Глава 8 **ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ**

Алгоритмы

А-1 *Задание стандартных функций*

1. К стандартным функциям отнесем функции вида $y = kx, y = \frac{c}{x}$ и $y = ax^2$

А. Вид функции известен.

Дано значение функции $y = f(x)$ в одной точке и известен ее вид. Найдите неизвестный коэффициент (*k*, *c* или *a*).

1) Прямая пропорциональная зависимость

а) $f(2) = 1$

б) $f(-3) = 9$

в) $f(-1{,}5) = 7{,}5$

г) $f\left(\frac{4}{3}\right) = -2$

2) Обратная пропорциональная зависимость

а) $f(3) = 2$

б) $f(-2) = \frac{1}{2}$

в) $f(2{,}5) = -2{,}5$

г) $f\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{3}{10}$

3) Квадратичная зависимость

а) $f(-1) = -1$

б) $f(3) = 6$

в) $f(-1{,}5) = -1{,}5$

г) $f\left(\frac{2}{3}\right) = -8$

Б. Вид функции неизвестен

Даны значения функции $y = f(x)$ в двух точках. Определите вид функции и найдите коэффициент (*k*, *c* или *a*).

а) $f(1) = \frac{1}{4}$; $f(-2) = -\frac{1}{2}$

б) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

в) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$

г) $f(-3) = 3$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$

д) $f(3) = -9$; $f(9) = -3$

е) $f(9) = -27$; $f(1) = -3$

2. По таблице значений переменных x и y определите вид зависимости между ними

1. $\frac{y}{x} = k$, $k \neq 0$.

2. $xy = c$, $c \neq 0$.

3. $y = ax^2$, $a \neq 0$.

4. $y = ax + b$, $b \neq 0$.

5. Ни одна из указанных.

№	Зависимость				
1	x	1	2	3	4
	y	–1,6	–1,2	–0,8	–0,4
2	x	1	2	3	4
	y	0,2	0,8	1,8	3,2
3	x	1	2	3	4
	y	12	6	4	3
4	x	1	2	3	4
	y	–0,3	–0,6	–0,9	–1,2
5	x	1	2	3	4
	y	4	2	1,5	1
6	x	1	2	3	4
	y	2,5	2	1,5	1
7	x	1	2	3	4
	y	–0,6	–2,4	–5,4	–9,6
8	x	1	2	3	4
	y	0,7	1,4	–2,1	2,8
9	x	1	2	3	4
	y	0,25	0,5	0,75	1
10	x	1	2	3	4
	y	–6	–3	–2	–1,5

А-2 *Понятие функции. График функции*

1. Для данной функции $y = f(x)$ вычислите

а) $f(1)$, б) $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, в) $f(0, 1)$, г) $f(-x)$, д) $f\left(\frac{x}{2}\right)$, е) $\frac{1}{2}f(2x)$, ж) $f(x^2)$, з) $f\left(\frac{1}{x}\right)$, и) $f(1-x)$,

к) $f\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

1) $f(x) = 3x$

2) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

3) $f(x) = 2x^2$

4) $f(x) = 1 - x$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

6) $f(x) = x^2 - x$

2. Найдите области определения следующих функций

1) $y = -2x + 1$

2) $y = x^2 - 1$

3) $y = \dfrac{1}{x-1}$

4) $y = x + \dfrac{1}{x}$

5) $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$

6) $y = \dfrac{2}{x^2 - x} + \dfrac{3}{x^2 + x}$

7) $y = \sqrt{x}$

8) $y = \sqrt{x+1}$

9) $y = \sqrt{1 - x^2}$

3. Определите, будет ли график функции проходить через точку A.

1) $y = \dfrac{x+1}{2}$, $A(-81; 40)$

2) $y = \dfrac{-2x+1}{3}$, $A\left(27; -17\dfrac{2}{3}\right)$

3) $y + 3x - 1 = 0$, $A(10; -29)$

4) $2x^2 - 5y = 0$, $A(0; 0)$

5) $y - 4x^2 = 0$, $A(0; 0)$

6) $y = -x^2 - 5x + 1$, $A(-10; 151)$

7) $xy = -3$, $A\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$

8) $xy - y + 2 = 0$, $A(0{,}1; 2{,}2)$

9) $y = -\dfrac{x+2}{x+1}$, $A\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$

10) $y = \dfrac{2x+3}{x}$, $A\left(\sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\right)$

4. Составьте уравнение прямой, если известно, что она проходит через точки P_1 и P_2.

1) $P_1(1; 1)$, $P_2(5; 1)$

2) $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 3)$

3) $P_1(1; 4)$, $P_2(-5; 4)$

4) $P_1(-8; 2)$, $P_2(0; 0)$

5) $P_1(3; 2)$, $P_2(7; 4)$

6) $P_1(-4; 11)$, $P_2(5; -7)$

7) $P_1(-7; 15)$, $P_2(-7; 1)$

8) $P_1(-\sqrt{3}; 4)$, $P_2(-\sqrt{3}; 0)$

5. Составьте формулу линейной функции, если известен ее угловой коэффициент и координаты точки A, через которую проходит ее график.

1) $k = -2$, $A(0; 4)$

2) $k = \dfrac{1}{2}$, $A(-2; 2)$

3) $k = 0$, $A(1; 1)$

4) $k = 2$, $A(-4; 0)$

5) $k = 0$, $A(-3; 5)$

6) $k = \dfrac{1}{3}$, $A(0; -6)$

7) $k = -4$, $A(-1; -2)$

8) $k = -\dfrac{1}{4}$, $A(2; -6)$

А-3 *Каноническая запись зависимостей*

1. А. Прямые. Следующие линейные зависимости между x и y приведите к виду $y = kx + b$.

1) $x = 3y - 1$
2) $x + 2y = 0$
3) $2x - 3y + 5 = 0$
4) $2(y - x) = 3(2x + y + 1)$
5) $\frac{2}{x+1} = \frac{1}{2y-x}$
6) $\frac{y-2}{x+2} = 5$

Б. Гиперболы. Следующие дробно-линейные зависимости между x и y приведите к виду $y = b + \frac{k}{x-a}$.

1) $(x + 1)(y - 1) = 2$
2) $xy + x + y = 0$
3) $xy - 2x + 3y = 1$
4) $y = \frac{2x}{x-1}$
5) $x = \frac{y+1}{y-2}$
6) $xy = (2x+1)(y-2)$

В. Окружности. Следующие квадратичные зависимости между x и y приведите к виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

1) $x^2 + y^2 - 4y = 0$
2) $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 1 = 0$
3) $(x + 2)^2 + 2x - y^2 = 0$
4) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 8$

Г. Параболы. Следующие квадратичные зависимости между x и y приведите к виду $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

1) $y = x^2 + 8x$
2) $y = x^2 - x + 5$
3) $y = -x^2 + 4x + 1$
4) $y = 2x^2 - 6x + 3$
5) $y = (x + 1)(x + 2) + (x - 1)(x - 2)$
6) $\frac{y}{x+1} = 2x - 1$
7) $x^2 + y^2 = (2x + 1)^2 + (y - 1)^2$
8) $x(x + 1) + y(y + 1) = (y - 3)^2$

Соответствия

С-1 Построение графиков зависимостей и функций
С-2 Чтение графика
С-3 Функции, заданные несколькими формулами

С-1 *Построение графиков зависимостей и функций*

1. Постройте графики следующих зависимостей и функций и опишите их свойства.

А. Линейные функции

1) $y = 3x$

2) $y = -\frac{x}{2}$

3) $y = x + 3$

4) $y = 2 - x$

5) $y = 2x + 4$

6) $y = 5 - 3x$

7) $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$

8) $y = \frac{5}{2}x - 1$

Б. Линейные зависимости

Можно выражать одну переменную через другую, а можно привести к виду $ax + by = c$ или, что то же самое, $ax + by + c = 0$.

1) $x + y = 3$

2) $x - y = -1$

3) $2x - y = 5$

4) $3y - x + 1 = 0$

5) $2x + 5y - 7 = 0$

6) $3x - 6y + 8 = 0$

7) $-\frac{3x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

8) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$

9) $x - 2y - 2(x - 4y) = 4$

10) $2(y - x) = 3(2x + y + 1)$

11) $\frac{2}{x+1} = \frac{1}{2y - x}$

12) $\frac{y-2}{x+2} = 5$

В. Дробно-линейные зависимости

Можно выражать y через x, но можно приводить к виду $(x - a)(y - b) = k$.

1) $xy = 2$

2) $xy = -\frac{1}{2}$

3) $(x + 1)(y - 1) = 1$

4) $y = \frac{x+2}{x-2}$

5) $y = \frac{4x+1}{x}$

6) $\frac{x}{y} = x + 8$

7) $y = \frac{1-6x}{x}$

8) $(x - 1)y = 1 - 2y$

9) $(x + 11)y = 3x + 4$

10) $(x + 6)y = 2x + 1$

11) $(x + 1)(y + 1) = 2xy$

12) $xy = (2x + 1)(y - 2)$

Г. Квадратичные функции

1) $y = \frac{x^2}{2}$

2) $y = 2x^2$

3) $y = x^2 - 4$

4) $y = -x^2 + 1$

5) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$

6) $y = 2(x + 1)^2$

7) $y = -2(x - 1)^2$

8) $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2$

9) $y = (x + 2)^2 - 9$

10) $y = (x - 3)^2 + 1$

11) $y = -(x - 4)^2 + 1$

12) $y = -(x + 1)^2 - 3$

2. Окружность задана формулой. Найдите координаты центра и радиус окружности. Постройте ее график.

1) $x^2 + y^2 = 4$

2) $x^2 + y^2 = 2$

3) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

4) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$

5) $(x - 2) + (y + 3)^2 = 5$

6) $x^2 - 8x + y^2 - 4x + 19 = 0$

7) $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$

8) $x^2 - 6x + y^2 = 0$

9) $x^2 + y^2 + 8y = 0$

10) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

3. Неявное задание функции

Постройте графики зависимостей, выражая одну из переменных в виде функции другой из них. Будьте внимательны при построении графика функции вида $x = x(y)$, учитывая, что ее аргумент откладывается по вертикальной оси.

1) $xy = y + 1$

2) $y^2 + x = 2y$

3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

4. Прямые и окружности

Постройте графики зависимостей.

1) $2x + 3y = 5$

2) $x^2 + y^2 = 9$

3) $\frac{x-3y}{2x+y+1} = \frac{1}{3}$

4) $x^2 + y^2 = x + y$

5) $3(x - 3) + 2(y - 1) = 0$

6) $\sqrt{x^2 - 3y^2} = 2x + 1$

5. Комбинации графиков

Если уравнение зависимости имеет вид $F \cdot G = 0$, то нужно построить графики зависимостей $F = 0$ и $G = 0$ и взять их объединение.

Постройте графики зависимостей.

1) $(x + y)(x - y + 1) = 0$

2) $2x = x^2y$

3) $(x^2 + y^2)(y - x^2) = y - x^2$

4) $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = x + y$

5) $(x^2 + y^2)^2 + 4 = 5(x^2 + y^2)$

6) $x^2 = x^4 - 2x^2y + y^2$

С-2 *Чтение графика*

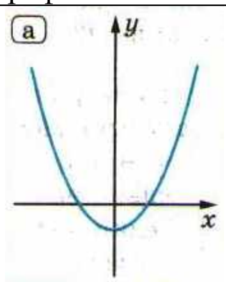
1. Отметьте, для каких прямых выполняются перечисленные условия/

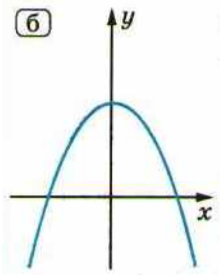
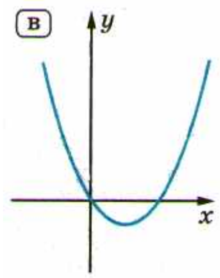
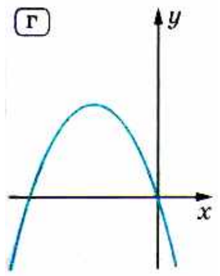
Прямая Условие	$x + y = 5$	$y = 5x + 4$	$x = 3 - y$	$3x + 2y +$ $+ 1 = 0$	$y + 1 =$ $= 2(x - 2)$
Проходит через точку (2; –1)					
Параллельна прямой $y = -x$					
Отсекает на осях равные отрезки					
Наклонена под острым углом к оси абсцисс					
Пересекает ось ординат в верхней полуплоскости					

2. Отметьте, где расположена вершина параболы, являющейся графиком указанной квадратичной функции (точки координатных осей не принадлежат ни одной из четвертей).

Функция Условие	$y = 4 - x^2$	$y = x^2 + x + 1$	$y = x^2 - 3x + 3$	$y = -x^2 - 2x - 3$	$y = 2x^2 -$ $- 3x - 2$
В I четверти					
Во II четверти					
В III четверти					
В IV четверти					
На одной из координатных осей					

3. Для каждой из функций, заданных в столбце, укажите ее график.

Функция График	$y = -x(1 + x)$	$y = -x(1 - x)$	$y = 3 - x^2$	$y = x^2 - 2$
				

4. Найдите множество значений данной функции на заданном отрезке.

1) $y = 3x - 2$ на $[-1; 4]$

2) $y = -2x + 3$ на $[0; 5]$

3) $y = \frac{2-x}{3}$ на $[-3; 5]$

4) $y = \frac{-3+2x}{3}$ на $[1; 2]$

5) $y = -x^2 + 2x - 3$ на $[1; 3]$

6) $y = x^2 + x - 2$ на $[-2; -\frac{1}{2}]$

7) $y = x^2 - 8x$ на $[0; 5]$

8) $y = x^2 - 4$ на $[-1; 3]$

9) $y = \frac{3+x}{x}$ на $[1; 3]$

10) $y = \frac{2-x}{x}$ на $[-4; -1]$

11) $y = \frac{x-1}{x+1}$ на $[-3; -1]$

12) $y = \frac{2x}{x-1}$ на $[1; 5]$

5. Постройте график функции $y = f(x)$. По графику определите значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет корни с указанными условиями.

1) $y = x^2 - 2x$

а) уравнение $f(x) = a$ имеет два корня разных знаков

б) уравнение $f(x) = a$ имеет два положительных корня

в) уравнение $f(x) = a$ имеет два корня, каждый из которых равен (-1)

2) $y = x^2 - 4x + 3$

а) уравнение $f(x) = a$ имеет два корня, каждый из которых больше единицы

б) один из корней уравнения $f(x) = a$ равен нулю

в) уравнение $f(x) = a$ имеет корни разных знаков

С-3 *Функции, заданные несколькими формулами*

1. Постройте графики следующих функций.

1) $y = |x - 1|$

2) $y = |2x + 1|$

3) $y = |x| + |x - 1|$

4) $y = |2x| + |x + 1|$

5) $y = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x^2, x < 0 \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \ge 1 \\ 2x - 1, x < 1 \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} x - x^2, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} 1 - x^2, x \le 1 \\ x - 1, x > 1 \end{cases}$

9) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \ge 1 \\ |x|, -1 < x < 1 \\ \frac{-1}{x}, x \le -1 \end{cases}$

10) $y = \begin{cases} \left|\frac{1}{x}\right|, |x| \ge 1 \\ 2x^2 - 1, |x| < 1 \end{cases}$

Приложения

П-1 Равномерное движение
П-2 Средняя скорость
П-3 Равноускоренное движение

Во всех сюжетах этого раздела мы рассматриваем движение тела (материальной точки) по прямой. Мы считаем, что на этой прямой выбрана система координат и положение тела задается координатой x. Время обозначено буквой t. Перемещением l тела за промежуток времени $[t_1; t_2]$ называется число, равное разности координат: $l = x(t_2) - x(t_1)$. Напомним, что путь s, который по смыслу является положительной величиной, может от перемещения l отличаться знаком: $s = |l|$. Мы считаем, что все величины вычислены в некоторой системе единиц и заданы их числовые значения без указания единиц измерения.

П-1 *Равномерное движение*

1) Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ тело находится в начале координат и движется равномерно со скоростью v. Запишите зависимость положения тела от времени t.

2) Решите аналогичную задачу, считая, что в начальный момент времени тело находится в точке x_0.

3) Вычислите скорость, с которой движется тело, зная его положение в двух точках: $x(0) = 2$, $x(2) = 6$.

4) Найдите зависимость положения тела от времени, зная координаты тела в два момента времени: $x(t_1)= x_1$, $x(t_2) = x_2$.

5) На каждом из отрезков времени [0; 1], [1; 2], [2; 3], [3; 4] тело двигалось с постоянной скоростью, но эта скорость была различной: $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 0$, $v_4 = -\frac{1}{2}$ (отрезки занумерованы по порядку). В начальный момент времени тело находилось в начале координат.

а) Постройте график функции $x = x(t)$, где $x(t)$ – положение тела в момент времени t.

б) Вычислите среднюю скорость тела на промежутке времени [0; 4].

6) По одной и той же оси x движутся два тела с постоянными скоростями $v_1 = 3$ и $v_2 = 5$. В начальный момент $t = 0$ первое тело находилось в начале координат, а второе – в точке $x_0 = -3$.

а) Постройте графики движения обоих тел и найдите по графику момент времени, когда второе тело нагонит первое.

б) Найдите функцию, выражающую расстояние между телами в момент времени t. Не забудьте того, что расстояние – это положительная величина.

П-2 *Средняя скорость*

1) Половину времени тело двигалось равномерно со скоростью v_1, а вторую половину – со скоростью v_2. найдите среднюю скорость движения на всем промежутке движения.

2) Половину пути тело двигалось равномерно со скоростью v_1, а вторую половину – со скоростью v_2. найдите среднюю скорость тела за все время движения.

3) В таблице приведены координаты положения тела в моменты времени t_i.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
t_i	0	2	4	6	8	10	12	14
x_i	–2	1	5	–5	1	3	3	0

а) Вычислите средние скорости тела на промежутках времени $[t_i; t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

б) Постройте график движения тела, считая, что на каждом отрезке времени $[t_i; t_{i+1}]$ оно двигалось равномерно.

в) Вычислите средние скорости тела на промежутках времени [0; 4], [2; 10], [0; 14], [6; 12].

г) Найдите промежуток времени, на котором средняя скорость движения тела была наименьшей.

д) На каких отрезках времени вида $[t_i; t_{i+1}]$ средняя скорость движения тела была отрицательной или нулевой?

П-3 *Равноускоренное движение*

1. Равноускоренным называется движение, при котором изменение скорости пропорционально изменению времени, то есть отношение $\dfrac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}=a$ является одним и тем же числом для любого промежутка времени $[t_1; t_2]$. Число a, которое играет роль «скорости скорости», называется ускорением.

1) Пусть тело движется с постоянным ускорением a. Как меняется скорость движения v, если в начальный момент времени $t = 0$ она равнялась числу v_0?

2) Пусть скорость движения меняется линейно, то есть $v(t) = at + v_0$. Докажите, что средняя скорость движения на промежутке времени равна среднему арифметическому значений скорости на концах промежутка.

3) Зная, что средняя скорость движения на промежутке времени $[0; t]$ равна $\dfrac{v_0+v(t)}{2}$, вычислите перемещение l тела за этот промежуток времени.

4) В начальный момент времени t_0 тело находилось в начале координат и его скорость равнялась нулю. Тело движется с постоянным ускорением $a = 2$. Найдите зависимости скорости v и положения точки x от времени t и постройте графики соответствующих функций.

2. Падение тела в пустоте

Если тело движется в пустоте под действием силы тяжести, то его ускорение постоянно. Обозначим его через g. Будем считать, что положение точки и ее скорость в момент времени $t = 0$ равны нулю, а направление оси x выбрано так, что точка движется в положительном направлении. Из формул, полученных в предыдущем сюжете, следует, что $x(t)=\dfrac{gt^2}{2}$ и $v(t) = gt$. Докажите утверждения, сформулированные Галилеем (он еще не знал, что такое ускорение).

1) Расстояние, которое падающее тело пройдет за время t, равно расстоянию, которое оно прошло бы за то же время, двигаясь равномерно со скоростью, равной половине скорости, достигнутой им в конце движения.

2) Расстояния, проходимые телом за разные промежутки времени, отсчитанные от начала движения, относятся как квадраты этих промежутков.

Решите несколько задач на вычисление, считая $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

3) С высоты девятиэтажного дома ($h = 31$ м) бросили камень. Определите время падения и скорость камня в момент приземления.

4) Из ружья выстрелили вертикально вверх. Начальная скорость пули равна 50 м/с.

а) На какую высоту поднимется пуля?

б) Сколько времени она будет в полете?

в) На какой высоте пуля будет через 2 с после выстрела?

Сопротивление воздуха не учитывается – считается, что движение происходит в пустоте.

Исследования и доказательства

1. Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на промежутке $[a; b]$, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

1) Сформулируйте определение функции, убывающей на промежутке.

Докажите следующие утверждения:

2) Если функция f возрастает на отрезках $[a; b]$ и $[b; c]$, то она возрастает на отрезке $[a; c]$.

3) Если две функции f и g возрастают на одном и том же промежутке, то и их сумма $f + g$ возрастает на этом промежутке.

4) Если функция $y = f(x)$ возрастает на некотором промежутке, то функция $y = -f(x)$ убывает на этом промежутке.

5) Если функция $y = f(x)$ возрастает на некотором промежутке и $f(x) > 0$ при всех x из этого промежутка, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ убывает на этом промежутке.

6) Если функция f на отрезке $[a; b]$ возрастает, а на отрезке $[b; c]$ убывает, то $f(b)$ – наибольшее значение f на отрезке $[a; c]$.

2. Симметрия графика функции

Четные и нечетные функции. Числовая функция f называется *четной*, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и для любого числа x из области определения справедливо равенство $f(–x) = f(x)$.

Числовая функция f называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и для любого числа x из области определения справедливо равенство $f(–x) = –f(x)$.

1) Проверьте, что функции $y = kx$ и $y = \frac{c}{x}$ нечетны, а функция $y = ax^2$ – четна.

2) Если f – четная функция, то ее график симметричен относительно оси ординат.

3) Если f – нечетная функция, то ее график симметричен относительно начала координат.

Пусть f и g – числовые функции с общей областью определения. Докажите следующие утверждения.

4) Если f и g – четные функции, то $f + g, f – g, f \cdot g$ – четные функции.

5) Если f и g – нечетные функции, то $f + g$, $f – g$ – нечетные функции, $f \cdot g$ – четная функция.

6) Если f – четная функция, g – нечетная функция то $f \cdot g$ – нечетная функция.

Функция f определена на всей числовой оси, a, b – вещественные числа. Докажите следующие утверждения:

7) График функции f симметричен относительно прямой $x = a$, в том и только в том случае, если $f(a + x) = f(a – x)$ при всех x.

8) График функции f симметричен относительно точки $(a; b)$, в том и только в том случае, если $f(a + x) + f(a – x) = 2b$ при всех x.

9) Докажите, что для любой числовой функции f справедливо утверждение:

Если область определения функции f симметрична относительно начала координат, то f можно единственным образом представить в виде суммы четной и нечетной функций.

3. Геометрические свойства прямой как графика линейной функции

Пусть l – прямая, являющаяся графиком линейной функции $y = kx + b$.

1) Докажите, что для любых трех различных точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ и $M_3(x_3; y_3)$ прямой l верна пропорция $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$.

2) Как, зная координаты двух точек прямой l, найти коэффициент k для функции $y = kx + b$?

3) Известно, что точки прямой l равноудалены от точек $P_1(a_1;b_1)$ и $P_2(a_2;b_2)$.

а) Какая точка отрезка P_1P_2 лежит на прямой l? Каковы ее координаты?

б) Вычислите коэффициенты k и b для функции $y = kx + b$ через координаты точек P_1 и P_2.

4) Пусть $b \neq 0$. Пусть c и d – координаты точек на осях x и y соответственно, в которых прямая l пересекает оси координат.

а) Вычислите c и d через k и b.

б) Докажите, что уравнение прямой l можно записать в виде $\frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1$ (уравнение прямой в отрезках).

4. Геометрические свойства параболы

Пусть C – парабола, являющаяся графиком функции $y = x^2$.

1) Докажите вычислением расстояний, что любая точка параболы C равноудалена от точки $F(0;\frac{1}{4})$ и прямой l, заданной уравнением $y=-\frac{1}{4}$. Точку F называют *фокусом параболы*, а прямую l – ее *директрисой.*

2) Пусть M – точка на параболе C с координатами (1; 1), M' – ее проекция на ось x. Разобьем отрезок $M'M$ на n одинаковых частей точками M_1, M_2, …, $M_n = M$. Проведем прямые OM_1, OM_2, …, OM_{n-1}, OM_n. Пусть P_i – точки пересечения параболы с отрезками OM_i, $i = 1$, …, $n - 1$. Сделайте необходимые построения. Докажите, что абсциссы точек P_i делят отрезок OM' оси x на n равных частей.

3) Сформулируйте и докажите обобщение предыдущей задачи для любой точки M параболы.

4) Прямая, проходящая через точку C, лежащую на оси ординат, пересекает параболу $y=x^2$ в точках A и B. Докажите, что произведение абсцисс точек A и B не зависит от углового коэффициента прямой.

5) Прямые l_1 и l_2 пересекают параболу $y=x^2$ в точках A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно. Докажите, что, если l_1 и l_2 параллельны, то сумма абсцисс точек A_1 и B_1 равна сумме абсцисс точек A_2 и B_2.

5. Геометрические свойства гиперболы

Пусть C – гипербола, являющаяся графиком функции $y=\frac{1}{x}$.

1) Вершины A и C прямоугольника $ABCD$ лежат на гиперболе $xy = 1$, а стороны прямоугольника параллельны координатным осям. Докажите, что прямая BD проходит через начало координат.

2) Докажите, что гипербола $xy = 1$ есть геометрическое место точек координатной плоскости, разность расстояний которых до точек $F_1(\sqrt{2};\sqrt{2}), F_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ по модулю равна $2\sqrt{2}$. Точки F_1 и F_2 называют *фокусами гиперболы*.

3) Докажите, что гипербола C имеет две оси симметрии: одну, проходящую через фокусы F_1 и F_2, другую – перпендикулярную F_1F_2.

Комбинаторика

1. Целая часть числа

Задачи на подсчет будут связаны с понятиями целой и дробной части числа. Всякое число x можно однозначно представить в виде $x = a + b$, где a – целое число, b удовлетворяет неравенству $0 \le b < 1$. Число a называют целой частью числа x и обозначают $a = [x]$; число b называют дробной частью числа x и обозначают $b = \{x\}$. Таким образом,

$$x = [x] + \{x\}.$$

1) Вычислите [3], $\{3\}$, [3,1], $\{3,1\}$, [–3,1], $\{–3,1\}$, $[\sqrt{2}]$, $[3-\sqrt{10}]$.

2) Докажите следующие свойства целой части:

а) $[x + y] \ge [x] + [y]$,

б) $[x + n] = [x] + n$, где n – целое число,

в) $\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]-[x]$.

3) Постройте график функции $y = [x]$.

4) Постройте график функции $y = \{x\}$.

5) Опишите словами, как можно перейти от графика функции $y = x$ к графику функции $y = [x]$, и примените это описание для построения графика функции $y = [x^2]$.

6) Рассмотрим разложение числа $n!$ по степеням простых чисел.

а) Докажите, что число 2 входит в разложение 100! с показателем $\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{4}\right]+\left[\frac{100}{8}\right]+\left[\frac{100}{16}\right]+\left[\frac{100}{32}\right]+\left[\frac{100}{64}\right]$.

б) Вычислите, с каким показателем входит 3 в разложение 1000!

в) Предложите обобщение полученных результатов.

2. Спектр числа $\sqrt{2}$

1) С помощью калькулятора составьте последовательность целых чисел [$\sqrt{2}$], [$2\sqrt{2}$], [$3\sqrt{2}$], … до [$20\sqrt{2}$]. Последовательность [x], [$2x$], [$3x$], … называют *спектром* числа x.

2) Составьте первые двадцать членов спектра числа $2+\sqrt{2}$.

3) Проверьте, что каждое целое число (до 25) входит в один из найденных спектров и ни одно из них не встречается в обоих спектрах.

4) Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}=1$.

5) Докажите, что $\left\{\frac{n}{\sqrt{2}}\right\}+\left\{\frac{n}{2+\sqrt{2}}\right\}=1$.

6) Докажите, что $\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]+\left[\frac{n}{2+\sqrt{2}}\right]=n-1$, где n – целое число.

7) Сравните количество целых чисел в последовательностях [$\sqrt{2}$], [$2\sqrt{2}$], … и [$2+\sqrt{2}$], [$2(2+\sqrt{2})$], … до тех пор, пока члены этих последовательностей не превосходят 20 с числами $\left[\frac{20}{\sqrt{2}}\right]$ и $\left[\frac{20}{2+\sqrt{2}}\right]$.