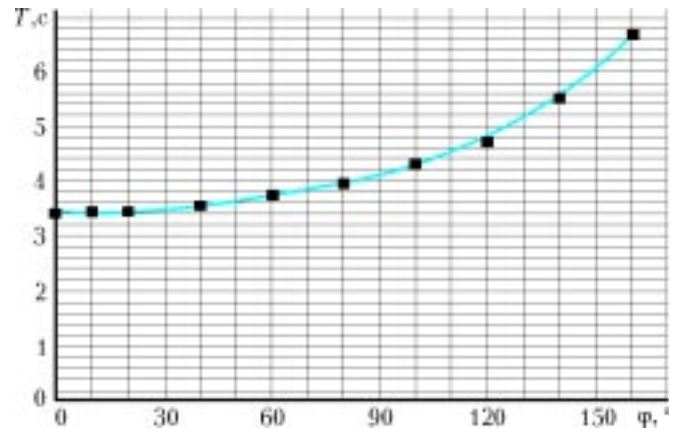


Рис.2. Зависимость периода колебаний от амплитуды (эксперимент)

увеличивается не более чем на 10%, а при  $90^\circ$  период колебаний увеличивается примерно на 20%. Резкое увеличение периода колебаний наблюдается при приближении угловой амплитуды к  $180^\circ$ . Например, при  $\alpha_m = 160^\circ$  период колебаний увеличился почти в 2 раза по сравнению с периодом малых колебаний.

Мы измерили зависимость периода колебаний от амплитуды для некоторого конкретного колеса-маятника с грузами-противовесами. Однако, полученные результаты могут быть представлены в таком виде, что они окажутся справедливыми для любого физического маятника.

**Теория.** Положение твердого тела (маятника), которое может качаться вокруг горизонтальной оси  $O$ , в каждый момент времени будем характеризовать углом его отклонения  $\alpha$  от положения равновесия (рис. 3). Каждая точка маятника движется по окружности с угловой скоростью  $\omega = \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ . Линейные скорости различных точек маятника различны и определяются расстоянием  $r$  от оси вращения:  $V = \omega r$ . Поэтому кинетическая энергия маятника, вращающегося в данный момент с угловой скоростью  $\omega$ , равна

$$E_k = \sum \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \sum \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2,$$

где  $\Delta m_i$  – масса очень малого участка твердого тела, удаленного от оси вращения на расстояние  $r_i$  и имеющего линейную скорость  $V_i$ . Величина  $\sum \Delta m_i r_i^2$  зависит от распределения масс в твердом теле и положения оси вращения, эту величину называют моментом инерции твердого тела относительно данной оси и обозначают буквой  $I$ .

Для потенциальной энергии маятника можно записать

$$E_n = mgh,$$

где  $h$  – высота поднятия центра масс  $C$  над самым нижним его положением. Из рисунка 3 видно, что  $h = l(1 - \cos \alpha)$ , где  $l$  – расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Если силами трения и сопротивления можно пренебречь, то полная механическая энергия маятника

$$E = \frac{I}{2} \alpha'^2 + mgl(1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

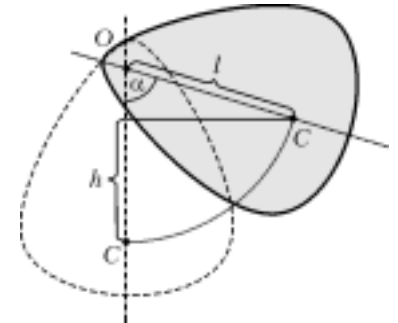


Рис.3. Колебания физического маятника

остаётся постоянной, следовательно, ее производная по времени равна нулю:

$$\frac{dE}{dt} = I\alpha'\alpha'' + mgl\alpha'\sin\alpha = 0.$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции времени  $\alpha = \alpha(t)$ :

$$\alpha'' + \omega_0^2 \sin\alpha = 0, \quad (4)$$

где  $\omega_0^2 = mgl/I$ .

Если при малых углах отклонения считать  $\sin\alpha \approx \alpha$ , то уравнение (4) принимает вид

$$\alpha'' + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (5)$$

Решением этого уравнения является функция  $\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ , в чем легко убедиться, вычислив вторую производную ( $\alpha'' = -\omega_0^2 \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 \alpha$ ) и подставив ее в уравнение (5) – оно обратится в тождество. Таким образом, при достаточно малых амплитудах колебаний (когда  $\sin\alpha \approx \alpha$ ) колебания маятника являются гармоническими, а период этих малых колебаний – обозначим его  $T_0$  – не зависит от амплитуды и определяется формулой

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (6)$$

В частности, для математического маятника

$$I = ml^2, \text{ и } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

а для шарнирно закрепленной за один конец однородной палочки массой  $m$  и длиной  $L$

$$I = \frac{mL^2}{3}, \quad l = \frac{L}{2}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Для произвольных углов отклонения  $\alpha$  выразить решение уравнения (4) в элементарных функциях не удается. Однако уравнение можно решить численно. Существуют различные алгоритмы решения. Самый простой алгоритм может быть осуществлен следующим образом. Зададим некоторые значения угла:  $\alpha = \alpha_1$  и угловой скорости:  $\alpha' = \omega_1$  в начальный момент времени. При помощи уравнения (4) вычислим угловое ускорение в этот начальный момент:  $\beta_1 = \alpha'' = -\omega_0^2 \sin\alpha_1$  и рассчитаем угол  $\alpha_2$  и угловую скорость  $\omega_2$  через малый промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega_1 \Delta t + \frac{\beta_1 \Delta t^2}{2}, \quad \omega_2 = \omega_1 + \beta_1 \Delta t.$$

Далее вычислим угловое ускорение  $\beta_2 = -\omega_0^2 \sin\alpha_2$  в момент  $t = \Delta t$ , а затем – угол и угловую скорость в следующий момент времени  $t = 2\Delta t$ :

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega_2 \Delta t + \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2}, \quad \omega_3 = \omega_2 + \beta_2 \Delta t,$$

и так далее. Приведенный алгоритм не очень эффективен, поскольку нужно брать очень малый временной шаг  $\Delta t$ , чтобы избежать накопления ошибок при многократных повторных вычислениях. Существуют и другие, более рациональные схемы решения дифференциальных уравнений, в которых ошибки, возникающие на каждом шаге, частично компенсируются.

На рисунке 4 приведены результаты численного решения уравнения (4) для нескольких значений угловой амплитуды  $\alpha_m$ . Заметим, что форма колебаний остаётся близкой к синусоидальной даже при весьма больших амплитудах. Так, даже при  $\alpha_m = 150^\circ$  отклонения от синусоидальной формы весьма незначительны (штриховая кривая на рисунке 4

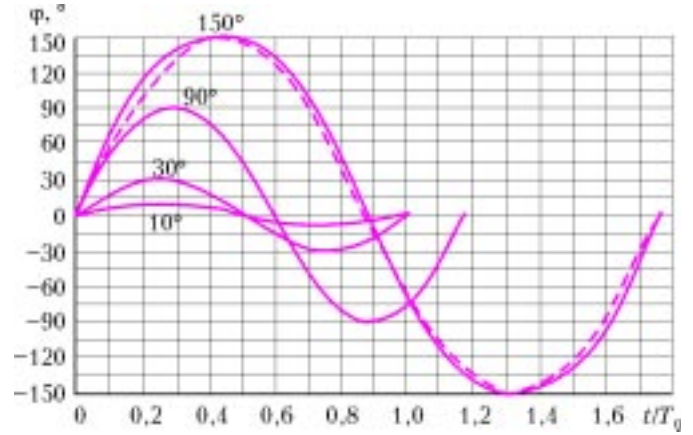


Рис.4. Зависимость угла отклонения физического маятника от времени при различных угловых амплитудах колебаний (теория)

рассчитана по формуле  $\alpha = 150 \sin(2\pi t/T)$ , а при  $\alpha_m = 90^\circ$  отклонений от синусоидальной зависимости при выбранном масштабе вообще не заметно. Период колебаний, как видно, увеличивается с ростом угловой амплитуды.

Расчетная зависимость периода колебаний от амплитуды изображена на рисунке 5. По оси ординат отложены значения не самого периода колебаний  $T$ , а отношения  $T/T_0$ , где  $T_0$  – период колебаний при предельно малых амплитудах. Такой переход к безразмерной переменной позволяет применять

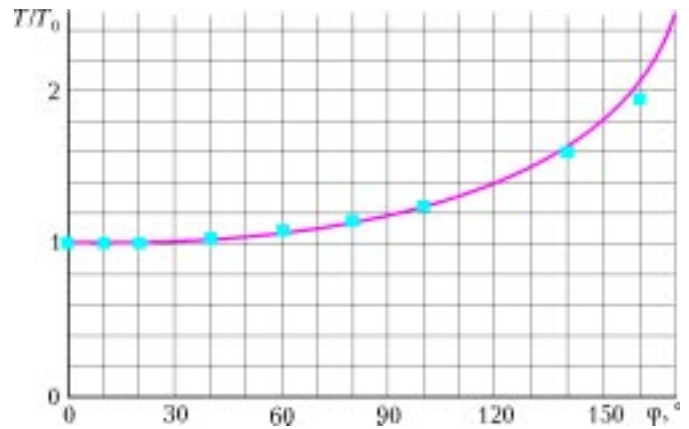


Рис.5. «Точки» – эксперимент, сплошная линия – теория

результаты наших расчетов к любому физическому маятнику. Иными словами, приведенные на рисунках 4 и 5 расчетные кривые будут выглядеть совершенно одинаково для всех физических маятников, а различаться будут лишь значения периодов малых колебаний  $T_0$ . На графике рисунка 5 нанесены также «точки», полученные по результатам наших экспериментов с колесом-маятником. Видно, что согласие эксперимента и теории удовлетворительное – расхождения находятся в пределах погрешностей эксперимента.

Итак, точное численное решение уравнения (4) показывает, что колебания маятника, строго говоря, не являются изохронными – период колебаний монотонно увеличивается с ростом амплитуды. Однако при малых угловых амплитудах зависимость периода от амплитуды выражена слабо. Так, например, при угловой амплитуде  $\alpha_m = 30^\circ$  период колебаний превышает период колебаний  $T_0$  с предельно малой амплитудой не более чем на 2%, а для  $\alpha_m = 90^\circ$  превышение периода составляет примерно 20%. Если говорить о математическом маятнике, то именно такие погрешности будет давать формула (2) при вычислении периода с указанными выше амплитудами.