Геометрические преобразования и их применение в задачах на построение

Тема «Геометрические преобразования» в действующих школьных учебниках отодвинута в конец 9 класса, и уже по одной этой причине, к сожалению, попала на периферию курса геометрии. Между тем, она чрезвычайно красива, интересна и поучительна. Большая подборка конструктивных задач на преобразования, включенных в ИИСС «Конструктивные геометрические задания» как в форме интерактивных динамических чертежей, так и в текстовом виде, может быть использована на «обычных» уроках (если на эту тему удается выкроить время) или лечь в основу факультатива, особенно в профильных классах. При этом динамические чертежи могут быть использованы не только как иллюстрация и «рабочее поле» для решения традиционных задач на построение, к которым применим метод преобразований, но и при изучении преобразований и их свойств как таковых. Сама природа динамических моделей и включаемые в них инструменты для выполнения преобразований делают этот вид ресурсов наиболее адекватной средой при изучении данной темы.

Ниже мы приведем краткую сводку сведений о геометрических преобразованиях и опишем несколько типичных приемов их применения к решению задач на построения.

Виды преобразований подобия

Напомним, что преобразование подобия F – это такое преобразование плоскости, при котором все расстояния изменяются в одинаковое число раз k: $F(A)F(B) = kAB$ для любых двух точек A и B. При k=1 эти преобразования называются движениями.
Сведения о различных видах движений и подобий дадим в форме таблицы:

Название	Обозначение	Род	Характеристические свойства
Движения			
параллельный перенос	$T_{\vec{a}}$, T_{AB} – переносы на вектор $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$	1	Движение, переводящее любой луч в сонаправленный луч
поворот	R_O^α : O – центр, α – угол поворота	1	Движение, при котором угол между любым лучом и его образом одинаков
скользящая симметрия	$S_l^{\vec{a}}$: l – ось, $\vec{a}$ – вектор	2	Всякое движение 2-го рода (или несобственное, или зеркальное)
Преобразования подобия			
Поворотная гомотетия (спиральное подобие)	$R_O^{k,\alpha}$: O – центр, α – угол поворота, k>0 – коэффициент	1	Угол между любым лучом и его образом одинаков. Существует единственная неподвижная точка и нет неподвижных прямых
Зеркальное подобие	$S_{O,l}^k$: O – центр, k>0 – коэффициент, l – ось	2	Всякое подобие 2-го рода, не являющееся движением
Частные виды преобразований подобия			
Центральная симметрия	$Z_O = R_O^\pi$: O – центр	1	Движение, при котором любой луч переходит в противоположно направленный
Осевая симметрия	S_l: l – ось симметрии	2	Множество неподвижных точек – прямая
Гомотетия	H_O^k : O – центр, k – коэффициент	1	Каждая прямая переходит в ей параллельную и есть неподвижная точка

Здесь перечислены *все* виды преобразований подобия, т.е. любое из них попадает в одну из первых пяти строчек этой таблицы. Поворот и гомотетия – частные случаи спирального подобия; центральная симметрия – частный случай поворота и гомотетии; осевая симметрия – частный случай скользящей симметрии и зеркального подобия. Тождественное преобразование – частный случай параллельного переноса и поворота.

Приведем определения тех видов преобразований из этой таблицы, которые не встречаются в школьных учебниках. Они даются с помощью композиции (напомним, что композиция преобразований – это преобразование, образующееся в результате последовательного выполнения данных):
скользящая симметрия – это композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси симметрии;
поворотная гомотетия (или *спиральное подобие*) – это композиция поворота и гомотетии с одним и тем же центром;
зеркальное подобие – композиция осевой симметрии и гомотетии с центром на оси.
Во всех этих случаях порядок, в котором выполняются преобразования в композиции, роли не играет (хотя, вообще говоря, он влияет на результат).

Композиции преобразований подобия

В ряде задач на построение для решения требуется находить композицию K преобразований подобия F и G. Для этого используют следующие факты:
1) Если F и G – преобразования одинакового рода, то K имеет первый род, если F и G разного рода, то K – преобразование второго рода.
2) Коэффициент подобия K равен произведению коэффициентов F и G.
3) Если F и G – преобразования первого рода, при одном из которых все лучи поворачиваются на угол α, а при другом – на β, то K поворачивает все лучи на угол α+β (если α, β или α+β равны 0, то соответствующее преобразование – параллельный перенос или гомотетия).
4) В частности, если F и G – переносы, то K тоже перенос; если F и G – повороты на углы α и β, то K – поворот на угол α+β или параллельный перенос, если $\alpha+\beta = 360°\cdot k$; если F и G – гомотетии с коэффициентами k_1 и k_2, то K – гомотетия с коэффициентом k_1k_2 или параллельный перенос, если $k_1k_2 = 1$.
5) Если F и G – преобразования подобия второго рода и их оси пересекаются под углом α, то K – поворотная гомотетия с углом поворота 2α; если же оси параллельны, то K – параллельный перенос или гомотетия.

Решение задач на построение с применением преобразований

Задачи на применение преобразований непременно входят во все сборники задач на построение. Обычно они располагаются в соответствии с типом применяемого преобразования (говорят о «методе симметрии», «методе поворота» и т.д.). Однако такая классификация довольно бессодержательна, поскольку этот признак – тип преобразования – совершенно формальный. Но эти же задачи можно группировать и по более существенному признаку – способу применения преобразования; при этом в одной группе оказываются задачи, в которых используются разные виды подобий и движений (а возможно и другие преобразования). В данную версию ИИСС включены подборки заданий на несколько таких методов. Мы описываем их ниже, а задания – интерактивные модели и/или тексты условий – можно найти в оглавлении ИИСС под рубрикой, совпадающей с названием метода. Начнем с наиболее известного среди них метода, название которого, как кажется, противоречит изложенному выше подходу – в нем указан конкретный вид преобразования.

- **Метод гомотетии**

Задачи на применение этого метода можно встретить в большинстве учебников. Рассмотрим один из наиболее популярных примеров.

Пример 1. *Вписать в данный угол окружность, проходящую через данную внутри угла точку*.

Не будем здесь повторять решение этой известной задачи (тем более что она разобрана в общей статье о методах решения задач на построение). Выделим только его основную идею: временно откажемся от условия, что окружность должна пройти через данную точку; и построим *произвольную* окружность, вписанную в угол (это легко). Построенная окружность будет гомотетична искомой и останется только найти и применить к ней гомотетию, после которой она пройдет через данную точку.

Обычно этот метод решения увязывают с методом подобия. Однако нетрудно придумать содержательные задачи, основанные на том же принципе решения, но использующие другие преобразования. Например,

построить окружность, касающуюся двух параллельных прямых и проходящую через данную точку;

или такая же задача, в которой параллельные прямые заменены концентрическими окружностями. Обе эти задачи решаются аналогично исходной: отказавшись от «привязки» к точке, строим произвольную окружность, вписанную в данную полосу (или круговое кольцо), а затем находим и применяем к ней параллельный перенос (соответственно, поворот), после которого она пройдет через данную точку. Однако чаще всего в таких задачах все же используется гомотетия, поэтому в подборке заданий на этот метод, включенной в данную версию ИИСС, мы ограничились задачами на гомотетию и оставили старое название метода.

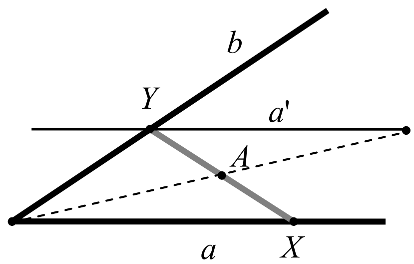
- **Пересечение с образом**

Это метод является комбинацией применения преобразований и метода геометрических мест. Именно, одно из двух геометрических мест, пересечение которых есть искомая точка, получено как образ некоторого множества при преобразовании.

Начнем опять с примера.

Пример 2 (Задача Ламе). *Построить отрезок с концами на сторонах данного угла так, чтобы данная внутри угла точка A была его серединой.*

Допустим, что искомый отрезок XY построен. Точка X лежит на стороне a, Y – на стороне b. При этом X переходит в Y при центральной симметрии относительно точки A. Поэтому точка Y должна принадлежать образу a' стороны a. Отсюда вытекает построение: строим луч, симметричный стороне a относительно точки A. Тогда Y – точка его пересечения с b.



Теперь можно обобщить этот метод.

Пусть задача сводится к построению пары точек X и Y, о которых из условия известно, что

1) точка X лежит на данной фигуре Φ,

2) точка Y лежит на данной фигуре Φ_1,

3) точка Y получается из точки X при некотором известном преобразовании F.

Чтобы ее решить, замечаем, что если X' – образ точки X при преобразовании F, то когда точка X пробегает фигуру Φ (условие 1), точка X' описывает образ Φ' этой фигуры при преобразовании F. Поэтому точка Y должна лежать на Φ' (условие 3), а значит, искомые точки Y – это все точки пересечения Φ' и Φ_1 (условие 2). Соответствующие точки X находятся как прообразы точек Y при преобразовании F.

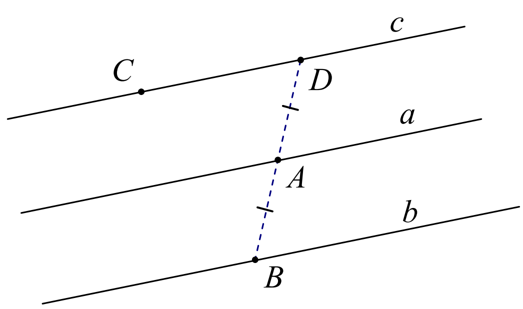
Большинство содержательных задач на построение с помощью преобразований из школьных учебников (в частности, из Геометрии 7-9 Л.С.Атанасяна и др.) решаются этим методом. Он превалирует над другими способами применения преобразований и в более солидных задачниках, таких, например, как классический сборник И.И.Александрова, причем в них используются все виды движений и подобий. В интерактивных «заданиях с указаниями» на этот метод, включенных в ИИСС, учащимся предлагается «нарисовать» геометрическое место точек $F(X)$, когда X пробегает множество Φ, пользуясь инструментом построения следов, т.е. экспериментально найти образ Φ, даже не зная, какое именно преобразование нужно рассмотреть. Этот эксперимент играет большую эвристическую роль в поиске решения задачи.

- **Использование симметрии фигур**

Если фигура, которую требуется построить, обладает симметрией, т.е. переходит в себя при некотором преобразовании (или какая-то ее часть переходит в другую часть), причем это преобразование полностью определяется из условия задачи, то по данным точкам фигуры можно найти другие ее точки. Это простое соображение позволяет решить целый ряд задач.

Пример 3. *Провести через данные три точки A, B, C три параллельные прямые, одна из которых равноудалена от двух других.*

Очевидно, что искомая тройка прямых симметрична относительно любой точки на «средней» прямой. Допустим, что эту прямую мы хотим провести через точку A. Тогда прямая c, проходящая через C, симметрична прямой b, проходящей через B, и, следовательно, содержит точку D, симметричную B относительно A. Построение очевидно (см. рисунок). Поскольку любая из трех прямых может быть «средней», задача имеет, вообще говоря, три решения. Исключение – случай, в котором две данные точки симметричны относительно третьей; тогда решений бесконечно много.



Другое решение, использующее то же общее соображение, получается, если заметить, что пара прямых b, a (где a – «средняя» прямая) переходит в пару a, c при переносе на любой вектор с концами на b и a, в частности, при переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$. Значит, вторую (отличную от C) точку прямой c можно получить переносом A на этот вектор.

- **Восстановление многоугольника**

Рассмотрим простейший пример.

Пример 4. *Построить замкнутую n-звенную ломаную* $A_1A_2…A_n$, *если даны середины ее звеньев*: M_1 *– середина* A_1A_2, M_2 *– середина* A_2A_3, … *и* M_n *– середина* A_nA_1.

Эту задачу несложно решить и без помощи преобразований. При n=3 она совсем простая, а при $n > 3$ можно заметить, что если даны середины K, L, M трех последовательных звеньев AB, BC и CD, то середина N отрезка AD образует вместе с тремя данными серединами параллелограмм $KLMN$ (параллелограмм Вариньона четырёхугольника $ABCD$). Это позволяет провести индуктивное построение. Но решение с применением преобразований открывает путь к целой серии гораздо более трудных и интересных задач.

Заметим, что точка A_2 симметрична A_1 относительно M_1, A_3 симметрична A_2 относительно M_2 и т.д., наконец, A_1 симметрична A_n относительно M_n. Это значит, что если мы последовательно применим к A_1 центральные симметрии относительно M_1, M_2, …, M_n, то после n симметрий точка вернется в исходное положение A_1. Другими словами, A_1 – это неподвижная точка композиции указанных центральных симметрий и задача сводится к отысканию этой композиции. С помощью теоремы о средней линии треугольника легко увидеть, что композиция двух симметрий с центрами M и N есть параллельный перенос на вектор $2\overrightarrow{MN}$. Отсюда ясно, что при четном n рассматриваемая композиция также есть параллельный перенос, а при нечетном – центральная симметрия. В последнем случае имеется единственная неподвижная точка и, стало быть, единственное решение нашей задачи. Найти его, т.е. точку A_1, можно, пользуясь указанным выше свойством композиции центральных симметрий. Можно пойти и более элементарным путем: взять любую точку B_1 и последовательно отразить ее относительно всех данных n середин. В итоге получится некоторая точка B_{n+1}. Но, как мы знаем, композиция симметрий в этом случае – центральная симметрия, а поскольку точку B_1 она перевела в точку B_{n+1}, ее центр находится в середине отрезка, соединяющего эти точки. Это и будет искомая точка A_1.

Случай четного n в некотором смысле более интересен. Поскольку параллельный перенос может иметь неподвижную точку только тогда, когда он является тождественным преобразованием, мы сразу получаем, что в этом случае к нашей задаче применим своего рода «закон нуля или бесконечности»: либо она не имеет решений (неподвижных точек нет), либо в качестве A_1 можно взять любую точку плоскости (любая точка неподвижная). Остается выяснить, как это зависит от данных точек M_i. Разбивая всю цепочку из n симметрий на последовательные пары, видим, что второй случай (случай произвольного выбора A_1) имеет место тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + ... + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \vec{0}$.

Заметим, что из приведенного решения сразу следует такая теорема: *середины* M_1, M_2, …, M_n *замкнутой ломаной с четным числом n звеньев удовлетворяют приведенному выше векторному равенству*. (Действительно, наша задача на построение в этом случае заведомо имеет решению – данную ломаную.) Теорема о параллелограмме Вариньона является частным случаем этой теоремы.

Таким же способом можно решать задачи, которые можно свести к следующей схеме: даны n преобразований F_1, F_2, …, F_n (в примере это были центральные симметрии); требуется построить замкнутую ломаную $A_1A_2…A_n$, каждая вершина A_k которой переходит в следующую при преобразовании F_k (следующей вершиной за A_n является, конечно, A_1). Решение сводится к поиску неподвижных точек композиции данных преобразований.

Например, если нам дана вершина O правильного треугольника, построенного на звене AB ломаной, то преобразование F, переводящее A в B – это поворот на 60°; если задан серединный перпендикуляр p к отрезку AB, то F – это осевая симметрия относительно p; а если дана точка M, которая делит отрезок AB в отношении 1:2, то F – это гомотетия с центром M и коэффициентом –1/2.

Во многих случаях композиция преобразований, возникающая в таких задачах оказывается параллельным переносом и мы попадаем в зону действия «закона нуля или бесконечности», получая в придачу к решению задачи интересные теоремы.

Наиболее известный из таких примеров – т.н. теорема Наполеона. Допустим, нам нужно построить треугольник, если даны центры O_1, O_2, O_3 правильных треугольников, построенных «одинаковым образом» на его сторонах (т.е., например, все снаружи искомого треугольника). В этом случае преобразования F_1, F_2, F_3 – это повороты вокруг данных точек на 120° в одном и том же направлении. Композиция поворотов F_1 и F_2, как было сказано выше, есть поворот вокруг некоторой точки O на 120°+120°=240° (несложно проверить, что точка O – вершина правильного треугольника, построенного на отрезке O_1O_2). Композиция поворота $R_O^{240°}$ с третьим данным поворотом F_3 – параллельный перенос (т.к. 240°+120°=360°), который будет тождественным преобразованием только в том случае, когда $O = O_3$. Следовательно, только в этом случае задача и имеет решение, причем в качестве «первой» вершины треугольника можно взять любую точку. Отсюда и вытекает упомянутая выше знаменитая теорема: *центры правильных треугольников, построенных извне на сторонах произвольного треугольника*, *сами образуют правильный треугольник*.

К обоим приведенным примерам, их продолжениям и обобщениям и некоторым другим задачам этого типа в ИИСС даны интерактивные задания, выполняя которые ученики, даже не знакомые с понятием композиции, смогут провести экспериментальное исследование, самостоятельно открыть «закон нуля или бесконечности» и связанные с ним теоремы, решить соответствующие задачи на построение. Все эти задания снабжены достаточно подробными инструкциями.