# Работа газа при переходе из начального состояния в конечное

В.МОЖАЕВ

Бесконечно малая работа $\delta A$, совершаемая газом при бесконечно малом квазистатическом расширении, в котором его объем увеличивается на $dV$, равна

$$\delta A = p\,dV\ , \qquad (1)$$

где $p$ – внутренне давление газа. В случае квазистатических процессов, когда любое состояние газа является равновесным, внутреннее давление $p$ равно внешнему давлению. Только тогда состояние газа может быть описано двумя параметрами $p$ и $V$, и только тогда имеет смысл формула (1).

Квазистатические процессы, в строгом смысле этого слова, никогда не реализуются в природе, но к ним возможно подойти сколь угодно близко. Многие реальные процессы можно считать приблизительно квазистатическими с той или иной степенью приближения.

Чтобы от элементарной работы $\delta A$ перейти к работе $A$ для конечного процесса, например при переходе из начального состояния газа с объемом $V_1$ в конечное состояние с объемом $V_2$, надо просуммировать элементарные работы, или вычислить интеграл:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV\ . \qquad (2)$$

Такое вычисление возможно только тогда, когда давление является определенной функцией объема. Между тем, согласно уравнению состояния идеального газа, давление $p$ зависит не только от $V$, но и от температуры $T$. Меняя в ходе процесса различным образом температуру газа, можно перевести его из начального состояния в конечное бесчисленным количеством способов. Каждому из этих способов соответствует своя функция $p = p(V)$ и свое значение интеграла в формуле (2). Таким образом, работа газа $A$ не определяется заданием его начального и конечного состояний. Ее величина зависит от способа (или пути) перехода газа из начального состояния в конечное.

Для графического представления работы обычно используется координатная плоскость $pV$. Состояние газа на такой плоскости задается точкой, причем по горизонтальной оси откладывается объем $V$, а по вертикальной – давление $p$. Когда газ совершает квазистатический процесс, точка, изображающая его состояние, описывает на плоскости $pV$ непрерывную линию.

Пусть газ квазистатически переходит из состояния *1* в состояние *2* вдоль кривой *1M2* (рис.1). Эта кривая соответствует определенной зависимости давления от объема и однозначно определяет работу газа – она численно равна площади криволинейной трапеции $1M2V_2V_1$. Если газ заставить переходить из того же начального в то же конечное состояние вдоль другой кривой, например *1N2*, то соответствующая работа изобразится другой площадью, а именно $1N2V_2V_1$.

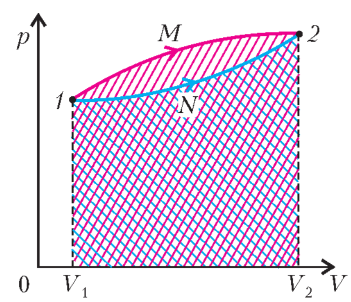

Рис. 1

Если газ обратимым путем переходит из состояния *2* в состояние *1* вдоль кривой *2M1* или *2N1*, то, очевидно, работа численно равна тем же площадям, но со знаком минус. На математическом языке это означает, что в этом случае газ совершил отрицательную работу, а с физической точки зрения – что не газ совершил работу, а над газом была совершена работа некоторыми внешними силами.

А теперь перейдем к разбору конкретных задач.

**Задача 1.** *Моль идеального газа совершает круговой процесс (замкнутый цикл), изображенный на рисунке 2. Участок 1–2 – изотерма при температуре $T_1$, процесс 2–3 – изобара, переход 3–1 – изохора. Отношение объемов $V_2/V_1 = \alpha$. Определите: 1) работу газа на каждом участке; 2) работу, совершенную газом в круговом процессе.*

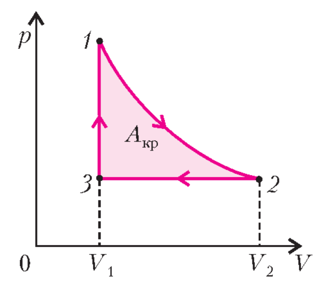

Рис. 2

На участке *1–2* связь между давлением газа $p$ и объемом $V$ имеет вид

$$p = \frac{RT_1}{V},$$

где $R$ – универсальная газовая постоянная. Работа газа в этом процессе, согласно формуле (2), равна

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln\alpha\ .$$

Поскольку $\alpha > 1$, то $A_{12} > 0$, т.е. газ совершает работу.

На изобаре *2–3* давление газа остается неизменным:

$$p = \frac{RT_1}{V_2},$$

а работа равна

$$A_{23} = \frac{RT_1}{V_2} \int_{V_1}^{V_2} dV = RT_1\left(\frac{V_1 - V_2}{V_2}\right) = -RT_1\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right).$$

Получается, что $A_{23} < 0$, т.е. над газом совершается работа.

На изохоре *3–1* объем газа не изменяется, т.е. $dV = 0$, поэтому работа равна нулю:

$$A_{31} = 0\ .$$

В этом случае ни газом, ни над газом работа не совершается.

Очевидно, что работа газа в данном круговом процессе будет равна

$$A_{кр} = A_{12} + A_{23} + A_{31} = RT_1\left(\ln\alpha - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\right).$$

На рисунке 2 эта работа численно равна площади выделенной фигуры *1–2–3*.

**Задача 2.** *Моль гелия расширяется из начального состояния 1 до конечного состояния 3 в двух процессах (рис.3). Сначала расширение идет в процессе 1–2 с постоянной теплоемкостью* $C = \frac{3}{4}R$ *(R – универсальная газовая постоянная). Затем газ расширяется в процессе 2–3, когда его давление p прямо пропорционально объему V. Найдите работу, совершенную газом в процессе 1–2, если в процессе 2–3 он совершил работу A. Температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны.*

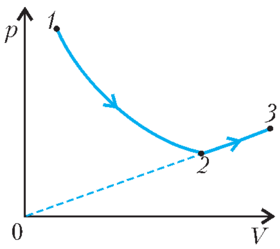

Рис. 3

Поскольку температуры газа в начальном и конечном состояниях одинаковы, переход из состояния *1* в состояние *3* происходит с сохранением внутренней энергии газа. По первому началу термодинамики, в этом случае суммарное подведенное к газу количество теплоты полностью идет на работу, совершенную газом. Воспользуемся этим обстоятельством и найдем количество теплоты, подведенное к газу на участках *1–2* и *2–3*.

Обозначим состояние газа в точке *3* через $p_3$, $V_3$ и $T_3$, а в точке *2* – через $p_2$, $V_2$ и $T_2$. Работу газа *A* на участке *2–3* выразим через площадь трапеции $23V_3V_2$ (рис.4):

$$A = \frac{1}{2}\left(p_3 + p_2\right)\left(V_3 - V_2\right).$$

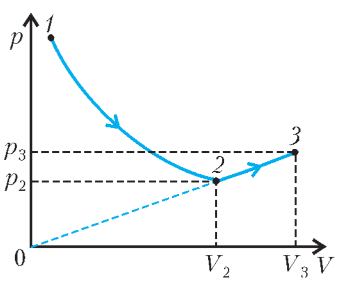

Рис. 4

Из подобия треугольников $03V_3$ и $02V_2$ запишем

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{V_3}{V_2}.$$

Учитывая, что $p_3V_3 = RT_3$ и $p_2V_2 = RT_2$, из совместного решения предыдущих двух уравнений найдем

$$T_3 - T_2 = \frac{2A}{R}.$$

Теперь мы можем записать подведенное к газу количество теплоты на участке *1–2*:

$$Q_{12} = C\left(T_2 - T_3\right) = -\frac{2CA}{R}$$

и на участке *2–3*:

$$Q_{23} = C_V\left(T_3 - T_2\right) + A = \frac{2C_VA}{R} + A,$$

где $C_V = \frac{3}{2}R$ – молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме.

В соответствии с первым началом термодинамики,

$$Q_{12} + Q_{23} = A_{12} + A,$$

где $A_{12}$ – искомая работа газа на участке *1–2*. Тогда окончательно получим

$$A_{12} = Q_{12} + Q_{23} - A = \frac{2\left(C_V - C\right)A}{R} = \frac{3}{2}A.$$

**Задача 3.** *На рисунке 5 показан круговой процесс для ν молей гелия, состоящий из двух участков линейной зависимости давления p от объема V и одной изобары. Известно, что на изобаре 3–1 над газом была совершена работа A (A > 0), а температура газа уменьшилась в* $\alpha = 4$ *раза. Состояния 2 и 3 принадлежат одной изотерме. Точки 1 и 2 на диаграмме pV лежат на прямой, проходящей через начало координат. Определите: 1) температуру газа в точке 1; 2) работу газа за цикл.*

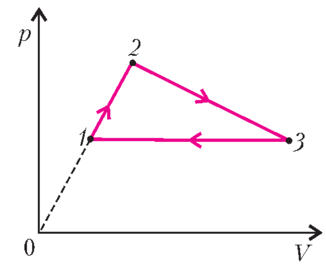

Рис. 5

Обозначим температуру гелия в точке *1* через $T_1$, тогда температура гелия в точке *3* будет $T_3 = \alpha T_1$. Работа над газом на изобаре равна

$$A = p_1\left(V_3 - V_1\right) = \nu R\left(T_3 - T_1\right) = \nu R\left(\alpha - 1\right)T_1.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{A}{\nu R\left(\alpha - 1\right)} = \frac{A}{3\nu R}.$$

Перейдем ко второму вопросу. Работу за цикл $A_ц$ будем искать через площадь треугольника *123*:

$$A_ц = \frac{1}{2}\left(p_2 - p_1\right)\left(V_3 - V_1\right).$$

Для изобарического процесса $V \sim T$, поэтому

$$V_3 - V_1 = V_1\left(\alpha - 1\right).$$

Поскольку точки *1* и *2* лежат на прямой, проходящей через начало координат, то

$$p_2 = \frac{V_2}{V_1}p_1.$$

С другой стороны, точки *2* и *3* лежат на изотерме, поэтому

$$p_2V_2 = p_3V_3.$$

Учитывая, что $p_1 = p_3$, находим

$$p_2 = \sqrt{\frac{V_3}{V_1}}\,p_1 = \sqrt{\alpha}\,p_1.$$

После подстановки в выражение для работы за цикл получим

$$A_ц = \frac{1}{2}p_1V_1\left(\sqrt{\alpha} - 1\right)\left(\alpha - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\nu RT_1\left(\sqrt{\alpha} - 1\right)\left(\alpha - 1\right) = \frac{\left(\sqrt{\alpha} - 1\right)A}{2} = \frac{A}{2}.$$

**Задача 4.** *Моль гелия совершает работу A в замкнутом цикле (рис.6), состоящем из адиабаты 1–2, изотермы 2–3 и изобары 3–1. Найдите работу, совершенную гелием в изотермическом процессе, если разность температур между максимальной и минимальной в цикле равна* $\Delta T$.

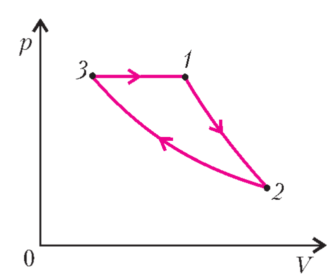

Рис. 6

Очевидно, что максимальная температура гелия в цикле будет в точке *1*. Обозначим эту температуру через $T_1$. Минимальная температура газа будет на изотерме *2–3*, обозначим ее через $T_{23}$. Согласно условию задачи,

$$T_1 - T_{23} = \Delta T.$$

Для кругового процесса, в соответствии с первым началом термодинамики, суммарное подведенное к газу количество теплоты равно работе газа, совершенной им в данном замкнутом цикле:

$$Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A .$$

Тепло, подведенное на адиабате *1–2*, равно нулю:

$$Q_{12} = 0 .$$

На изотерме *2–3* внутренняя энергия гелия остается неизменной, и подведенное тепло равно работе газа:

$$Q_{23} = A_{23} .$$

При изобарическом процессе *3–1* подведенное к газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии и на работу газа:

$$Q_{31} = C_V\left(T_1 - T_{23}\right) + p_{31}\left(V_1 - V_3\right) = \left(C_V + R\right)\Delta T .$$

Окончательно получим

$$A_{23} + \left(C_V + R\right)\Delta T = A .$$

Отсюда найдем работу гелия на изотерме *2–3*:

$$A_{23} = A - \left(C_V + R\right)\Delta T = A - \frac{5}{2}R\Delta T .$$

**Задача 5.** *Подвижный поршень массой m, подвешенный на пружине, делит объем откачанного вертикального цилиндра на две части (рис.7). В положении равновесия высота нижней части цилиндра равна $H_0$, а удлинение пружины при этом составляет $x_0$. В нижнюю часть цилиндра впрыскивают ν молей воды. После того как вся вода испарилась, поршень переместился вверх на величину $x_1 = \alpha x_0$ ($\alpha = 3/2$). Найдите: 1) установившуюся температуру пара; 2) работу, совершенную паром. Теплоотводом через стенки цилиндра пренебречь.*

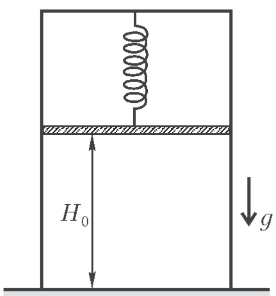

Рис. 7

Запишем условие механического равновесия поршня до впрыскивания воды:

$$mg = kx_0 ,$$

где $k$ – жесткость пружины. После испарения воды и установления нового равновесия поршня объем пара будет

$$V_{\text{п}} = \left(H_0 + \alpha x_0\right)S ,$$

где $S$ – площадь внутреннего поперечного сечения цилиндра. Давление пара при этом будет равно

$$p_{\text{п}} = \frac{mg + kx_0(\alpha - 1)}{S} = \frac{\alpha mg}{S} .$$

Рассматривая пар как идеальный газ, из уравнения состояния найдем температуру пара:

$$T_{\text{п}} = \frac{p_{\text{п}}V_{\text{п}}}{\nu R} = \frac{\alpha mg\left(H_0 + \alpha x_0\right)}{\nu R} .$$

Работа, совершенная паром, пойдет на приращение потенциальной энергии поршня и пружины. Если отсчитывать потенциальную энергию поршня от его положения при отсутствии воды в цилиндре, то суммарная потенциальная энергия поршня и пружины в начальный момент равна

$$W_1 = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mgx_0}{2} .$$

Потенциальная энергия в конечном состоянии составляет

$$W_2 = \frac{kx_0^2(\alpha - 1)^2}{2} + mg\alpha x_0 = \frac{mgx_0\left(\alpha^2 + 1\right)}{2} .$$

Работа пара равна изменению потенциальной энергии:

$$A_{\text{п}} = W_2 - W_1 = \frac{\alpha^2 mgx_0}{2} = \frac{9}{8}mgx_0 .$$

**Задача 6.** *Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит $m_1 = 1$ кг воды при начальной температуре $T_1 = 373$ К, а холодильником – $m_2 = 1$ кг льда при температуре $T_2 = 273$ К, к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды нагревателя в этот момент? Удельная теплота плавления льда $q = 80$ ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.*

Работа, совершаемая любой тепловой машиной в замкнутом цикле, по первому началу термодинамики равна

$$A = Q_1 - Q_2 ,$$

где $Q_1$ – количество теплоты, подведенное к рабочему телу за цикл, а $Q_2$ – отведенное количество теплоты. Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} .$$

Максимальную работу можно получить (теоретически), если тепловая машина будет работать по циклу Карно. КПД цикла Карно зависит только от температур $T_1$ и $T_2$ нагревателя и холодильника:

$$\eta_{\text{К}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} .$$

Сравнивая два выражения для КПД, найдем, что для цикла Карно

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} .$$

В нашем случае количество теплоты $Q_2$, отведенное от рабочего тела и переданное холодильнику, будет идти на плавление льда, и температура холодильника $T_2$ будет оставаться постоянной (пока не растает весь лед) и равной 273 К. А вот температура нагревателя (горячая вода) будет уменьшаться после каждого цикла, и к моменту, когда лед растает, температура воды нагревателя будет заметно меньше начальной, равной 373 К. Следовательно, температура нагревателя будет переменной величиной.

Пусть в некоторый произвольный момент времени температура нагревателя была $T$, а за бесконечно малое время работы тепловой машины она уменьшилась на $dT$. Количество теплоты, переданное рабочему телу за это время, равно

$$dQ_1 = -c_{\text{в}}m_1 dT ,$$

где $c_{\text{в}}$ – удельная теплоемкость воды. Количество теплоты, переданное холодильнику, составляет

$$dQ_2 = q\,dm_2 ,$$

где $dm_2$ – бесконечно малое количество растаявшего льда. Воспользовавшись соотношением между $Q$ и $T$ для цикла Карно, получим

$$-\frac{q\,dm_2}{c_{\text{в}}m_1 dT} = \frac{T_2}{T} .$$

После разделения переменных $T$ и $m_2$ это уравнение будет иметь вид

$$\frac{dT}{T} = -\frac{q\,dm_2}{c_{\text{в}}m_1 T_2} .$$

Проинтегрируем обе части данного уравнения:

$$\int_{T_1}^{T_к} \frac{dT}{T} = -\frac{q}{c_в m_1 T_2} \int_0^{m_2} dm_2 ,$$

где $T_к$ – конечная температура воды в нагревателе к моменту, когда весь лед растает. После интегрирования получим

$$\ln \frac{T_к}{T_1} = -\frac{q m_2}{c_в m_1 T_2} ,$$

откуда найдем

$$T_к = T_1 \exp\left(-\frac{q m_2}{c_в m_1 T_2}\right) = 278{,}3 \text{ К} .$$

Теперь мы можем определить суммарное количество теплоты, полученное от нагревателя к моменту полного таяния льда:

$$Q_1 = c_в m_1 \left(T_1 - T_к\right) .$$

Суммарное количество теплоты, переданное при этом холодильнику, равно

$$Q_2 = q m_2 .$$

Следовательно, от тепловой машины можно получить максимальную работу

$$A_{\max} = Q_1 - Q_2 = c_в m_1 \left(T_1 - T_к\right) - q m_2 = 61{,}5 \text{ кДж} .$$

**Упражнения**

**1.** Моль гелия, расширяясь в процессе *1–2* (рис.8), где его давление $p$ меняется прямо пропорционально его объему $V$, совершает работу $A$. Из состояния *2* гелий расширяется в процессе *2–3*, в котором его теплоемкость остается постоянной и равной $C = R/2$. Какую работу совершит гелий в процессе *2–3*, если температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны?

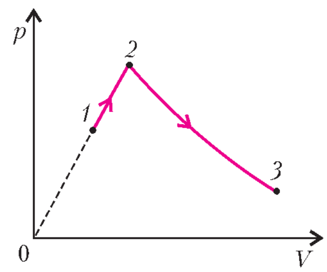

*Рис. 8*

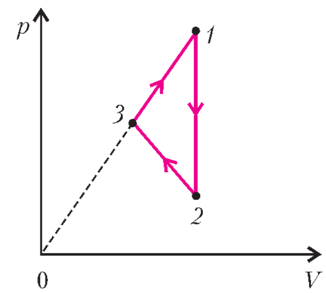

*Рис. 9*

**2.** Цикл для $\nu$ молей гелия состоит из двух участков линейной зависимости давления $p$ от объема $V$ и одной изохоры (рис.9). В изохорическом процессе *1–2* от газа было отведено количество теплоты $Q$ ($Q > 0$), и его температура уменьшилась в 4 раза. Температуры в состояниях *2* и *3* равны. Точки *1* и *3* на диаграмме $pV$ лежат на прямой, проходящей через начало координат. 1) Найдите температуру $T_1$ в точке *1*. 2) Найдите работу газа за цикл.

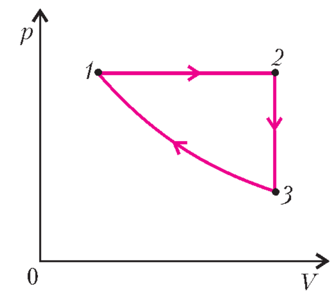

*Рис. 10*

**3.** Моль гелия совершает работу $A$ в замкнутом цикле, состоящем из изобары *1–2*, изохоры *2–3* и адиабатического процесса *3–1* (рис.10). Сколько тепла было подведено к газу в изобарическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур гелия в цикле равна $\Delta T$ ?

# Формулы геометрии помогают алгебре

**_В.МИРОШИН_**

В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ПРИВОДЯТСЯ ТРИ формулы, позволяющие находить:

а) расстояние между точками с координатами $x_1$ и $x_2$ на числовой прямой: это модуль их разности, т.е. $d = |x_2 - x_1|$;

б) расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ числовой плоскости: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

в) расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$: $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Довольно часто удается использовать эти формулы при решении алгебраических задач. Для этого, как правило, нужно истолковать данное алгебраическое выражение как расстояние или сумму расстояний до некоторых точек или прямых. С такими задачами мы и собираемся вас познакомить.

### Сумма расстояний

**Задача 1.** *Найдите минимум выражения*

$$f(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} .$$

**Решение.** Данное выражение представляет сумму расстояний от некоторой точки $M(x; y)$ координатной плоскости до двух точек: $K(3;4)$ и начала координат $O(0;0)$.

Используя известное «неравенство треугольника», получим, что сумма расстояний $MK + MO$ не может быть меньше расстояния $KO$, причем минимум достигается для любой точки $M$, лежащей на отрезке $KO$. Итак, $MK + MO \ge OK = 5$.

**Ответ**: 5.

*Замечание.* Для точек, лежащих на координатной оси, неравенство может быть записано в виде $|x-a| + |x-b| = |a-b| \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \le 0$.

**Задача 2** (МГУ, мехмат). *Найдите минимум выражения*

$$f(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x - y| .$$